

Финансовый Университет при Правительстве РФ

Кафедра «Прикладная математика».

Угрозов Валерий Вячеславович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ**

Тема 1. Финансовые инструменты.

1.1. Процентные вычисления.

Простые и сложные проценты.

1.2. Потоки платежей. Рента.

1.3. Облигация. Дюрация.

1.4. Производные финансовые инструменты.

Методология финансово-экономических расчетов

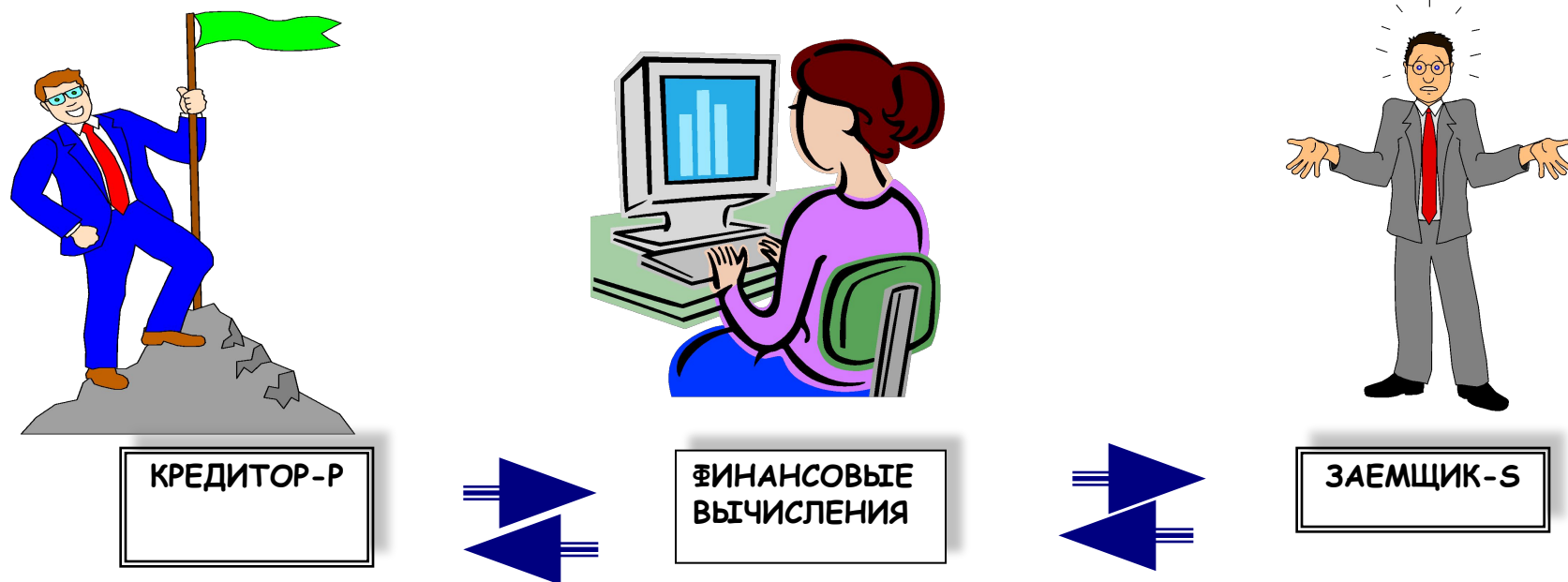


Рис.1. Схема взаимодействия кредитора и заемщика

- Заключая финансово-экономические сделки, договаривающиеся стороны оговаривают определенные условия, изменение которых сопряжены с выгодой для одной стороны и убытками с другой стороны. Учитывая это обстоятельство, обе стороны заинтересованы в объективной и грамотной количественной оценке условий сделки, которая строится на **основе финансовых вычислений.**

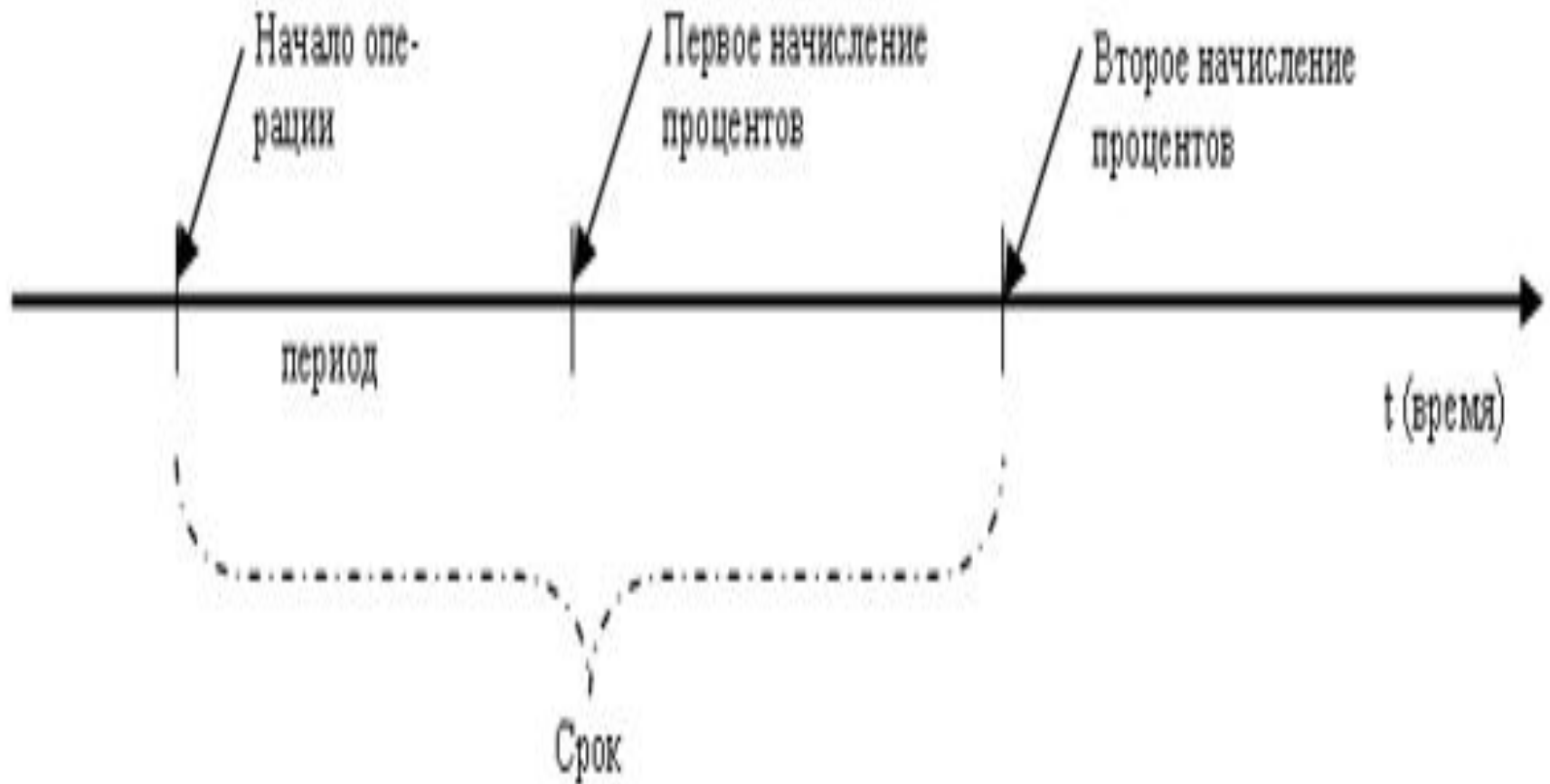
Время как фактор в финансовых расчетах.

- Учет фактора времени обусловлен **неравноценностью денег**. Равные по абсолютной величине «сегодняшние деньги ценнее будущих. Зависимость ценности денег от времени объясняется тремя причинами:
- 1. Деньги могут эффективно использоваться, как финансовый актив, **приносящий доход**, то есть их можно инвестировать и тогда они будут приносить доход.
- 2. **Инфляционные процессы** обесценивают деньги во времени, то есть сегодня на рубль можно купить товара больше чем завтра.
- 3. Неопределенность будущего и связанный с этим **риск повышают ценность имеющихся денег**. Имея рубль сегодня его уже можно израсходовать на потребление, а будет ли он завтра – еще вопрос.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

- **1. P** – первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость (**PV -present value**);)
- **2. I - проценты** (процентные деньги) I - абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в виде: выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, учета векселя, помещения денег в банк и т.д.
- **3. Наращение** первоначальной суммы - процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга.
- **4. $S=P+I$** – наращенная сумма или будущая стоимость (FV - future value), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на нее процентами к концу срока ссуды

Схема начисления процентов



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

- Процентная ставка i - отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды.

$$i = (S - P) / P$$

- Период начисления n - интервал времени, к которому относится процентная ставка.

- Коэффициент наращенения или множитель наращенения K , – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга

$$K = S / P$$



Способы начисления процентных ставок

- **Простые** ставки процентов применяются к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды;
- **Сложные** ставки процентов применяются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.
- Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть:
- **Постоянными** – их величина не изменяется с течением времени;
- **Переменными («плавающими»)** – значение ставки может быть равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней (*маржи*).

1. Простые проценты

- Пусть : P - первоначальная сумма денег, ден. ед., i - ставка простых процентов, в % или долях.

- **Схема начисления простых % :**

- $$S = P + Pi + Pi + Pi + \dots + Pi$$

- S определяется по формуле простых процентов

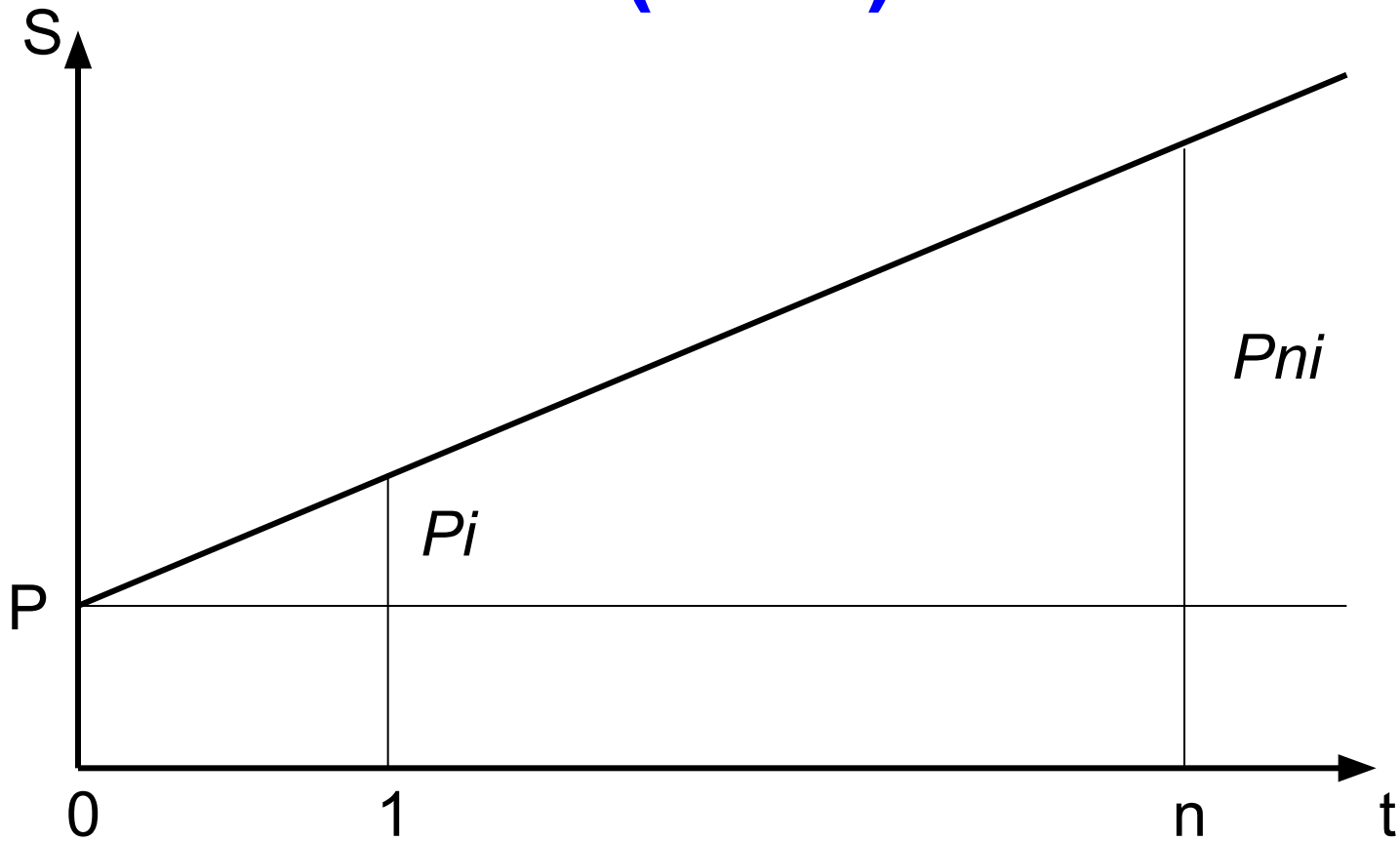
- $$S = P * (1 + n * i) = P + I \quad (1.1)$$

- $$I = P * n * i \quad (1.2)$$

- где $K_{n,i} = S/P = (1 + n i)$ - множитель наращения;
- I – проценты (процентные деньги)

Простые проценты

$$S = P(1 + ni)$$



Пример 1.1. Ссуда размером $P=100\ 000$ руб. выдана на срок $n=1,5$ года при ставке простых процентов равной $i=15\%$ годовых. Определить I - проценты и S -сумму накопленного долга

- Для расчета процентов I за пользование ссудой в течение 1,5 лет воспользуемся формулой (1.2):
- $I = P \cdot n \cdot i = 100\ 000 \cdot 1,5 \cdot 0,15 = 22\ 500$ руб.
- По формуле (1.1), находим сумму накопленного долга S по истечении 1,5 лет:
- $S = P + I = 100\ 000 + 22\ 500 = 122\ 500$ руб.

Практика начисления простых процентов

- Ставка процентов обычно
устанавливается в расчете за год!!!
- При продолжительности ссуды менее года, величину n выражают в виде дроби:
- $$n = t / T \quad (1.3)$$
где n - срок ссуды (измеренный в долях года), t - срок операции (срок пользования ссудой) в днях, T - число дней в году (временная база).

Практика начисления простых процентов

• В практике используются три варианта расчета :

• а) точные проценты (“английская практика расчета“):

$$n = t_T / T_T \quad (1.3.1)$$

• где t_T - точное число дней ссуды и $T_T = 365$ или 366 дней.

• б) обыкновенные (коммерческие) проценты (“французская практика расчета“):

$$n = t_T / T_o \quad (1.3.2)$$

• где $T_o = 360$ дней

• в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (“германская практика расчета“),

$$n = t_o / T_o \quad (1.3.3)$$

• где t_o - продолжительность ссуды определяется числом месяцев, когда все месяцы содержат по 30 дней, и дней ссуды.)

• Замечание. При расчетах дата выдачи и дата погашения долга считается **за один день**. Вариант расчета с приближенным измерением времени ссуды и точной временной базы **не применяется**.

Пример: 1.2. Ссуда, размером 100 000 руб., выдана на срок с 21 января 2009 г. до 3 марта 2009 г. при ставке простых процентов, равной 15% годовых. Найти: а) **точные проценты** с точным числом дней ссуды; б) **обыкновенные проценты** с точным числом дней ссуды; в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

- **Решение.**

- Для вычисления воспользуемся формулами:

$$I = P n i = P (t / T) i; \quad n = t / T$$

- а) $T = 365, t = 41, \quad I_a = 100\,000 * 41 / 365 * 0,15 = 1\,684,93$ руб.

- б) $T = 360, t = 41, \quad I_b = 100\,000 * 41 / 360 * 0,15 = 1\,708,33$ руб.

- в) $T = 360, t = 42, \quad I_v = 100\,000 * 42 / 360 * 0,15 = 1\,750,00$ руб.



Н А С Т О Я Щ Е Е
Исходная сумма (P)
Ставка процентов (i)



Б У Д У Щ Е Е ...
Возвращаемая сумма (S)



Приведенная сумма (P)

Ожидаемая к поступлению
сумма (S)
Учетная ставка (d)

Дисконтирование и учет по простым ставкам

- В практике финансовых вычислений часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S , соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму P .
- Расчет P по **ИЗВЕСТНОМУ ЗНАЧЕНИЮ S** называется дисконтированием суммы S .
- Величину P , найденную дисконтированием, называют современной величиной (текущей стоимостью) суммы S .
- Проценты в виде разности $D = S - P$ называются дисконтом или скидкой.
- В финансовых вычислениях используется два вида дисконтирования:
 - **математическое дисконтирование;**
 - **банковский (коммерческий) учет.**

Математическое дисконтирование

- **Математическое дисконтирование.** решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды.
- Если в прямой задаче рассчитывается наращенная сумма $S = P(1 + n*i)$, то в обратной находится

- $$P = S * 1 / (1 + n*i) \quad (1.5)$$

- **Дисконт суммы S** равен

- $$D = S - P \quad (1.6)$$

Пример 1.4. Через 90 дней после подписания договора должник уплатит 1 000 000 руб. Кредит выдан под 20% годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?

- Дано: $S = 1\,000\,000$ руб., $n = t/K = 90/360$, $i = 0,20$ или 20%. Найти $P = ?$
- **Решение:** Воспользуемся формулами (1.5) и (1.6):
- $P = S / (1 + n*i) = 1\,000\,000 / (1 + 0,20*90/360) = 952\,380,95$ руб.
- $D = S - P = 1\,000\,000 - 952\,380,95 = 47\,619,05$ руб.

Банковский или коммерческий учет (учет векселя)

- **Банковский или коммерческий учет** (учет векселя) заключается в том, что банк до наступления срока -**n** платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене -**P** ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока-**S**, то есть приобретает (учитывает) его с дисконтом-**D**. Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка**, которая обозначена символом **d**.
- Простая годовая **учетная ставка** рассчитывается по формуле:

$$d = (S - P) / S * n \quad (1.7)$$

Банковский или коммерческий учет

- Размер дисконта, удерживаемого банком, равен

-

- $$D = S * n * d = S * (t / T) * d, \quad (1.8)$$

- откуда

- $$P = S - D = S * (1 - (t / T) * d) \quad (1.9)$$

- **Замечание :**

- **1) n - измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах.**
- **2) Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.**

Пример 1.5. Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 рублей. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по учетной ставке 20% годовых (год равен 360 дням). Определить дисконт D и полученную предприятием сумму P .

- Дано: $S = 1\,000\,000$ руб., $t = 90$ дней, $d = 0,20$ или 20%. Найти $D = ?$, $P = ?$
- Решение.
- Для вычисления дисконта воспользуемся формулой (1.8)
- $D = S * (t / T) * d = 1\,000\,000 * (90/360) * 0,20 = 50\,000$ руб.
- По формуле (1.9) рассчитаем сумму, которую предприятие получит в результате учета векселя:
- $P = S - D = 1\,000\,000 - 50\,000 = 950\,000$ руб.

2. Сложные проценты

- Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях (сроком более 1 года), если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга.
- Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называют капитализацией процентов.

2.1. *Наращение по сложным процентам с постоянной ставкой*

- Пусть первоначальная сумма долга равна P , тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит $S_1 = P(1+i)$, через 2 года: $S_2 = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2, \dots$ через n лет:
- **Схема начисления:** $\{P + Pi\} + \{P(1+i) + P(1+i)i\} + \{P(1+i)^2 + P(1+i)^2i\} + \dots =$
-

Формула наращенния для сложных процентов

-

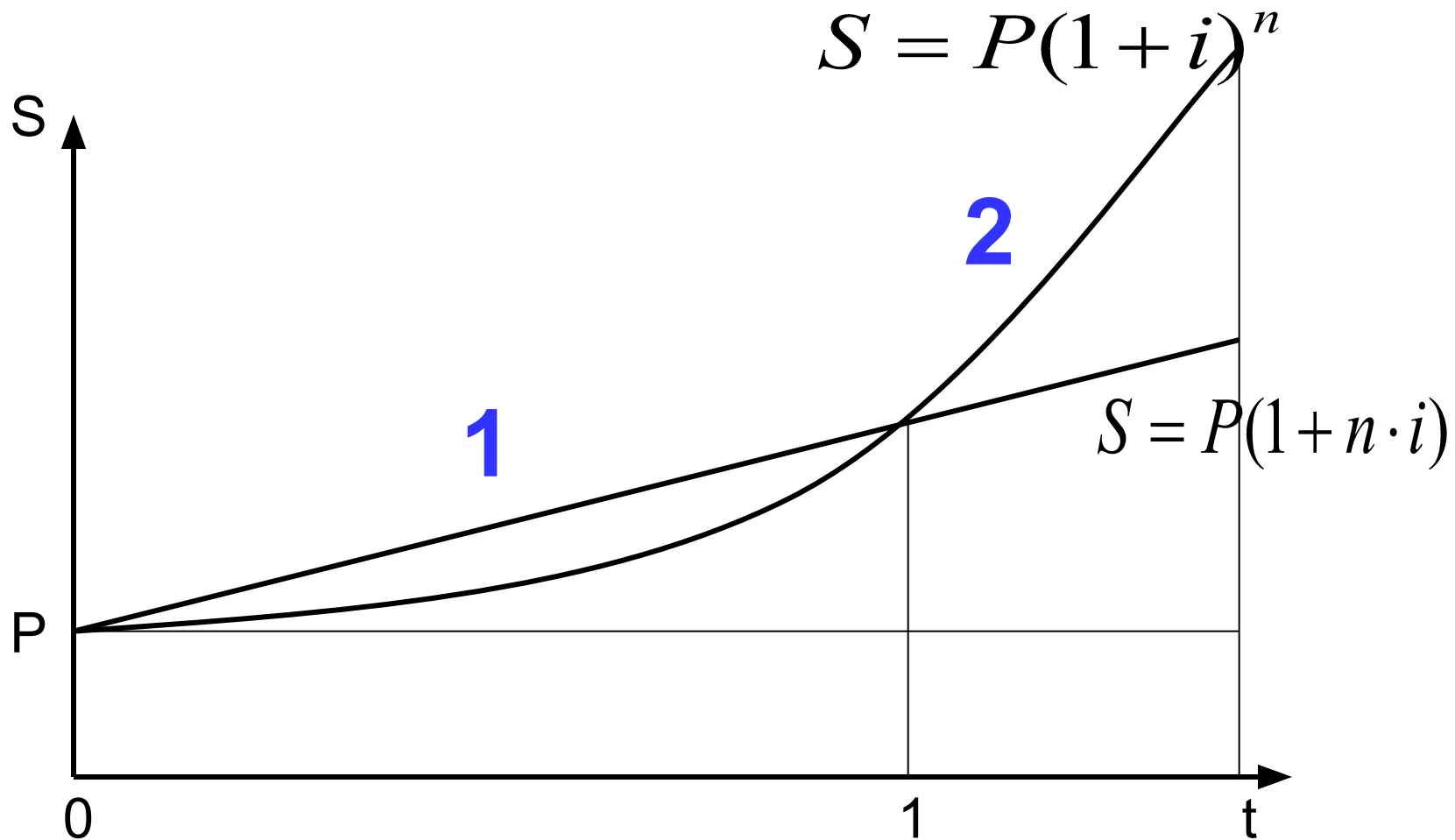
- $$S = P \cdot (1 + i)^n, \quad (2.1)$$

- где S – наращенная сумма, i – годовая ставка сложных процентов, n – срок ссуды, $K_p = (1 + i)^n$ – множитель наращенния.

-

Замечание.

- На практике обычно используют дискретные проценты (проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени: год, полугодие, квартал).



Зависимость S от времени- n : 1-простые % и 2-сложные %.

Пример 2.1. В кредитном договоре на сумму 1 000 000 руб. и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20% годовых. Определить наращенную сумму по истечении указанного срока.

- Дано: $P = 1\,000\,000$ руб., $n = 4$ года, $i = 0,20$ или 20%. Найти $S = ?$

Решение.

- Используя формулу(2.1) получим:
- $S = P (1 + i)^n = 1\,000\,000 * (1 + 0,20)^4 = 2\,073\,600$ руб.

2.2. *Наращение по сложным процентам при изменении ставки во времени*

Если ставка сложных процентов меняется во времени, то формула наращенения имеет вид:

$$S = P \cdot (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_m)^{n_m} = P \cdot \prod_{k=1}^m (1 + i_k)^{n_k} \quad (2.2)$$

где i_1, i_2, \dots, i_k - значения ставок процентов, действующих в соответствующие периоды времени n_1, n_2, \dots, n_k , $\prod_{k=1}^m (1 + i_k)^{n_k}$ - множитель наращенения.

Номинальная ставка процентов

Пусть **годовая ставка сложных процентов** равна j , а **число периодов начисления в году** m . При каждом начислении проценты капитализируются, то есть добавляются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. Каждый раз проценты начисляются по ставке j/m .

Ставка j - называется **номинальной**.

Начисление процентов по номинальной ставке
производится по формуле:

$$S = P * (1 + j/m)^N, \quad (2.3)$$

где N - число периодов начисления ($N = m * n$, может быть и дробным числом).

Пример 2.3. Ссуда 20 000 000 руб. предоставлена на **28 месяцев** под сложные проценты 18% годовых. Проценты начисляются **ежеквартально**. Вычислить наращенную сумму по истечении срока.

- Дано: $P = 20\,000\,000$ руб., $j = 0,18$ (18%) ,
- $n = 28$ месяцев = $28/12$ лет, $m = 4$. Найти $S = ?$

Решение.

- **Всего за n лет имеем $N = m * n = 4 * (28/12) = 28/3$ периодов начислений при ежеквартальном ($m = 4$) начислении процентов в году.**
- **Далее по формуле (2.3) находим: $S = 20\,000\,000 * (1 + 0,18 / 4)^{(28/3)} = 30\,161\,206,25$ руб.**

Эффективная ставка

- **Эффективная ставка** показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке j/m .

- Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m , то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1 + i_{\text{э}})^n = (1 + j/m)^{m \cdot n} \quad (2.4)$$

- где $i_{\text{э}}$, j - эффективная и номинальная ставки.
- **Зависимость эффективной от номинальной ставки** выражается соотношением $i_{\text{э}} =$

$$(1 + j/m)^m - 1 \quad (2.5)$$

- **Зависимость номинальной от эффективной ставки** выражена следующей формулой:

$$j = m [(1 + i_{\text{э}})^{1/m} - 1] \quad (2.6)$$

Пример 2.4. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально – $m=4$, исходя из номинальной ставки $j=0,16$ или 16% годовых.

Решение

Вычисления проводим по формуле (2.5) и находим

$$i_{\text{э}} = (1 + 0,16 / 4)^4 - 1 = 0,170, \text{ или } 17,0\%.$$

Пример 2.5. Определить, какой должна быть номинальная ставка- $j=?$ при ежеквартальном начислении процентов- $m=4$, чтобы обеспечить эффективную ставку $i_{\text{э}}= 12\%$ годовых.

Решение.

Вычисления произведем по формуле (2.6):

$$j = m [(1 + i_{\text{э}})^{1/m} - 1] = 4 * [(1 + 0,12)^{(1/4)} - 1] = 0,11495, \text{ т.е. } 11,495\%.$$

Дисконтирование по сложной ставке %

- **Определение.** Величина P полученная дисконтированием S , называется **современной (текущей) стоимостью**, или **приведенной величиной S** .

- $$P = S * 1 / (1 + i)^n \quad (2.7)$$

- При начислении процентов m раз в году :

- $$P = S / (1 + j / m)^{n * m} \quad (2.8)$$

- $$D = S - P - \text{дисконт}$$

Пример 2.5. Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма 1 000 000 руб. Определить его современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов в 14% годовых.

• Дано: $n = 5$ лет, $S = 1\,000\,000$ руб., $i = 0,14$ или 14%.

• Найти $P = ?$

Решение.

• Вычисления выполним по формуле :

• $P = S / (1 + i)^n = 1\,000\,000 / (1 + 0,14)^5 = 519\,368,66$ руб.

Банковский учет.

- Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

- $$P = S(1 - d_{сл})^n \quad (2.9)$$

- где $d_{сл}$ - сложная годовая учетная ставка.

- ДИСКОНТ :

- $$D = S - P = S[1 - (1 - d_{сл})^n] \quad (2.10)$$

Пример 2.6. Через 5 лет по векселю должна быть выплачена сумма 1 000 000 руб. Банк учел вексель по сложной учетной ставке в 10% годовых. Определить сумму, которую получит векселедержатель и дисконт, который получит банк по истечении срока векселя.

- Дано: $n = 5$ лет, $S = 1\,000\,000$ руб., $d_{сл} = 0,10$ или 10%. Найти $P = ?$, $D = ?$
- **Решение.**
- Расчет суммы, которую получит векселедержатель, выполним по формуле (2.9):
- $P = S(1 - d_{сл})^n = 1\,000\,000 * (1 - 0,10)^5 = 590\,490,00$ руб.
- Расчет дисконта, который получит банк, выполним по формуле (2.10):
- $D = S - P = 1\,000\,000 - 590\,490 = 409\,510,00$ руб.

Непрерывное начисление процентов

- *Непрерывное начисление процентов используется при анализе сложных финансовых задач, например, обоснование и выбор инвестиционных решений. Оценивая работу финансового учреждения, где платежи за период поступают многократно, целесообразно предполагать, что наращенная сумма непрерывно меняется во времени и применять*
- ***формулу для непрерывного начисления процентов***
- **$S = P \cdot \exp^{j \cdot n} = P \cdot \exp^{\delta \cdot n}$, (2.11)**
- *где $\delta=j$ – сила роста*

Пример . Кредит в размере на 100 тыс. долларов получен сроком на 3 года под 8% годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться: а) один раз в год; б) ежедневно; в) непрерывно.

- Решение

- а) начисление один раз в год:

- $S = 100'000 \cdot (1 + 0,08)^3 = 125'971,2$ дол.;

- б) ежедневное начисление процентов:

- $S = 100'000 \cdot (1 + 0,08 / 365)^{365 \cdot 3} = 127'121,6$ дол.;

- в) непрерывное начисление процентов:

- $S = 100'000 \cdot \exp^{0,08 \cdot 3} = 127'124,9$ долларов.

ДОХОДНОСТЬ

- *Доходность* — это относительный показатель, который говорит о том, какой процент приносит рубль инвестированных средств за определенный период.
- В финансовой практике принято, что показатель доходности или процент на инвестиции обычно задают или определяют в расчетах на год, если специально не сказано о другом временном периоде. Поэтому, если говорится, что некоторая ценная бумага приносит 20%, то это следует понимать, как 20% годовых.

Доходность за период

- Доходность за период — это доходность, которую инвестор получит за определенный период времени.

$$r = \frac{P_n}{P} - 1$$

где: r — доходность за период;

P — первоначально инвестированные средства;

P_n — сумма, полученная через n лет.

Доходность в расчете на год

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P}} - 1$$

где: r — доходность в расчете на год;

n — число лет.

- Если сложный процент начисляется m раз в год, то доходность за год определяется на формуле:

$$r = m \sqrt[mn]{\frac{P_n}{P}} - 1$$

Процентные ставки и инфляция

Номинальная процентная ставка — это процентная ставка без учета инфляции. В качестве номинальных выступают процентные ставки банковских учреждений. Номинальная ставка говорит об абсолютном увеличении денежных средств инвестора.

Реальная процентная ставка — это ставка, скорректированная на процент инфляции. Реальная ставка говорит о приросте покупательной способности средств инвестора.

$$1 + \text{номинальная ставка} = (1 + \text{реальная ставка}) \cdot \frac{\text{уровень цен в конце рассматриваемого периода}}{\text{уровень цен в начале рассматриваемого периода}}$$

$$1 + r = (1 + y)(1 + i)$$

$$1 + r = (1 + y)(1 + i)$$

где: r — номинальная ставка процента;
 y — реальная ставка процента;
 i — темп инфляции.

Выполнив преобразование получим

$$y = \frac{1 + r}{1 + i} - 1$$

Если $y \ll 1$, то

$$y = r - i$$