

Методы вычислений в экономическом моделировании

Авторы: Коврижных А.Ю., Конончук Е.А., Лузина Г.Е.

Кафедра вычислительной математики ГОУ ВПО УрГУ

2007



Методы вычислений в экономическом моделировании

Использование математических методов в экономике восходит к работам Ф. Кенэ («Экономическая таблица»), А. Смита (классическая макроэкономическая модель), Д.Риккардо (модель международной торговли). Моделированию рыночной экономики посвящены работы Л.Вальраса, О.Курно, В.Парето. С применением математических методов связаны работы В.В. Леонтьева, Р.Солоу, П.Самуэльсона, Д.Хикса, В.С Немчинова, В.В Новожилова, Л.В. Канторовича и многих других выдающихся ученых. Примерами экономических моделей являются модели фирмы, модели экономического роста, модели потребительского выбора, модели равновесия на финансовых и товарных рынках.

Построение экономической модели требует выполнения ряда шагов. Сначала формулируется предмет и цель исследования. Затем экономисты выявляют структурные и функциональные элементы модели, взаимосвязи между ними, существенные факторы, отвечающие цели исследования и отбрасывают то, что несущественно для решения задачи. На заключительном этапе проводятся расчеты по математической модели и анализ полученного решения. Именно на завершающем этапе применяются численные методы.

В данном разделе на материале ряда экономических моделей иллюстрируется применение методов численного решения нелинейных уравнений В данном разделе на материале ряда экономических моделей иллюстрируется применение методов численного решения нелинейных уравнений, систем алгебраических уравнений В данном разделе на материале ряда экономических моделей иллюстрируется применение методов численного решения нелинейных уравнений, систем алгебраических уравнений, численного решения нелинейных уравнений В данном разделе на материале ряда экономических моделей иллюстрируется применение методов численного решения нелинейных уравнений, систем

Статические балансовые модели

Системы линейных алгебраических уравнений применяются в макроэкономике для проведения балансового анализа многоотраслевого хозяйства.

Цель балансового анализа — ответить на вопрос, каким должен быть объем производства каждой из отраслей хозяйства, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли? Предполагается, что каждая отрасль выступает одновременно как производитель некоторого вида продукции и как потребитель продукции других (в том числе своей) отраслей.

Процесс производства рассматривается за некоторый период времени, например, за год.



Статические балансовые модели

Примем следующие обозначения:

x_i — общий объем продукции i – й отрасли (или её валовой объем), $i=1,2,\dots,n$;

— объем продукции i – й отрасли, потребляемый j – й отраслью в процессе производства, $i,j=1,2,\dots,n$;

x_{ij} — объем продукции i – й отрасли, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере (объём конечного потребления).

y_i

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, \dots, n$$



Статические балансовые модели

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x = Ax + y$$



Статические балансовые модели

$$(E - A)x = y$$

$$x = (E - A)^{-1}y$$

$$A \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x \geq 0$$

$$E + A + A^2 + \dots \quad \text{сходится к матрице} \quad (E - A)^{-1}$$

$$(A^2)_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj} \leq q^2 \quad q < 1$$

$$(A^3)_{ij} \leq q^3$$

Матрица A продуктивна.



Некоторые модели экономической динамики

- Паутинообразная модель рынка
- Дифференциальные уравнения в экономической динамике. Модель экономического роста.

Динамические модели характеризуют изменение экономических процессов во времени. Моделирование может осуществляться с использованием дискретного и непрерывного подхода. В настоящем разделе даются два примера такого моделирования. Эти примеры являются абстрактными. Однако в рассматриваемых случаях их решение может быть найдено в явном виде, что позволяет проанализировать особенности поведения решения для различных случаев соотношения параметров моделирования.

Паутинообразная модель рынка

$$q_t^s = s_t(p_{t-1}), \quad q_t^d = d_t(p_t), \quad q_t^d = q_t^s,$$

$$d_t(p_t) = s_t(p_{t-1})$$

Пусть заданы

$$s(p) = \psi(p)$$

$$d(p) = c - ep$$



Паутинообразная модель рынка

$$p_0 = d^{-1}(q_0) = \frac{c - q_0}{e},$$

$$q_1 = s(p_0) = \psi(p_0) = \psi(d^{-1}(q_0)) = \psi\left(\frac{c - q_0}{e}\right),$$

$$p_1 = d^{-1}(q_1) = \frac{c - q_1}{e} = \frac{c - \psi\left(\frac{c - q_0}{e}\right)}{e},$$



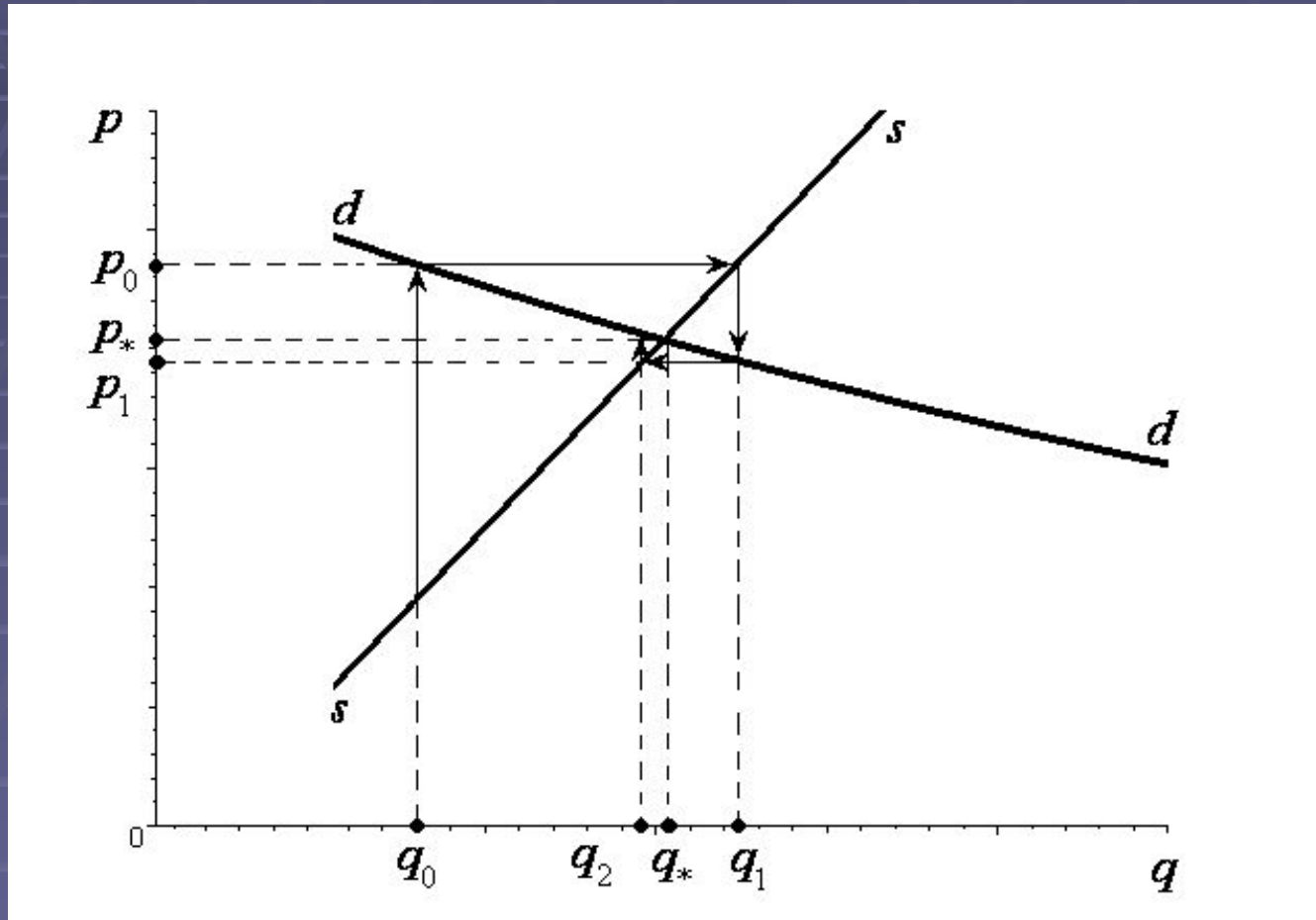
Паутинообразная модель рынка

$$q_2 = s(p_1) = \psi \left(\frac{c - \psi \left(\frac{c - q_0}{e} \right)}{e} \right),$$

$$p_2 = d^{-1}(q_2) = \frac{c - q_2}{e} = \frac{c - \psi \left(\frac{c - \psi \left(\frac{c - q_0}{e} \right)}{e} \right)}{e},$$



Паутинообразная модель рынка



Дифференциальные уравнения в экономической динамике

Модель экономического роста

$$X(t) = px(t)$$

$$x'(t) = sI(t)$$

$$I(t) = mX(t) = mpx(t)$$

$$x'(t) = kx(t), \quad k = smp$$



Дифференциальные уравнения в экономической динамике

$$x' = sm p(x)x, \quad x > 0, \quad p(x) > 0$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{p(x)x} = sm(t - t_0)$$
$$x'' = smx' \left(\frac{dp}{dx} x + p(x) \right)$$



Дифференциальные уравнения в экономической динамике

$$E_p(x) = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

$$x'' = smx'p \left(\frac{1}{E_p(x)} + 1 \right)$$

$$|E_p(x)| > 1$$

$$x'' > 0$$

спрос эластичен

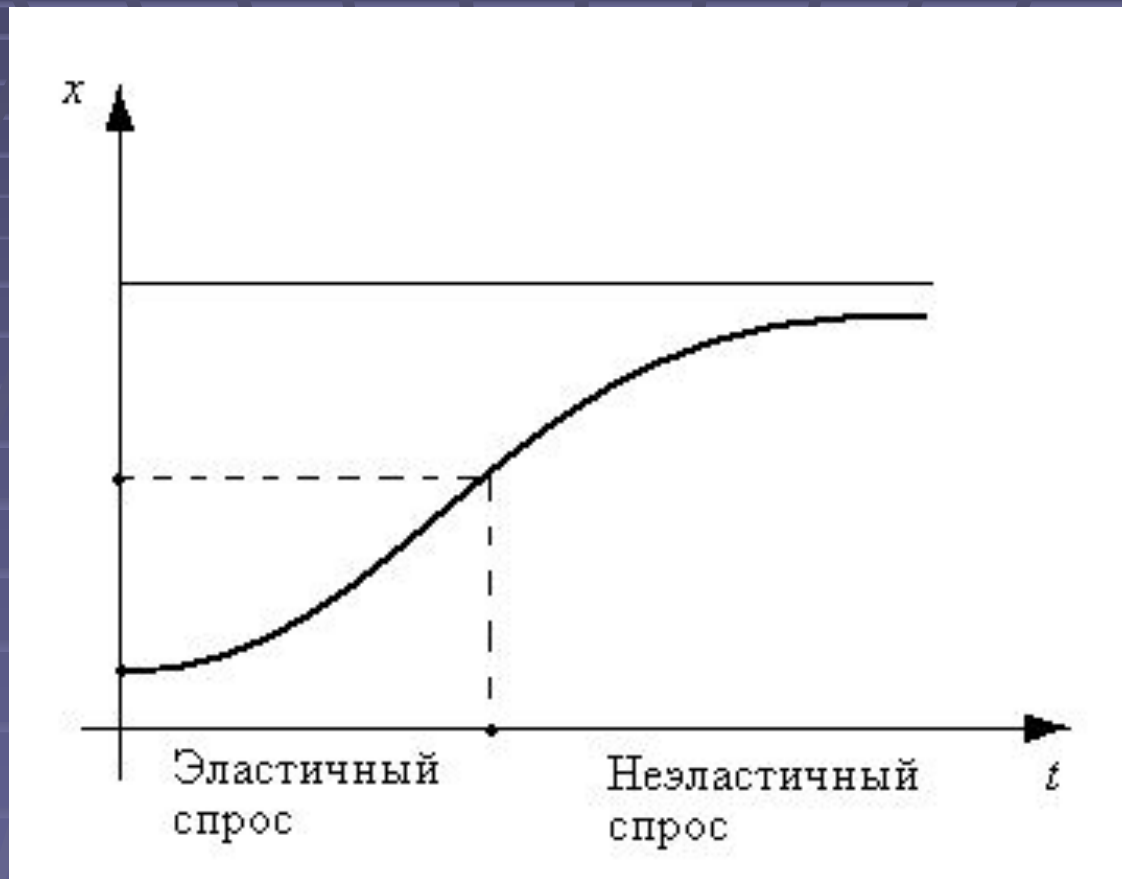
$$|E_p(x)| < 1$$

$$x'' < 0$$

спрос не эластичен



Дифференциальные уравнения в экономической динамике



Методы вычислений в финансовых расчетах

Рассмотрим ряд примеров из финансовой математики, где требуется применение методов вычислений.

- ✓ Определение уровня процентной ставки.
- ✓ Вычисление наращенных сумм на основе непрерывных процентных ставок



Определение уровня процентной ставки.

Пусть в течение n лет фирма перечисляет в банк p раз в году средства в размере R/p денежных единиц (R — величина суммарного годового платежа) с целью создания фонда накопления. Банк начисляет проценты на данные взносы t раз в году по сложной процентной ставке j . Определим наращенную сумму (величину фонда накопления) такого потока платежей на момент окончания выплат.



Определение уровня процентной ставки.

$$S = \frac{R}{p} + \frac{R}{p} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot \frac{1}{p}} + \frac{R}{p} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot \frac{2}{p}} + \dots + \frac{R}{p} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot \frac{np-1}{p}}$$

$$S = x_1 \cdot \frac{1 - q^{np}}{1 - q} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \right]^{np}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$$



Определение уровня процентной ставки.

$$\Phi(S, R, p, m, n, j) = 0$$

$$\Phi(S, R, p, m, n, j) = S - \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$$



Вычисление наращенных сумм на основе непрерывных процентных ставок

Силой роста называется специальная процентная ставка, характеризующая относительный прирост наращенной суммы.

Согласно данному определению на бесконечно малом промежутке имеем

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}$$

$$S = S(n) = S(0) \exp \left(\int_0^n f(t) dt \right)$$



Далее изложен необходимый минимум теоретического материала по курсу «Численные методы» и рассмотрено достаточное количество примеров, что поможет студентам в самостоятельной работе по освоению данного курса и будет полезно при выполнении лабораторных работ.



Численные методы

- Погрешность результата численного решения задачи.
- Основные этапы решения задачи с помощью компьютера.
- Характеристика погрешности
- Приближенные методы решения нелинейных уравнений
- Решение задач линейной алгебры
- Интерполяция
- Численное интегрирование
- Численное решение задачи Коши
- Метод наименьших квадратов
- Литература



Погрешность результата численного решения задачи.

Погрешность решения задачи обуславливается следующими причинами: математическая модель дает приближенное описание задачи; неточно заданы исходные данные: получение точного результата невозможно, т.к. оно требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, и поэтому приходится прибегать к приближенному методу; при вводе данных в машину, при выполнении арифметических операций и при выводе данных производятся округления.

Погрешности, соответствующие этим причинам, называют:

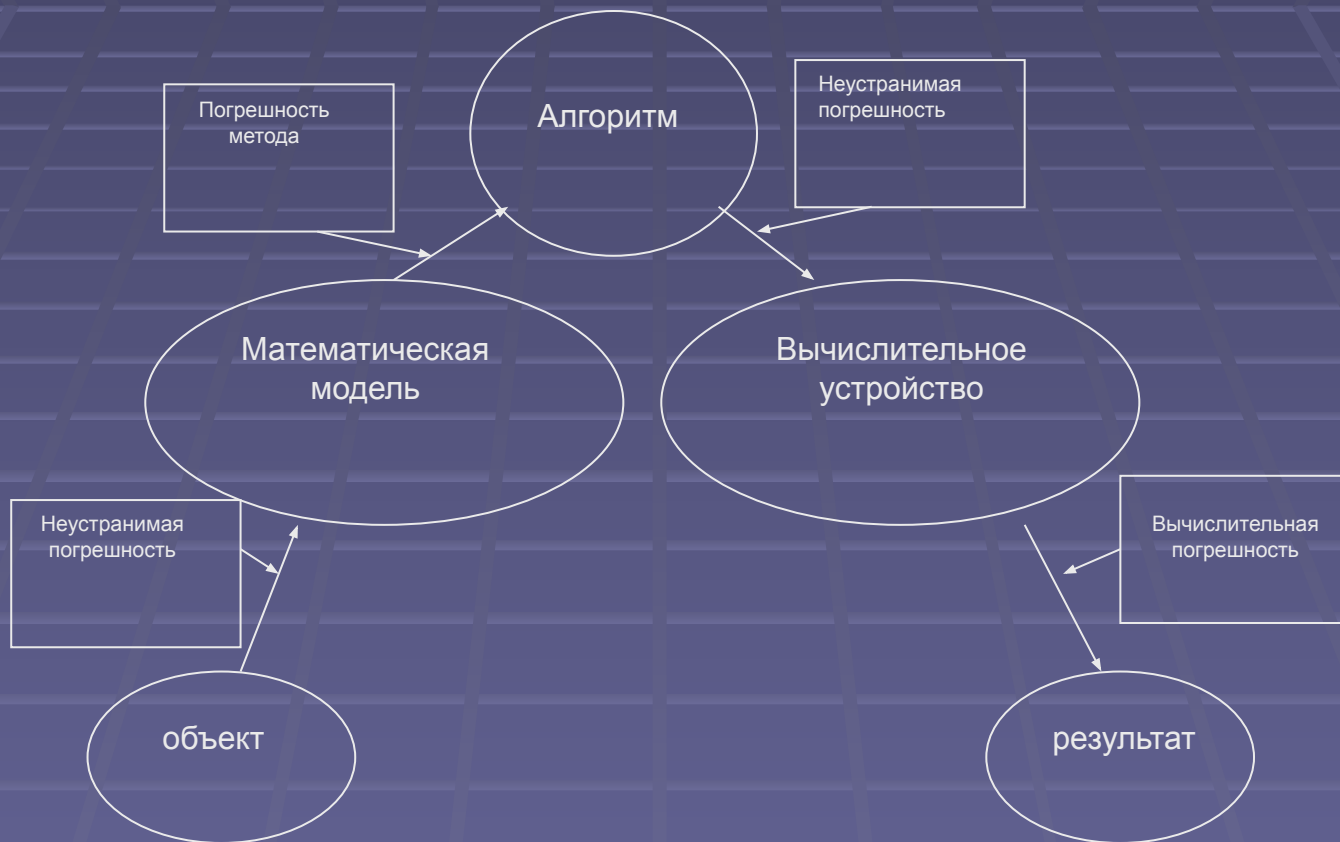
- неустранимой погрешностью;
- погрешностью метода;
- вычислительной погрешностью.

Таким образом, полная погрешность результата решения задачи складывается из неустранимой погрешности, погрешности метода и вычислительной погрешности.

Процесс решения задачи с помощью вычислительной техники можно разделить на несколько этапов. Схематично это выглядит так:



Этапы решения задачи



Задача определения равновесной цены

Для иллюстрации процесса возникновения погрешности рассмотрим задачу определения равновесной цены некоторого товара.

Пусть спрос задается некоторой функцией :

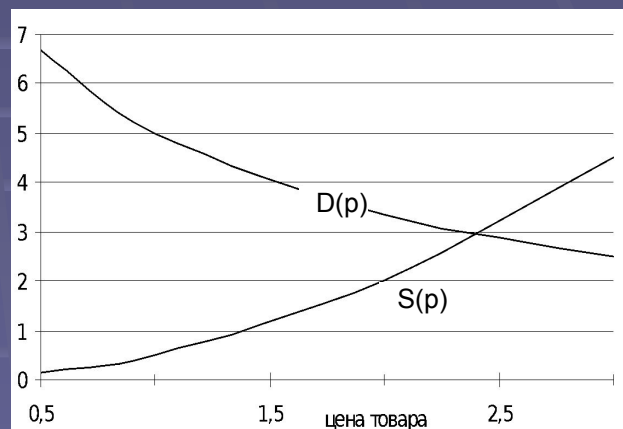
$$D(p) = \frac{10}{p+1}$$

а предложение – функцией:

$$S(p) = \frac{p^2}{2}$$

Здесь равновесная цена – это решение нелинейного уравнения, которое находим приближенно. Графически решение – абсцисса точки пересечения графиков функций $D(p)$ и $S(p)$

Естественно, эти функции описывают процесс ценообразования лишь приближенно, коэффициенты тоже даны с некоторой точностью. Следствие этого – *неустраняемая погрешность* результата решения задачи.



Последовательность приближений можно строить методом простой итерации:

$$p_i = \sqrt{\frac{20}{p_{i-1} + 1}}$$

где i – номер приближения. Если $p_0 = 1$, то $p_1 = 3,162278$; $p_2 = 2,192045$; $p_3 = 2,503113$; $p_4 = 2,389395$; . . . $p_{14} = 2,418709$; $p_{15} = 2,418711$; $p_{16} = 2,418710$; и т.д. (значения округлены до 6 знаков после запятой).

Если процесс закончился вычислением p_n , то *погрешность метода* оценивается как $|p_n - p^*|$, кроме того, при выполнении действий над вещественными числами (деление, извлечение корня) возникает *вычислительная погрешность*. Таким образом, погрешность решения второй задачи будет включать в себя все 3 вида погрешностей (неустранимую, метода и вычислительную).



Абсолютная и относительная погрешности.

Пусть x^* - приближенное значение x .

Абсолютной погрешностью приближения называется величина $A(x^*)$, для которой справедливо неравенство: $|x - x^*| \leq A(x^*)$

Величина $\Delta(x^*)$, удовлетворяющая неравенству $|x - x^*| / |x^*| \leq \Delta(x^*)$ называется **относительной погрешностью** x^* .

Абсолютная погрешность зависит от выбора системы единиц измерения x^* .
Относительная погрешность – величина безразмерная, иногда вычисляется в процентах.

Абсолютная и относительная погрешности связаны соотношением: $A(x^*) = |x^*| \Delta(x^*)$.

Значащими цифрами в записи числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой.

Значащая цифра называется **верной**, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре. Остальные цифры называются сомнительными.

Таким образом, в числе

$x^* = a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \dots + a_m 10^{n-m+1}$ цифра a_k считается верной, если $A(x^*) \leq 0,5 \cdot 10^{n-k+1}$.

Количеством верных цифр после запятой называется количество цифр в числе после запятой до первой сомнительной.



Приближенные методы решения нелинейных уравнений

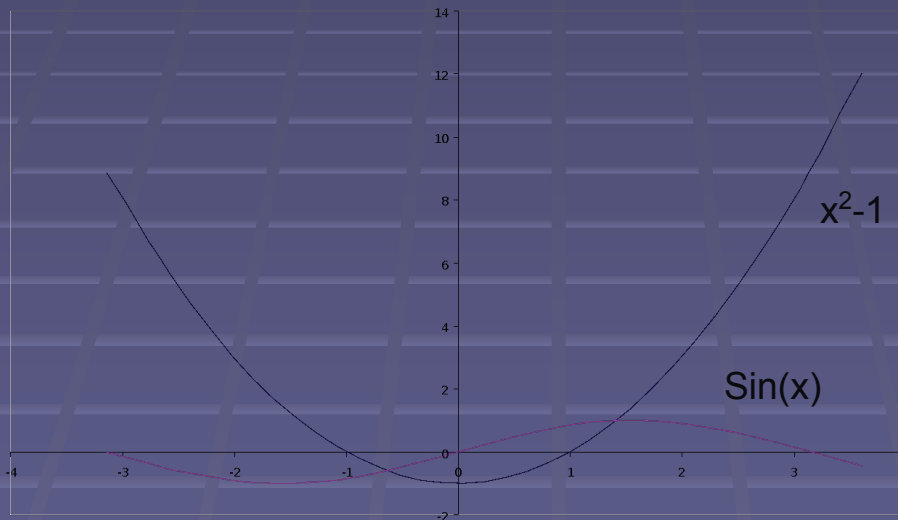
- ✓ Отделение корней
- ✓ Метод дихотомии
- ✓ Метод простой итерации
- ✓ Метод Ньютона
- ✓ Метод хорд



Отделение корней.

Рассмотрим уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$. Заменяем уравнение эквивалентным ему уравнением $x^2 - 1 = \sin x$.

Изобразим примерно графики левой и правой частей на $(-\pi, \pi)$.



Видно, что уравнение имеет два корня: на $(-1, 0)$ и на $(1, 2)$. Приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассмотрим наиболее эффективные из них.

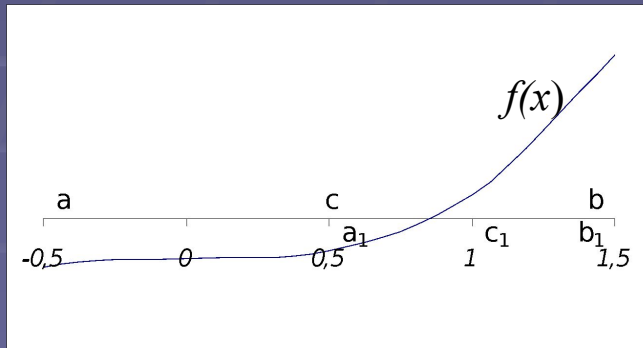


Метод дихотомии

Пусть мы нашли такие точки a и b , что на отрезке $[a, b]$ лежит единственный корень уравнения. Найдем середину отрезка $c = (a+b)/2$ и вычислим $f(c)$. Из двух половин отрезка выберем ту, на концах которой функция имеет разные знаки, тогда корень лежит на этой половине. Затем новый отрезок опять делим пополам и т.д.

Если требуется найти корень с точностью ε , то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε . Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью. Дихотомия проста и очень надежна: к простому корню она сходится для любых непрерывных функций $f(x)$; при этом она устойчива к ошибкам округления. Скорость сходимости невелика: за k итераций длина отрезка уменьшится в 2^k раза (уточнение трех цифр требует 10 итераций). Погрешность метода на шаге k оценивается следующим образом:

где ξ - точное решение уравнения, x_k — значение одного из концов отрезка на шаге k . Дихотомия применяется тогда, когда требуется высокая надежность счета, а скорость сходимости малосущественна



Метод простой итерации

Заменяем уравнение $f(x) = 0$ эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$,

где $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция. Это можно сделать многими способами, например, положив $\varphi(x) \equiv x + \psi(x)f(x)$, где $\psi(x)$ — произвольная непрерывная знакопостоянная функция. Выберем некоторое нулевое приближение x_0 и вычислим дальнейшие приближения по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Исследуем условия сходимости. Если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, то:

$$x_{n+1} - \xi = \varphi(x_n) - \varphi(\xi) = (x_n - \xi)\varphi'(\theta),$$

где точка θ лежит между точками x_n и ξ . Поэтому, если всюду $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, то значения $|x_n - \xi|$ убывают не медленней членов геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, и последовательность x_n сходится при любом нулевом приближении. Если $|\varphi'(\xi)| > 1$, то, в силу непрерывности, $|\varphi'(x)|$ больше единицы и в некоторой окрестности корня; в этом случае итерации не могут сходиться. Если $|\varphi'(\xi)| < 1$, но вдали от корня $|\varphi'(x)| > 1$, то итерации сходятся, если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню; при произвольном нулевом приближении сходимости может не быть. Очевидно, что чем меньше q , тем быстрее сходимость.

Погрешность метода можно оценить соотношением: $|x_k - \xi| \leq q^k |x_0 - \xi|$

где ξ — точное решение уравнения, x_k — значение итерации на шаге k . Тогда количество итераций, необходимых для достижения точности ε , можно определить из неравенства: $q^k |x_0 - \xi| < \varepsilon$.



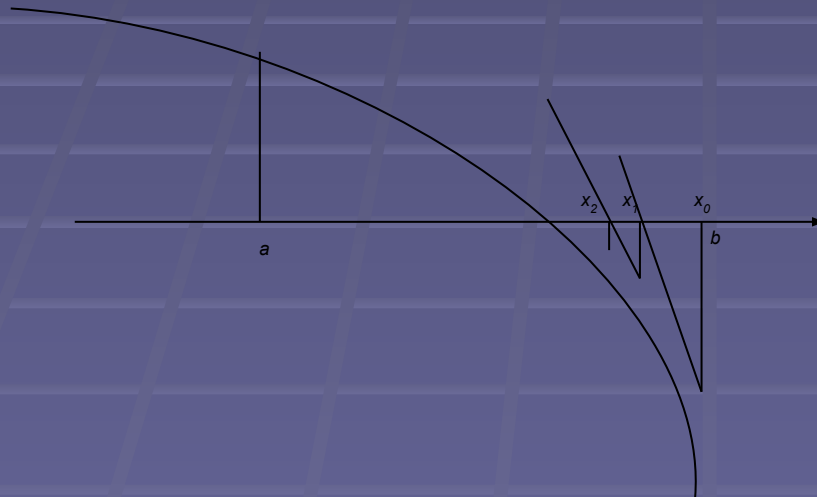
Метод Ньютона

Пусть на $[a, b]$ существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$, $f(x)$ – функция непрерывная вместе с первой производной на $[a, b]$. Заменим $f(x)$ линейной функцией $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ – выражением для касательной в точке x_n , принадлежащей отрезку $[a, b]$. Тогда точка пересечения графика этой функции с осью ОХ (решение уравнения $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$) – очередное приближение к решению уравнения по методу Ньютона.

Отсюда,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Геометрическая интерпретация метода Ньютона представлена ниже.



Теорема (о достаточных условиях сходимости метода Ньютона).

Пусть выполняются следующие условия:

1. Функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$;
2. Отрезку $[a, b]$ принадлежит только один простой корень ($f(a) \cdot f(b) < 0$)
3. Производные $f'(x), f''(x)$ сохраняют знак на $[a, b]$ и $f'(x)$ не обращается в 0;
4. Начальное приближение x_0 удовлетворяет неравенству $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$.

Тогда последовательность $\{x_n\}$ монотонно сходится к корню уравнения $f(x) = 0$.

Скорость сходимости метода Ньютона квадратичная: $|x_{k+1} - \xi| \leq C \cdot |x_k - \xi|^2$, где

$$C = \max_{x \in [a, b]} \left\{ \left| \frac{f''(x)}{2f'(x)^2} \right| \right\}$$



Оценка погрешности

При решении уравнения $f(x) = 0$ приближенным методом можно оценить погрешность следующим образом:

пусть $|f'(x)| \geq m$ на $[a, b]$, это справедливо, т.к. $f'(x) \neq 0$ и она непрерывна на $[a, b]$.

Из $|f(x_n) - f(\xi)| = |f'(\theta)| \cdot |x_n - \xi|$ следует, что

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$



Метод хорд

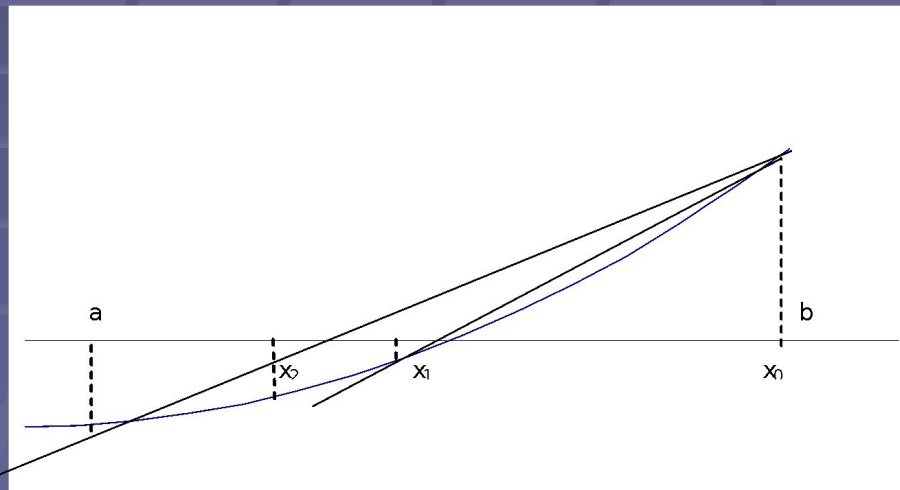
В методе Ньютона требуется вычислять производную функции, что не всегда удобно. Можно заменить касательную хордой, один из концов которой неподвижен.

Это прямая, проходящая через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_n, f(x_n))$ и пересекающая ось OX в точке x_{n+1} .

Тогда рекуррентная формула для решения уравнения $f(x) = 0$ по методу хорд примет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_0)f'(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}$$

Геометрическая интерпретация метода хорд. представлена ниже



Точные методы

Точными методами называются такие методы, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), приводят к точным значениям неизвестных за конечное число шагов. Так как на практике все вычисления ведутся с округлениями, то и значения неизвестных, полученные точным методом, неизбежно будут содержать погрешности. Если матрица A невырожденная, т. е. $\det(A) \neq 0$, то система имеет единственное решение. В этом случае решение системы с теоретической точки зрения не представляет труда. Значения неизвестных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) могут быть получены, по известным формулам Крамера

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

К точным методам относится, например, [метод Гаусса](#).



Метод Гаусса

Для простоты ограничимся рассмотрением системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными

Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент). Разделив первое уравнение системы на a_{11} . Пользуясь первым уравнением, можно исключить неизвестное x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений системы.

Далее первое уравнение полученной системы делим на $a_{22}^{(1)}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными и т. д. Таким образом, исходную систему мы привели к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 = b_4^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 = b_2^{(2)} \\ x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 = b_3^{(3)} \\ x_4 = b_4^{(4)} \end{cases}$$

откуда последовательно находим x_3, x_2, x_1 .

Итак, решение системы распадается на два этапа:

прямой ход — приведение системы к треугольному виду и обратный ход — определение неизвестных.



Пример

Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

Прямой ход реализуется с помощью преобразований:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b^{(0)} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}; \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -28 \\ 78 \end{pmatrix}; \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -28 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Обратный ход: решаем систему с треугольной матрицей, начиная с последнего уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -28 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 3; \quad x_2 = -28 + 10x_3 = 2; \quad x_1 = 8 - 0,5x_2 - 2x_3 = 1.$$



Приближенные методы

Приближенными методами называются такие методы, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы (x_1, x_2, \dots, x_n) за конечное число шагов лишь с заданной точностью. Точное решение системы в этих случаях может быть получено теоретически как результат бесконечного процесса. К приближенным методам относятся: метод простой итерации, метод Зейделя и др. Каждый из этих методов не всегда является сходящимся в применении к конкретному классу систем линейных уравнений.

- [Метод простой итерации](#)
- [Метод Якоби](#)
- [Метод Зейделя](#)
- [Пример](#)



Метод простой итерации

Простейшим итерационным методом решения систем линейных уравнений является метод простой итерации. Система уравнений

$$Ax = b \quad (1)$$

преобразуется к виду

$$x = Bx + c \quad (2)$$

и ее решение находится как предел последовательности

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c \quad (3)$$

Теорема 2. (о достаточном условии сходимости метода простой итерации).

Если $\|B\| < 1$, то система уравнений (2) имеет единственное решение и итерационный процесс (3) сходится к решению со скоростью геометрической прогрессии. (для $\|\cdot\|_\infty$ это условие эквивалентно условию диагонального преобладания матрицы A). Погрешность метода:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$



Метод Якоби

Итерационный процесс будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = -(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) / a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = -(a_{22}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n - b_2) / a_{21} \\ \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \\ x_n^{(k+1)} = -(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) / a_{n1} \end{array} \right.$$

Можно показать, что достаточным условием сходимости этого метода является диагональное преобладание в матрице A исходной системы .

Диагональное преобладание в матрице A означает, что

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}|$$

для любого $i = 1, 2, \dots, n$



Метод Зейделя

Итерационный процесс имеет вид :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = -(a_{22}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n - b_2)/a_{21} \\ \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \\ x_n^{(k+1)} = -(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n)/a_{n1} \end{cases}$$

Можно представить матрицу A в виде суммы трех матриц $A = L + D + R$, где L – левая треугольная матрица, R – правая треугольная матрица, D – диагональная матрица. Тогда итерационный процесс можно записать в виде

$$(L+D)x^{(k+1)} + Rx^{(k)} = b, \text{ отсюда имеем}$$
$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1} Rx^{(k)} + (L+D)^{-1} b$$

Необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя: все корни уравнения $\det(R + (L + D)\lambda) = 0$ должны быть по модулю меньше 1.



Пример

Исследовать сходимость метода Зейделя для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными и в случае сходимости получить для нее приближенное решение этим методом.

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Построим итерационный процесс следующим образом:

$$x_1^{(k+1)} = -1,5 + 0,5 x_2^{(k)} - 0,5 x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = 0,2 - 0,6 x_1^{(k+1)} + 0,4 x_3^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = -0,1 x_1^{(k+1)} + 0,4 x_2^{(k+1)}$$

Уравнение $\det(R + (L + D)\lambda) = 0$ имеет вид

$$100\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3}$ - комплексные числа, по модулю меньше 1 и метод Зейделя сходится.



Интерполяция

Пусть известны значения некоторой функции f в $n + 1$ различных точках x_0, x_1, \dots, x_n , которые обозначим следующим образом: f_0, f_1, \dots, f_n .

Эти значения могут быть получены, например, из эксперимента или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. Возникает задача приближенного восстановления функции f в произвольной точке x . Часто для решения этой задачи строится алгебраический многочлен степени n ,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

который в точках x_i принимает заданные значения, т. е.

$L_n(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$ Этот многочлен называется интерполяционным.

Точки x_i называются узлами интерполяции. Интерполяционный многочлен, записанный в форме

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

называют интерполяционным многочленом Лагранжа.



Численное интегрирование

- ✓ Постановка задачи
- ✓ Формулы прямоугольников
- ✓ Формула трапеций
- ✓ Формула Симпсона
- ✓ Погрешность составных формул
- ✓ Пример



Постановка задачи

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

где $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$ функция. Заменяем $f(x)$ каким-либо интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и получим формулу, которая называется квадратурной:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

где x_k – узлы интерполяции

A_k – коэффициенты квадратурной формулы, называемые весами, зависящие только от выбранных узлов, но не от вида функции $f(x)$.

Обозначим через $R[f]$ – погрешность или остаточный член формулы, тогда

$$R[f] = \int_a^b (f(x) - L_n(x)) dx$$

Таким образом, $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$, где $A_k = \int_a^b \prod_{k \neq i} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx$.

Такая формула называется интерполяционной квадратурной формулой.



Формулы прямоугольников

Заменим функцию на отрезке $[a, b]$ многочленом Лагранжа нулевой степени с одним узлом x_0 – константой $f(x_0)$. Тогда искомый интеграл, равный площади криволинейной трапеции, будет приближенно равен площади прямоугольника с высотой $f(x_0)$ и основанием $b - a$.

В зависимости от выбора x_0 мы можем получить формулы:

- Формула левых прямоугольников ($x_0 = a$)
- Формула правых прямоугольников ($x_0 = b$)
- Формула средних прямоугольников ($x_0 = (a+b)/2$)



Формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(a)$$

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2}$$

Геометрический смысл формулы левых прямоугольников

Формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(b)$$

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24}$$

Геометрический смысл формулы правых прямоугольников

Формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24}$$

Геометрический смысл формулы средних прямоугольников

Формула трапеций

Заменяем функцию на отрезке $[a, b]$ многочленом Лагранжа первой степени с узлами $x_0 = a, x_1 = b$. Графически это соответствует замене кривой на секущую. Таким образом, искомый интеграл, равный площади криволинейной трапеции, будет приближенно равен площади прямоугольной трапеции с высотой $b - a$, и основаниями $f(a)$ и $f(b)$. Из геометрических соображений нетрудно получить для нашего интеграла формулу *трапеций*:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}$$

Геометрический смысл формулы трапеций



Формула Симпсона

Формула Симпсона (формула парабол) может быть получена при интерполировании по трем узлам: $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$.

Она имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Погрешность вычисляется по формуле

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)^5}{2880}$$



Погрешность составных формул

Рассмотренные формулы называют *простыми*. На практике, поскольку длина отрезка $[a, b]$ может быть велика, пользуются составными формулами, с их помощью можно вычислить интеграл с любой наперед заданной точностью. Для получения этих формул разобьем отрезок $[a, b]$ узлами: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, предположим, что узлы равноотстоящие и расстояние между соседними узлами равно h . Тогда . Для вычисления интеграла по каждому отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ применим какую-либо простую формулу. Приведем составные формулы с погрешностями для рассмотренных выше простых формул.

Формула левых прямоугольников:
$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)h}{2}$$

Формула правых прямоугольников:
$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)h}{2};$$

Формула средних прямоугольников:
$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{24}$$

Формула трапеций:
$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{12};$$



Составная формула Симпсона

В этих формулах $h = \frac{b-a}{n}$

Составная формула Симпсона:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1/2}) + f(x_n))$$

Здесь, $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$

Легко получить выражение для погрешности $|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)h^4}{2880}$



Пример

Вычислить по формулам левых прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 2$ интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

Точное значение этого интеграла равно 1.

$$S_{\text{лев. прям.}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2}}{2} + \sin \frac{\pi}{4} \right) \approx 0,555360$$

$$S_{\text{трапеций}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2}}{2} + \sin \frac{\pi}{4} \right) \approx 0,948059$$

$$S_{\text{Симпсона}} = \frac{\pi}{24} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \approx 1,000135$$



Численное решение задачи Коши

- ✓ Постановка задачи
- ✓ Методы, основанные на разложении решения в ряд Тейлора
- ✓ Методы Рунге - Кутты
- ✓ Разностные методы
- ✓ Пример



Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка:

найти решение уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[x_0, x_0 + L]$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$ (1).

Если функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y в некоторой окрестности начальной точки x_0 , то можно указать такой отрезок $[x_0, x_0 + L]$, на котором решение задачи существует и единственно. Численные методы позволяют приближенно вычислить искомое решение $y(x)$ в некоторых точках $x_i \in [x_0, x_0 + L]$. Решение ищется в виде последовательности значений $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$, где y_i – приближенное значение точного решения $y(x)$ в точке x_i .



Методы, основанные на разложении решения в ряд Тейлора

Пусть $f(x, y)$ имеет в рассматриваемой области непрерывные и ограниченные частные производные. Тогда можно записать для решения (1) разложение в ряд Тейлора:

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(k)}(\xi)}{k!}(x - x_0)^k + \dots$$

где $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, $y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)$ и т.д. Оборвем разложение на слагаемом, содержащем $(x - x_0)^k$.

Можно записать приближенное равенство

$$y(x) \approx \sum_0^k \frac{y(x_0)^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i$$

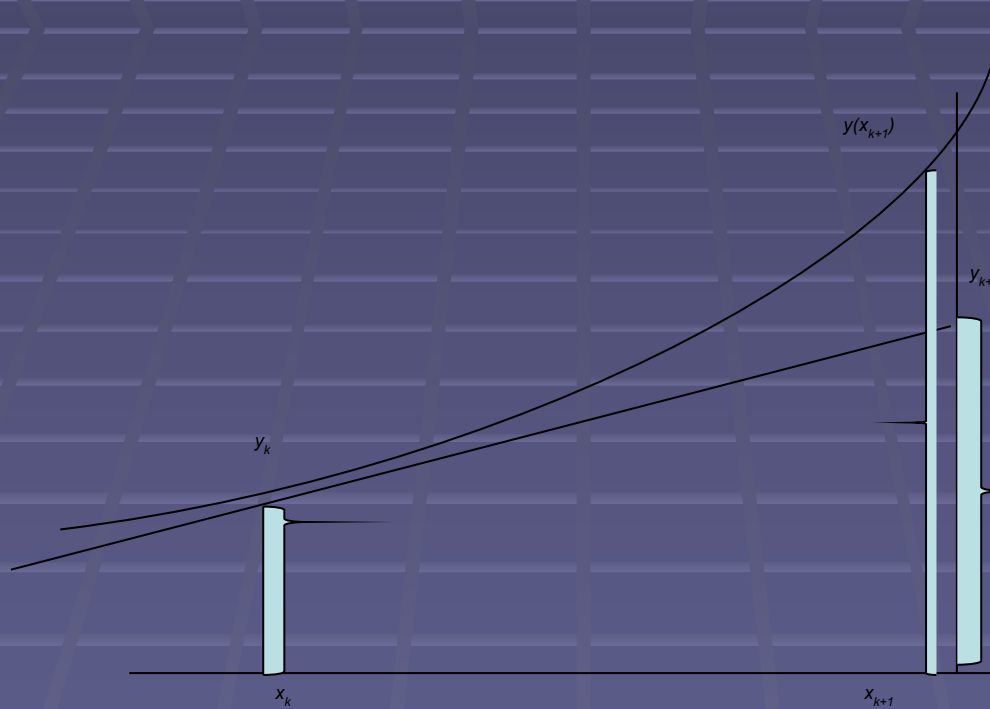
Возьмем $k = 1$. Полученный метод имеет вид:

$$y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j) \text{ и называется методом Эйлера.}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке.



Геометрическая интерпретация метода Эйлера



Методы Рунге – Кутты

Пусть известно значение решения задачи (1) в некоторой точке x и требуется вычислить его в точке $x + h$. Справедливо следующее равенство (1) :

$$y(x+h) = y(x) + \int_0^h y'(x+t) dt$$

если вычислять $\int_0^h y'(x+t) dt$ по формуле трапеций, то

$$\int_0^h y'(x+t) dt$$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(f(x, y) + f(x+h, y(x+h))) + O(h^3)$$

Заменяя в этой формуле неизвестное $y(x+h)$ приближенным значением, полученным по методу Эйлера, получим метод Эйлера с пересчетом:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + f(x_j, y_j)h))$$



Если вычислять по формуле средних прямоугольников, то получим метод Коши:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j))$$

Полученные методы относятся к семейству методов Рунге – Кутты второго порядка, общий вид которых:

$$y_{i+1} = y_i + P_1 k_1 + P_2 k_2, \quad \text{где } k_1 = hf(x_i, y_i), k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1).$$

Параметры α , β , P_1 , P_2 находят из условия совпадения разложения в ряд точного и приближенного решения до слагаемого порядка $O(h^3)$. Выполнение этого требования достигается, если $\alpha P_2 = \beta P_2 = 0,5$; $P_1 + P_2 = 1$.

Таким образом, методу Эйлера с пересчетом соответствуют значения

$$\alpha = \beta = 1, P_1 = P_2 = 0,5;$$

а методу Коши значения $\alpha = \beta = 0,5$; $P_1 = 0$; $P_2 = 1$.

Наиболее часто используется метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. В этом методе y_i – приближенные значения $y(x_i)$ вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \Delta y_i = (K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)})/6, \quad \text{где}$$
$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), K_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + K_1^{(i)}/2), K_3^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + K_2^{(i)}/2),$$
$$K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).$$

Одношаговая погрешность этого метода $O(h^5)$. Погрешность на всем промежутке $O(h^4)$



Разностные методы

Пусть известны значения $y_{m-k}, y_{m-k+1}, \dots, y_m$ в равноотстоящих узлах $x_{m-i}, i = 0, 1, \dots, k$ так, что $x_{m-i+1} = x_{m-i} + h$. Для функции $f(x, y(x))$ по значениям $f_{m-i} = f(x_{m-i}, y_{m-i}), i = 0, 1, \dots, k$ можно построить интерполяционный многочлен Лагранжа степени k . Заменяя в интегральном представлении уравнения (1) подынтегральную функцию $f(x, y(x))$ интерполяционным многочленом $L_k(x)$, получим формулу метода Адамса

$$y_{m+l} = y_m + h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{m-i}$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [3f_m - f_{m-1}] \quad O(h^3)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{12} [23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}] \quad O(h^4)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24} [55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}] \quad O(h^5)$$



Пример

Дана задача Коши : $y' = -\frac{3y}{x+1}, y(0) = 2$

Найти приближенные значения решения в точках 0,1; 0,2; 0,3 по методу Эйлера, Эйлера с пересчетом и по методу Коши; сравнить с точным решением. Проиллюстрировать графически.

Найдем точное решение этой задачи.

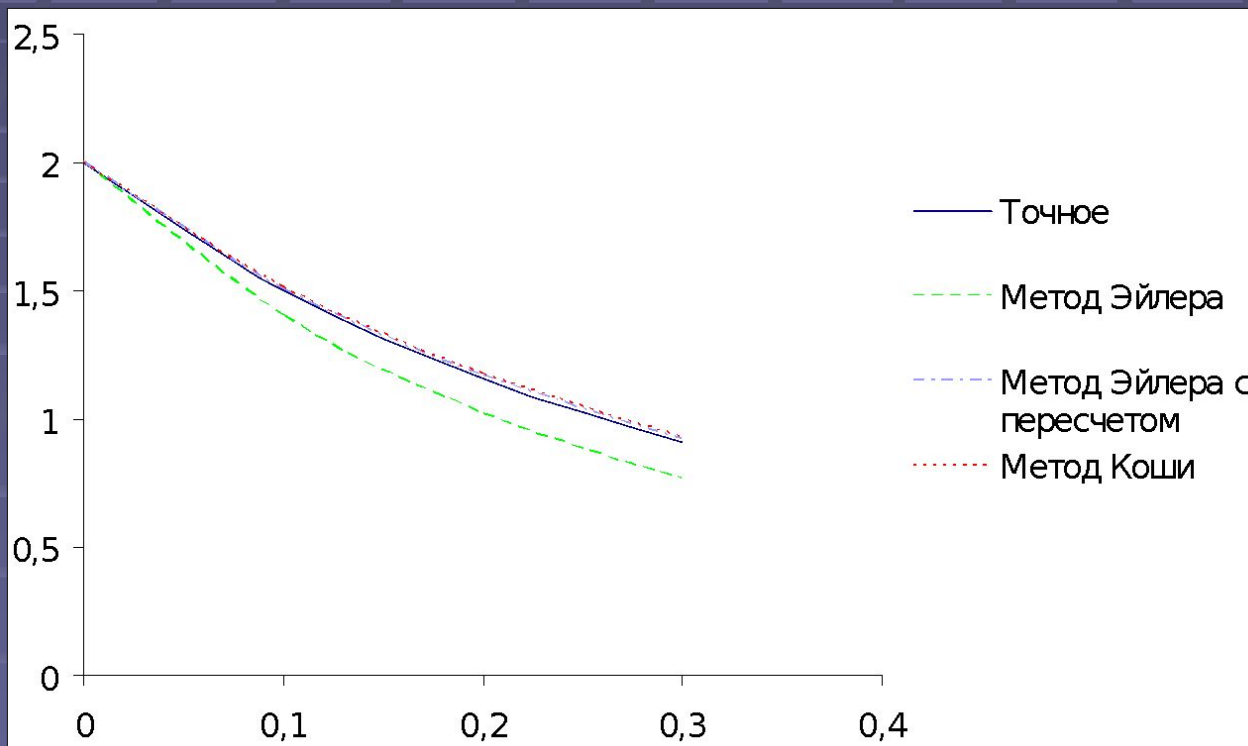
$$y = \frac{2}{(x+1)^3}$$

Вычислим приближенные значения решения по методу Эйлера , по методу Эйлера с пересчетом, методу Коши в точках 0,1; 0,2; 0,3; $y(0) = y_0 = 2$ для каждого метода . Чтобы сравнить результаты, занесем их в таблицу

x	Точное	Метод Эйлера	Метод Эйлера с пересчетом	Метод Коши
0	2	2	2	2
0,1	1,503	1,4	1,509	1,514
0,2	1,157	1,018	1,166	1,173
0,3	0,91	0,764	0,919	0,927



По таблице можно построить следующий график:



Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов был предложен Гауссом и Лежандром в конце XVIII – начале XIX века в связи с проблемой обработки экспериментальных данных. В этом случае задача построения функции непрерывного аргумента по дискретной информации характеризуется двумя особенностями:

1. число точек, в которых проводятся измерения, обычно бывает достаточно большим;
2. значения функции в этих точках определяются приближенно в связи с неизбежными ошибками измерения.

С учетом этого строить аппроксимирующую функцию в виде суммы большого числа слагаемых и добиваться ее точного равенства в узлах сетки некоторым значениям становится нецелесообразным.

В методе наименьших квадратов аппроксимирующая функция ищется в виде суммы, содержащей сравнительно небольшое число слагаемых

Пусть известны значения некоторой функции f в n различных точках x_1, \dots, x_n , которые обозначим следующим образом: f_1, \dots, f_n ; в евклидовом пространстве E дана линейно независимая система функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, $m \leq n$.



Построим обобщенный многочлен

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x)$$

коэффициенты которого подберем так, чтобы значение было минимальным.

$$F = \sum_{k=1}^n (f_k - \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x_k))^2$$

Определим скалярное произведение функций на множестве точек x_1, \dots, x_n :

$$(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = \sum_{k=1}^n \varphi_j(x_k) \varphi_i(x_k)$$

Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^m a_j (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Полученные в результате решения этой системы коэффициенты дадут многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения функции f .



Пример

Сеточная функция задана таблицей:

i	x_i	y_i
1	0	0
2	0.5	0.25
3	1	1

Построить линейную функцию $\Phi(x) = a_1 + a_2x$, которая даст наилучшее приближение по методу наименьших квадратов.

В рассматриваемом случае имеем: $n = 2$, $m = 1$, $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$.

Здесь $(\varphi_1, \varphi_1) = 3$; $(\varphi_2, \varphi_2) = 1,25$; $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = 1,5$.

Таким образом, для определения коэффициентов имеем нормальную систему уравнений:

$$3a_1 + 1,5a_2 = 1,25$$

$$1,5a_1 + 1,25a_2 = 1,125$$

В результате ее решения получим:

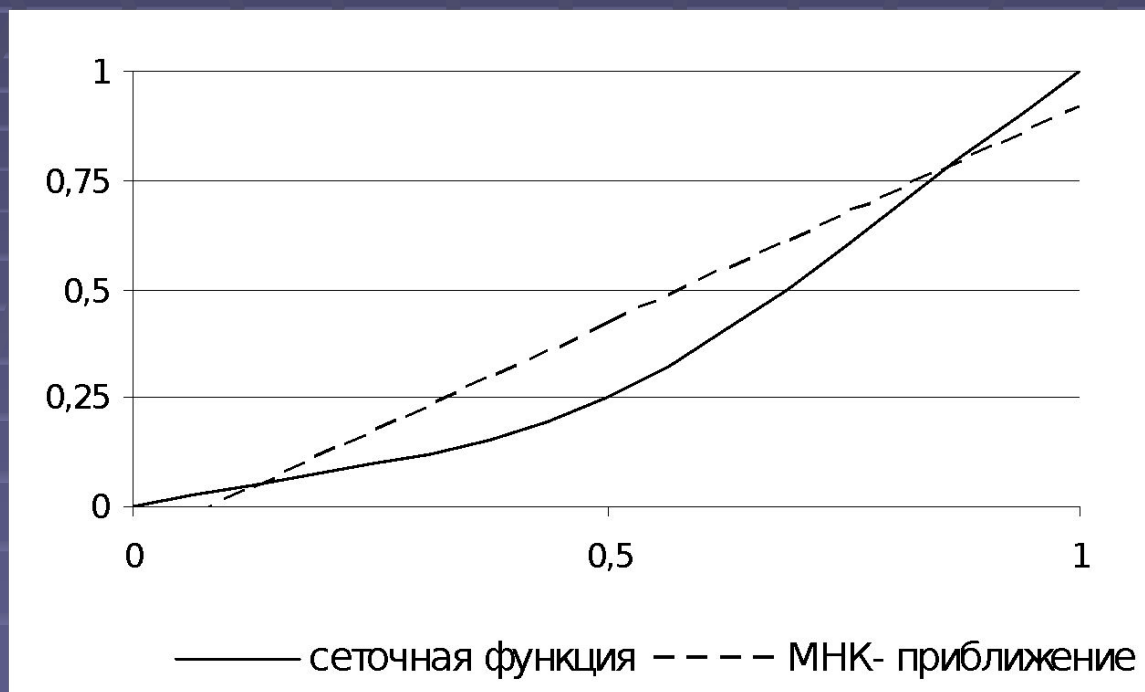
тогда

$$a_1 = -\frac{1}{12}, \quad a_2 = 1,$$

$$\Phi(x) = x - \frac{1}{12}$$



Геометрическая интерпретация МНК представлена на рисунке:



Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: БИНОМ, 2006.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы. – М.: ОНИКС 21 век, 2005.
3. Костомаров Д. П., Фаворский А. П. Вводные лекции по численные методам. – М.: Логос, 2004.
4. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004.
5. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000.

