

# Модели для рынка ценных бумаг

## Введение в управление портфелем ценных бумаг

*Портфель – это набор финансовых активов, которыми располагает инвестор. В него могут входить как инструменты одного вида, например, только акции или облигации, так и разные активы: ценные бумаги, срочные контракты, недвижимость. Цель формирования портфеля состоит в стремлении получить требуемый уровень ожидаемой доходности при более низком уровне ожидаемого риска. Она достигается, во-первых, за счет диверсификации портфеля по составу инструментов, т. е. распределения средств инвестора между различными активами, и, во-вторых, тщательного подбора финансовых инструментов. В теории и практике управления портфелем существуют два подхода: традиционный и современный. Традиционный основан на фундаментальном и техническом анализе. Он делает акцент на широкую диверсификацию ценных бумаг по отраслям. В основном приобретаются бумаги известных компаний, которые имеют хорошие производственные и финансовые показатели. Кроме того, учитывается более высокая ликвидность таких бумаг, возможность приобретать и продавать их в больших количествах и экономить на комиссионных.*

Развитие широкого и эффективного рынка<sup>1</sup>, статистической базы, а также быстрый прогресс в области вычислительной техники привели к возникновению современной теории и практики управления портфелем ценных бумаг. Она основана на использовании статистических и математических методов подбора финансовых инструментов в портфель, а также на ряде новых концептуальных подходов.

Главными параметрами при управлении портфелем, которые необходимо определить менеджеру, являются его ожидаемая доходность и риск. Формируя портфель, менеджер не может точно определить будущую динамику его доходности и риска. Поэтому свой инвестиционный выбор он строит на ожидаемых значениях доходности и риска. Данные величины оцениваются, в первую очередь, на основе статистической информации за предыдущие периоды времени. Поскольку будущее вряд ли повторит прошлое со стопроцентной вероятностью, то полученные оценки менеджер может корректировать согласно своим ожиданиям развития конъюнктуры. Рассмотрим, каким образом рассчитываются отмеченные параметры.

Программа Excel позволяет легко осуществлять финансовые и статистические расчеты, которые возникают в процессе управления портфелем ценных бумаг.

# 1. Построение Markowitz Model для российского рынка ценных бумаг

Чтобы лучше представить идею и эффект диверсификации портфеля при различной корреляции доходностей активов, мы рассмотрели риск портфеля, состоящего только из двух бумаг. Общие выводы, которые можно сделать по результатам вышесказанного состоят в следующем:

1) если в портфель объединяются активы с корреляцией  $+1$ , достигается только усреднение, а не уменьшение риска;

2) при объединении в портфель активов с корреляцией меньше, чем  $+1$ , его риск уменьшается; чем меньше корреляция доходностей активов, тем меньше риск портфеля; уменьшение риска достигается при сохранении неизменного уровня ожидаемой доходности портфеля;

3) если в портфель объединяются активы с корреляцией  $-1$ , можно сформировать портфель без риска;

4) при формировании портфеля необходимо объединять в него активы с наименьшей корреляцией.

Основоположником современной теории портфеля является Г.Марковиц. Именно он предложил объединять активы с наименьшей корреляцией, чтобы снизить риск портфеля. Согласно Марковцу, чем меньше корреляция доходностей бумаг в портфеле, тем больше степень его диверсификации. Следует отметить, что диверсификация позволяет снизить риск портфеля для обычной конъюнктуры рынка. В условиях финансовых крахов сложившиеся корреляции между доходностями активов нарушаются, и динамика их доходностей будет такова, как если бы они имели корреляцию  $+1$ .

Г. Марковиц в 1952 году предложил математическую модель формирования инвестиционного портфеля. В основе его модели лежат два ключевых показателя любого финансового инструмента: доходность и риск, которые были количественно измерены. Доходность по модели представляет собой математическое ожидание доходностей, а риск определяется как разброс доходностей возле математического ожидания и рассчитывается через стандартное отклонение.

Выделяют две инвестиционные стратегии при формировании портфеля:

- ▶ Максимизации доходности инвестиционного портфеля при ограниченном уровне риск.
- ▶ Минимизация риска инвестиционного портфеля при минимально допустимом уровне доходности.

**Портфель** – это совокупность финансовых активов, объединенных вместе для реализации целей инвестора, для максимизации прибыли и минимизации убытков.

В Markowitz Model допустимыми являются только стандартные портфели, портфели без коротких позиций (без продаж), то есть портфель, состоящий только из купленных акций.

Отсюда первое ограничение, которое накладывается на портфель, это положительные доли всех ценных бумаг ( $x_i$ ).

$$x_i > 0$$

Второе ограничение состоит в том, что сумма всех долей ценных бумаг должна составлять 1, это правило нормировки долей. Формула показывает это ограничение:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

Так же доходность портфеля будет выглядеть как сумма доходностей отдельных акций с выбранными весовыми коэффициентами. Так как каждый инвестор пытается максимизировать получаемую доходность, то необходимо будет максимизировать эту целевую функцию. В итоге это будет выглядеть в виде формулы:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i \rightarrow \max$$

Помимо доходности инвестору необходимо так же учесть и риск, связанный с той или иной акцией.

Риск по Markowitz выражается в виде среднеквадратического отклонения  $\delta_i$  каждой акции. Значение  $\delta_p$  – это уровень приемлемого риска для инвестора.

Помимо учета средне квадратического отклонения отдельных акций необходимо учесть корреляцию между доходностями акций –  $r_{ij}$ . Корреляция в нашем случае для Markowitz Model равняется нулю. В итоге риск всего портфеля представлен формулой:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i \cdot x_j \cdot r_{ij} \cdot \delta_j \cdot \delta_i} < \delta_p$$

Экономико-математическая модель задачи формирования оптимального портфеля акций максимальной эффективности при которой риск портфеля не превышает заданного значения  $\delta_p$ , и при учете всех ограничений на портфель, примет следующий вид :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i \rightarrow \max \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i x_j r_{ij} \delta_j \delta_i} \leq \delta_p \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$



## Пример составления портфеля Markowitz для российского фондового рынка

Для примера возьмем акции 4-х российских компаний Газпром (GAZP), Дальсвязь(DLSV), Сургутнефтегаз (SNGS) и Роснефть (ROSN).

Построим на основе котировок оптимальный портфель. Для нахождения оптимального портфеля по Markowitz Model воспользуемся средствами Excel и компонентой Solver (Поиск решений).

– Для начала рассчитаем дневную доходность по каждой акции за один год.

Формула расчета дневной доходности ( $m_j$ ) представлена:

$$m_j = \frac{P_j - P_{j-1}}{P_{j-1}} ;$$

где:  $P_j$  – цена акции на конец текущего дня;

$P_{j-1}$  – цена акции за предыдущий день.

В итоге должна получиться следующая таблица дневных доходностей каждой из акций:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Название	Close	Доходность		Название	Close	Доходность		Название	Close	Доходность	
2	GAZP	183,24			DLSV	46,1			SNGS	25,524		
3	GAZP	170,15	-7,14%		DLSV	45,93	-0,37%		SNGS	24,069	-5,70%	
4	GAZP	174,17	2,36%		DLSV	47,53	3,48%		SNGS	24,5	1,79%	
5	GAZP	170,67	-2,01%		DLSV	49,6	4,36%		SNGS	24,374	-0,51%	
6	GAZP	170,15	-0,30%		DLSV	49,2	-0,81%		SNGS	23,856	-2,13%	
7	GAZP	171,2	0,62%		DLSV	48,82	-0,77%		SNGS	24,17	1,32%	
8	GAZP	172,56	0,79%		DLSV	47,99	-1,70%		SNGS	24,902	3,03%	
9	GAZP	178,1	3,21%		DLSV	47,9	-0,19%		SNGS	25,847	3,79%	
10	GAZP	191,5	7,52%		DLSV	48,98	2,25%		SNGS	26,646	3,09%	
11	GAZP	190,5	-0,52%		DLSV	49,99	2,06%		SNGS	25,833	-3,05%	
12	GAZP	175,1	-8,08%		DLSV	48,5	-2,98%		SNGS	24,7	-4,39%	

Что бы рассчитать доходность для каждой акции необходимо найти среднюю доходность акции за выбранный период, в данном случае 1 год.

$$m_i = \frac{\sum_{j=1}^T m_j}{T}$$

Среднедневная доходность за весь период составила для GAZP = -0,02%, DLSV = 0,28%, SNGS = 0,05% и ROSN = 0,08%. Так как средняя доходность Газпрома отрицательная то эта акция не будет включена в портфель.

– Помимо доходности необходимо рассчитать риск этих акций, для этого рассчитаем среднеквадратическое отклонение дневных доходностей акций по формуле:

$$\delta_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^T (m_j - m_i)^2}{T}}$$

Для Дальсвязи (DLSV)  $\delta_1 = 1,73\%$  , Сургут нефтегаза (SNGS)  $\delta_2 = 1,98\%$  и Роснефти (ROSN)  $\delta_3 = 2,05\%$ .

– Составим уравнение для нахождения оптимального портфеля. Так же зададим допустимый максимальный уровень риска в 0,15%.

– Полученные данные занесем в таблицу для расчетов долей ( $x_i$ ) каждой акции в портфеле.

– Осталось решить полученное уравнение и рассчитать доли каждой акции, для этого воспользуемся встроенным в пакет Excel надстройкой «Поиск решений».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Акция	Доходнос	Риск	Доля				
2	DLSV	0,28	1,73	0		Доходность портфеля		
3	SNGS	0,05	1,98	0		0		
4	ROSN	0,08	2,05	0				
5								
6			Сумма долей	0				
7			Общий риск	0				
8								

– После запуска надстройки «Поиск решений» установим целевую функцию, это доходность всего портфеля. После этого поставим флажок на максимизации значения этой целевой функции. Ячейки для изменения будут соответствовать доли акций, которые необходимо найти. Так же необходимо наложить ограничения на то что бы сумма всех долей была равна 1, и что бы каждая доля была не отрицательна и общий риск портфеля был бы меньше 0,15%.

В модели Г. Марковица риск отдельно взятого финансового инструмента рассчитывается как стандартное отклонение доходностей. Для расчета общего риска портфеля необходимо отразить их совокупное изменение и взаимное влияние (через ковариацию), для этого воспользуемся следующей формулой:

где:

$$\sigma_p = \sqrt{w_i \cdot w_j \cdot V_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n w_i \cdot w_j \cdot k_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j};$$

$\sigma_p$  – риск инвестиционного портфеля;

$\sigma_i$  – стандартное отклонение доходностей  $i$ -го финансового инструмента;

$k_{ij}$  – коэффициент корреляции между  $i, j$ -м финансовым инструментом;

$w_i$  – доля  $i$ -го финансового инструмента (акций) в портфеле;

$V_{ij}$  – ковариация доходностей  $i$ -го и  $j$ -го финансового инструмента;

$n$  – количество финансовых инструментов инвестиционного портфеля.



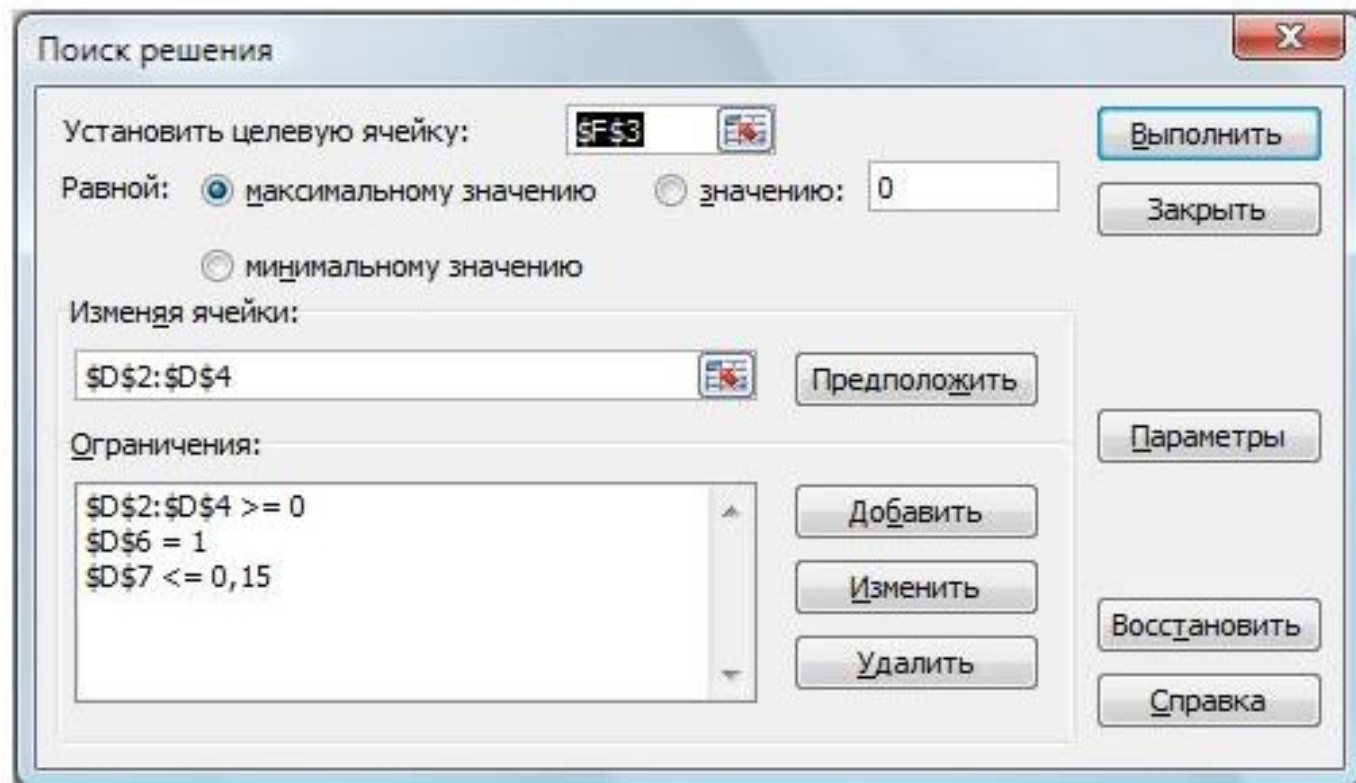
Целевая функция в ячейке (F3) равняется:

$=D2*B2+D3*B3+D4*B4$

В ячейке (D6) прописывается ограничение для портфеля:

$=\text{СУММ}(D2:D4)$

После проделанной работы определяются доли в инвестиционном портфеле для каждой акции:



Расчет оптимального портфеля по Markowitz Model представлен на рисунке ниже.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Акция	Доходнос	Риск	Доля				
2	DLSV	0,28	1,73	85,38%		Доходность портфеля		
3	SNGS	0,05	1,98	3,66%		0,249661		
4	ROSN	0,08	2,05	10,96%				
5								
6			Сумма долей	1				
7			Общий риск	0,150001				
8								

**Оптимальный портфель** будет состоять из 85,38% акций Дальсвязи (DLSV), 3,66% акций Сургутнефтегаза (SNGS) и 10,96% акций Роснефти (ROSN). Доходность всего портфеля будет составлять 0,24% при общем установленном заранее риске портфеля в 0,15%.

## 2. Модель CAPM (Capital Assets Price Model)

Модель CAPM (Capital Assets Price Model) предназначена для определения цены акции или стоимости компании в будущем, другими словами, текущая оценка перекупленности или перепроданности компании.

Модель CAPM часто используется как дополнение к портфельной теории Markowitz. В практике построения инвестиционных портфелей, модель CAPM, как правило, используется для выбора активов из всего множества, далее уже с помощью Markowitz Model формируется оптимальный портфель.

Модель CAPM связывает такие составляющие как будущая доходность ценной бумаги и риск этой бумаги.



# Формула Sharpe связи будущей доходности ценной бумаги и риска

$$R = R_f + \beta(R_d - R_f)$$

где.

R- ожидаемая норма доходности;

$R_f$  – безрисковая ставка доходности, как правило, ставка по государственным облигациям;

$R_d$ - доходность рынка;

$\beta$ - коэффициент бета, который является мерой рыночного риска (недиверсифицируемого риска) и отражает чувствительность доходности ценной бумаги к изменениям доходности рынка в целом.

**Ожидаемая норма доходности** – это та доходность ценной бумаги, на которую рассчитывает инвестор. Другими словами- эта прибыль этой ценной бумаги.

**Безрисковая ставка доходности** – это доходность, полученная по безрисковым ценным бумагам. Как правило, берут ставку по государственным облигациям. Что бы посмотреть ставки по государственным облигациям можно зайти на сайт центрального банка РФ. [http://cbr.ru/hd\\_base/OpenMarket.asp](http://cbr.ru/hd_base/OpenMarket.asp) . В России, на данный момент, она составляет 5.04%.

Под **доходностью рынка** понимают доходность индекса данного рынка, в нашем случае индекс РТС (RTSI). Для Американских акций берут индекс S&P500.

**Бета** – коэффициент показывающий рискованность ценной бумаги.

**Пример применения модели оценки капитальных активов** – Попробуем рассчитать будущую доходность акции Gazprom GAZP. Возьмем котировка по месяцам этой акции и индекса РТС (RTSI) или ММВБ (MICEX) за годовой период (котировки можно экспортировать с сайта [finam.ru](http://finam.ru)).

**Пример применения модели оценки капитальных активов**  
– Попробуем рассчитать будущую доходность акции Gazprom GAZP. Возьмем котировка по месяцам этой акции и индекса РТС (RTSI) или ММВБ (MICEX) за годовой период (котировки можно экспортировать с сайта [moex.com](http://moex.com)).

	A	B	C
1	<b>GAZP</b>	<b>MICEX</b>	
2	163.3	1080.05	
3	167.3	1111.33	
4	163.1	1091.98	
5	163.71	1104.98	
6	159.36	1076.69	
7	158.5	1093.72	
8	157.51	1085.58	

Далее рассчитаем дневные доходности по акции Газпрома и индексу ММВБ

$$=(A3-A2)/A2$$

$$=(B3-B2)/B2$$

В итоге получится следующая таблица.

	A	B	C	D
1	<b>GAZP</b>	<b>MICEX</b>	<b>R_GAZP</b>	<b>R_MICEX</b>
2	175	1197.2		
3	175.9	1237.18	3.34%	0.51%
4	166.49	1284.95	3.86%	-5.35%
5	183.09	1370.01	6.62%	9.97%
6	186.44	1419.42	3.61%	1.83%
7	167.61	1332.64	-6.11%	-10.10%
8	171.5	1450.15	8.82%	2.32%

Для того что бы рассчитать коэффициент бета необходимо рассчитать коэффициент линейной регрессии между доходностями акции Газпрома и доходностью индекса ММВБ.

Можно рассчитать **двумя путями**:

### Расчет беты через формулу

В ячейке F2 введем следующую формулу:

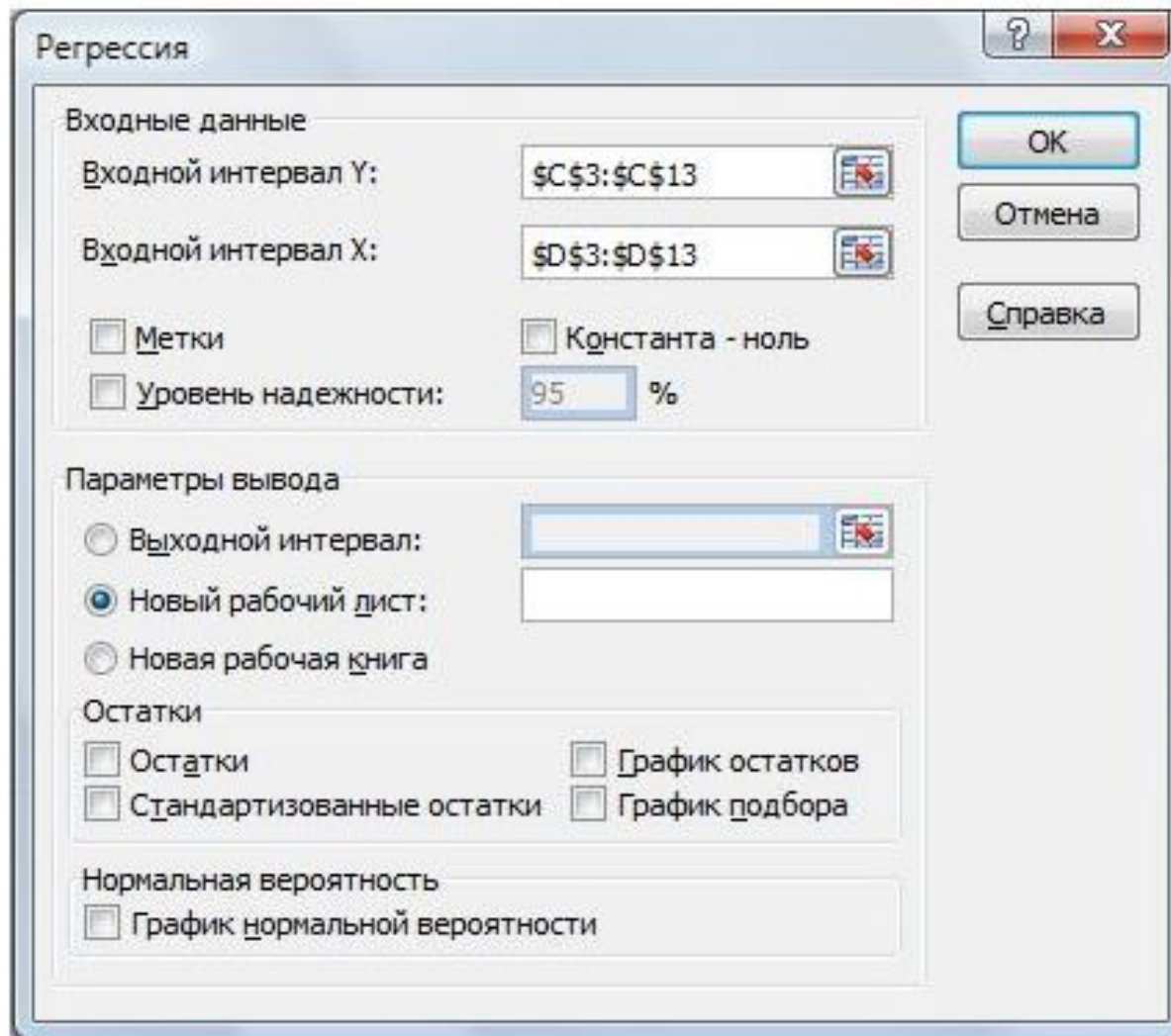
```
=ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(C3:C13;D3:D13);1)
```

Коэффициент бета будет равен 0,672.

	A	B	C	D	E	F
1	GAZP	MICEX	R_GAZP	R_MICEX		$\beta$
2	175	1197.2				0.672688
3	175.9	1237.18	3.34%	0.51%		
4	166.49	1284.95	3.86%	-5.35%		
5	183.09	1370.01	6.62%	9.97%		
6	186.44	1419.42	3.61%	1.83%		
7	167.61	1332.64	-6.11%	-10.10%		
8	171.5	1450.15	8.82%	2.32%		

## Расчет беты через надстройку «Анализ данных»

Для расчета коэффициента беты через «Анализ данных» необходимо установить надстройку Excel «Анализ Данных». В ней выбрать раздел «Регрессия» и установить входные интервалы, которые соответствуют доходностям акции Газпрома и индекса ММВБ. В новом рабочем листе появится отчет.



Регрессия

Входные данные

Входной интервал Y: \$C\$3:\$C\$13

Входной интервал X: \$D\$3:\$D\$13

Метки

Константа - ноль

Уровень надежности: 95 %

Параметры вывода

Выходной интервал:

Новый рабочий лист:

Новая рабочая книга

Остатки

Остатки

Стандартизованные остатки

График остатков

График подбора

Нормальная вероятность

График нормальной вероятности

OK

Отмена

Справка

Отчет по регрессии выглядит следующим образом. В ячейке B18 находится расчет коэффициента линейной регрессии, как раз необходимый коэффициент бета. Коэффициент бета равен 0,67. Также в отчете есть показатель R- квадрат (коэффициент детерминированности), значение которого равно 0,63. Он показывает силу зависимости между независимыми переменными (зависимость между доходностью акции и индексом). Показатель Множественный R – является коэффициентом корреляции. Как видим коэффициент корреляции составляет 0,79, что говорит о сильной связи между доходностью индекса и доходностью акции Газпрома.



	A	B	C	D	E	F
1	<b>ВЫВОД ИТОГОВ</b>					
2						
3	<i>Регрессионная статистика</i>					
4	Множественный R	0.79492513				
5	R-квадрат	0.631905962				
6	Нормированный R-	0.591006624				
7	Стандартная ошибка	0.03475488				
8	Наблюдения	11				
9						
10	<i>Дисперсионный анализ</i>					
11		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
12	Регрессия	1	0.018662412	0.018662412	15.4502737	0.003454457
13	Остаток	9	0.010871115	0.001207902		
14	Итого	10	0.029533528			
15						
16		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>
17	Y-пересечение	0.017575839	0.010569866	1.662825088	0.13070978	-0.00633486
18	Переменная X 1	0.672688473	0.171137781	3.930683622	0.00345446	0.285547916



Осталось рассчитать месячную доходность рынка, доходность индекса ММВБ, которая рассчитывается как среднеарифметическая доходность индекса. Доходность индекса ММВБ составляет в среднем за месяц -0,81%, а среднемесячная доход

	A	B	C	D	E	F
1	GAZP	MICEX	R_GAZP	R_MICEX		$\beta$
2	175	1197.2				0.672688
3	175.9	1237.18	3.34%	0.51%		
4	166.49	1284.95	3.86%	-5.35%		
5	183.09	1370.01	6.62%	9.97%		
6	186.44	1419.42	3.61%	1.83%		
7	167.61	1332.64	-6.11%	-10.10%		
8	171.5	1450.15	8.82%	2.32%		
9	170	1436.04	-0.97%	-0.87%		
10	159.84	1332.62	-7.20%	-5.98%		
11	149.1	1309.31	-1.75%	-6.72%		
12	162.85	1397.12	6.71%	9.22%		
13	156.78	1347.38	-3.56%	-3.73%		
14		Сред.Знач	1.21%	-0.81%		

Мы рассчитали все необходимые параметры модели CAPM. Теперь рассчитаем справедливую норму доходности акции Газпрома на следующий месяц.  $R_f=5.04\%$ ,  $\beta=0.67$ ,  $R_d=-0.81\%$ .

$$R_{GAZP}=5,04\%+0,67*(-0,81\%-5,04\%)=1,12\%$$

Норма доходности акций Gazprom равняется 1,12% на следующий месяц. Можно сказать, что это прогнозная цена будущей доходности в следующем отчетном периоде. Модель оценки капитальных активов –инструмент оценки акций и ценных бумаг, позволяющий составить прибыльный инвестиционный портфель.

# 3. Модель Шарпа

Формирование инвестиционного портфеля на основе метода Sharpe index.

Существует несколько **методов управления портфелем**, как правило, они делятся на два вида. **Активное и пассивное управление портфелем.** **Активное** управление портфелем состоит в поиске арбитражных возможностей для извлечения сверхприбыли из рынка. Придерживаясь этой стратегии управления, портфельный менеджер использует различные методы прогнозирования и анализа для поиска закономерностей рынка и извлечение дополнительной прибыли.

**Пассивное** управление портфелем состоит в составлении сильно диверсифицированного портфеля для минимизации рыночного риска. Цель портфельного управляющего составить наиболее защищенный портфель от рыночных рисков. Как правило, менеджер пытается составить инвестиционный портфель доходность, которого как можно ближе соответствовала бы доходности рыночного индекса. Такой подход называется «**Индексная стратегия управления инвестиционным портфелем**».

**Рыночный индекс** включает в себя взвешенный набор различных акций. Например, индекс ММВБ включает в себя 30 различных акций. Также есть капитализационные индексы. Капитализация – показатель характеризующий масштабы операций на рынке и определяется как суммарная рыночная стоимость обращающихся ценных бумаг. Например, капитализационные индекс ММВБ MICEX LC, MICEX MC, MICEX SC с высокой, стандартной и базовой капитализацией.

Итак, перед портфельным управляющим ставится задача: **составить портфель из 4-х акций**, что бы он как можно сильнее описывал рыночный индекс. Напомню, что в рыночный индекс входит намного больше акций, но любой инвестор всегда ограничен в средствах. Построим инвестиционный портфель из пяти акций, который бы наиболее полно соответствовал рыночному индексу. Для этого возьмем капитализационный индекс MICEX LC, состоящий из 15 акций. (Данные взяты с биржи ММВБ [www.micex.ru](http://www.micex.ru))

№	Тикер	Ценная бумага
1	GAZP	<a href="#">ГАЗПРОМ ао</a>
2	LKOH	<a href="#">ЛУКОЙЛ</a>
3	SBER	<a href="#">Сбербанк</a>
4	GMKN	<a href="#">ГМКНорНик</a>
5	ROSN	<a href="#">Роснефть</a>
6	MTSI	<a href="#">МТС-ао</a>
7	NOTK	<a href="#">Новатэк ао</a>
8	SNGS	<a href="#">Сургнфгз</a>
9	TATN	<a href="#">Татнфт Зао</a>
10	HYDR	<a href="#">РусГидро</a>
11	VTBR	<a href="#">ВТБ ао</a>
12	CHMF	<a href="#">СевСт-ао</a>
13	FEES	<a href="#">ФСК ЕЭС ао</a>
14	NLMK	<a href="#">НЛМК ао</a>
15	SIBN	<a href="#">Газпрнефть</a>

Наш **портфель** будет состоять из 4 акций: Газпрома (GAZP), ЛУКОЙЛ (LKOH), ГМКНорНикель (GMKN). Для того что бы рассчитать доли этих ценных бумаг в нашем портфеле воспользуемся MS Excel. Загрузим в Excel дневные котировки этих акций и значения индекса.

	A	B	C	D	E
1	Дата	GAZP	GMKN	LKOH	MICEX LC
2	02.09.2009	159.36	3285.01	1566	1751.81
3	03.09.2009	158.5	3297.98	1559.99	1785.13
4	04.09.2009	157.51	3259	1516	1770.26
5	07.09.2009	161.88	3343.04	1532	1814.75
6	08.09.2009	166	3409.99	1578.7	1877.74
7	09.09.2009	170.36	3412.01	1660.1	1893.98
8	10.09.2009	172.8	3360	1660	1883.21



После этого создадим колонку со значениями нашего инвестиционного портфеля. А так же рассчитаем **отклонение стоимости нашего портфеля** от стоимости капитализационного индекса **ММВБ**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Дата	GAZP	GMKN	LKOH	MICEX LC	Портфель	Ошибка	Акция	Веса		
2	02.09.2009	159.36	3285.01	1566	1751.81		0	3068838.3	GAZP		
3	03.09.2009	158.5	3297.98	1559.99	1785.13		0	3186689.1	GMKN		
4	04.09.2009	157.51	3259	1516	1770.26		0	3133820.5	LKOH		
5	07.09.2009	161.88	3343.04	1532	1814.75		0	3293317.6	Сумма		0
6	08.09.2009	166	3409.99	1578.7	1877.74		0	3525907.5	Ср.Ошибка:		4828802
7	09.09.2009	170.36	3412.01	1660.1	1893.98		0	3587160.2			
8	10.09.2009	172.8	3360	1660	1883.21		0	3546479.9			

Формула расчета стоимости портфеля равняется:

```
=B2*F$K$2+C2*F$K$3+F$K$4*D2
```

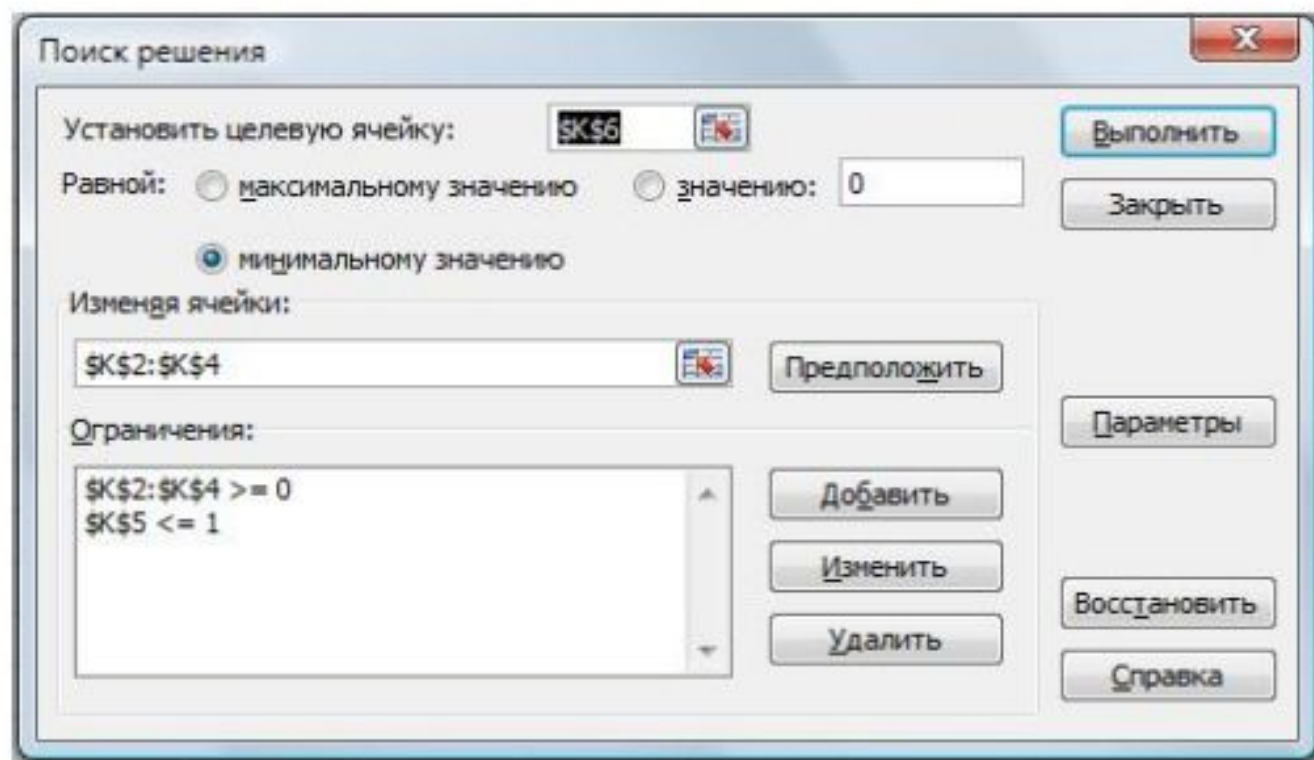
Ошибка отклонения:

```
=(E2-G2)*(E2-G2)
```

Так же в ячейке "K6" рассчитаем среднюю ошибку, которую будем минимизировать.

`=СРЗНАЧ (H2 : H251)`

А так же в ячейке "K5" рассчитаем сумму весов, это потребуется нам в дальнейшем для создания ограничения на веса. Для расчета весов нашего портфеля воспользуемся надстройкой Excel «Поиск решений».





В целевую ячейку введем среднюю ошибку. Функцию эту мы минимизируем, поэтому поставим условие минимизации. Под изменяемыми ячейками стоит диапазон весов наших акций. Ограничения накладываем на веса, что бы их сумма была меньше 1 и они были не отрицательными. В итоге получаем значения весов для нашего портфеля.

J	K
<b>Акция</b>	<b>Весы</b>
GAZP	0.024847
GMKN	0.189443
LKOH	0.78571
<b>Сумма</b>	<b>1</b>
<b>Ср.Ошибка:</b>	<b>3654.845</b>

Акции Лукойла составляют 78.5%, акции НорНикеля 19% и акции Газпрома 2.5%.

Графическая иллюстрация стоимость индекса и стоимость нашего портфеля представлена ниже.



#### Заключение

**Индексный метод торговли** эффективно используется многими портфельными управляющими. Главное достоинство этого метода – это следование за рынком (рыночным индексом) и максимальная **диверсификация рисков**.

## 4. Модель квази-Шарпа

**Формирование инвестиционного портфеля на основе Quasi-Sharpe model**

Для **эффективной** работы на **нестабильных фондовых рынках** была предложена новая модель формирования инвестиционного портфеля, которая получила название **модель Quasi-Sharpe**. Эта модель основана на взаимосвязи доходности каждой ценной бумаги из всего множества  $N$  ценных бумаг с доходностью единичного портфеля их этих бумаг. В общих чертах модель «Квази-Шарпа» сильно походит на модель предложенную У. Шарпом, но есть некоторые отличия. Рассмотрим основные допущения модели «Квази-Шарпа»:

1. Доходность ценной бумаги рассчитывается как математическое ожидание доходностей. Это допущение есть и в модели Шарпа.
2. Единичный портфель представляет собой портфель, состоящий из всех рассматриваемых ценных бумаг, взятых в одинаковой пропорции. В модели Шарпа за эталонный портфель (бенчмарк) берется так называемый рыночный портфель, динамику которого часто описывает фондовый индекс. Для российского фондового рынка это индекс РТС (RTSI), для украинского рынка индекс ПФТС, для американского фондового рынка это S&P 500.

3. Доходность ценной бумаги прямо пропорционально доходности единичного портфеля. То же предположение в модели Шарпа для рыночного портфеля.

4. Риск ценной бумаги рассчитывается как чувствительность изменения доходности ценной бумаги от изменения доходности единичного портфеля. Аналогично для модели Шарпа.

5. В отличии от модели Шарпа, за безрисковую ставку берется средняя доходность единичного портфеля, а не государственные обязательства.

**Модель «Квази – Шарпа»** соединяет доходность ценной бумаги с доходностью единичного портфеля и риском этой ценной бумаги с помощью функции линейной регрессии. **Формула доходности ценной бумаги** следующая:

$$R_i = \bar{R}_i + \beta_i (R_{sp} - \bar{R}_{sp});$$

$R_i$  - доходность ценной бумаги;

$R_{sp}$  - доходность единичного портфеля;

$\beta_i$  - коэффициент чувствительности к изменению доходности ценной бумаги, коэффициент регрессии в уравнении доходности;

$\bar{R}_i$  – средняя доходность ценной бумаги;

$\bar{R}_{sp}$  – средняя доходность единичного портфеля.

Необходимо сказать несколько слов об измерении риска в данной модели. **Риск** измеряется с помощью коэффициента бета ( $\beta$ ), который характеризуется степенью чувствительности к изменению доходности единичного портфеля. Чем выше коэффициент бета, тем сильнее изменяется доходность ценной бумаги от колебания доходности единичного портфеля.

В модели «Квази-Шарпа » риск ценной бумаги представляет собой совокупность коэффициента бета и остаточного риска ( $\sigma_{ri}$ ). Остаточным риском называют степень разброса значений доходности ценной бумаги относительно линии регрессии.

**Доходность в модели «Квази – Шарпа»** рассчитывается как:

$$R_p = \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i \cdot W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i);$$

**Риск** же рассчитывается по следующей формуле:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot \sigma_{sp} + \sum_{i=1}^N (\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2)};$$

Задача **формирования оптимального портфеля по модели «Квази-Шарпа»**, где мы максимизируем доходность инвестиционного портфеля и устанавливаем допустимый уровень риска, будет выглядеть следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i \cdot W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i) \rightarrow \max; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot \sigma_{sp}^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2)} \leq \sigma_{req}; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1. \end{array} \right.$$

**Обратная задача формирования оптимального портфеля**, где мы минимизируем общий риск инвестиционного портфеля с фиксированным уровнем доходности, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i \cdot W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i) \geq R_{req} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot \sigma_{sp}^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^2)} \rightarrow \min; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1. \end{array} \right.$$

Давайте на конкретном примере рассмотрим **применение модели «Квази – Шарпа» для российского фондового рынка**. Данные по котировкам возьмем с сайта [finam.ru](http://finam.ru) (или сайта биржи). За последний год возьмем котировки таких крупных компаний, как Газпром (GAZP), Аэрофлот (AFLT), Якутэнерго (YKEN), Сбербанк (SBER), Лукойл (LKOH) и ГК Норникель (GMKN). Мы сразу отбросим из рассмотрения акции Газпрома, так как за рассматриваемый год они показали отрицательную прибыль. Итак, занесем все данные в таблицу Excel. На рисунке ниже показаны месячные данные по стоимости акций этих



	A	B	C	D	E
1	<b>AFLT</b>	<b>YKEN</b>	<b>SBER</b>	<b>LKOH</b>	<b>GMKN</b>
2	43.7	0.383	69.21	1686.86	4049.83
3	52.5	0.498	82.94	1693.38	4235.74
4	56.48	0.625	88.41	1686.73	4711.33
5	55.5	0.65	76.3	1574	4590
6	68.01	0.694	85.8	1670.5	5430
7	62.17	0.75	78.6	1670.48	5652.9
8	57.1	0.64	71	1523.06	5018.89
9	57.34	0.61	76.5	1615	4495
10	60.68	0.555	84.56	1720	4970
11	61.1	0.57	78.31	1629.99	5190
12	66.63	0.59	86.08	1733.04	5196.04
13	66.56	0.584	91.26	1749.06	5361

Следующим этапом рассчитаем **доходности этих акций** по следующей формуле:

$$R_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}};$$

Где:

$R_i$  - текущая доходность акции;

$P_i$  - текущая стоимость акции;

$P_{i-1}$  - стоимость акции в предыдущем периоде.

Формула в Excel будет выглядеть следующим образом:



```
= (A3-A2) / A2
```

И аналогично рассчитываем **доходности всех акций**. На рисунке ниже показан расчет доходности по акциям. Каждый столбец представляет месячные доходности каждой акции.

Следующим этапом, для каждой акции рассчитываем **среднее значение доходности за весь год**, то есть за все временные отрезки. Формула для расчета следующая:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^T R_i^t}{T};$$

$R_{it}$  - доходность  $i$ -ой акции за период  $t$ ;

$T$  - рассматриваемое количество временных периодов (в нашем случае 12).



Аналогично рассчитываются остальные доходности акций.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	AFLT	YKEN	SBER	LKOH	GMKN	Доходность				
2	43.7	0.383	69.21	1686.86	4049.83					
3	52.5	0.498	82.94	1693.38	4235.74	0.201373	0.300261	0.198382	0.003865	0.045906
4	56.48	0.625	88.41	1686.73	4711.33	0.07581	0.25502	0.065951	-0.00393	0.11228
5	55.5	0.65	76.3	1574	4590	-0.01735	0.04	-0.13698	-0.06683	-0.02575
6	68.01	0.694	85.8	1670.5	5430	0.225405	0.067692	0.124509	0.061309	0.183007
7	62.17	0.75	78.6	1670.48	5652.9	-0.08587	0.080692	-0.08392	-1.2E-05	0.04105
8	57.1	0.64	71	1523.06	5018.89	-0.08155	-0.14667	-0.09669	-0.08825	-0.11216
9	57.34	0.61	76.5	1615	4495	0.004203	-0.04688	0.077465	0.060365	-0.10438
10	60.68	0.555	84.56	1720	4970	0.058249	-0.09016	0.105359	0.065015	0.105673
11	61.1	0.57	78.31	1629.99	5190	0.006922	0.027027	-0.07391	-0.05233	0.044266
12	66.63	0.59	86.08	1733.04	5196.04	0.090507	0.035088	0.099221	0.063221	0.001164
13	66.56	0.584	91.26	1749.06	5361	-0.00105	-0.01017	0.060177	0.009244	0.031747
14				Средняя доходность		0.043332	0.046537	0.03087	0.004697	0.029345

Далее рассчитаем **доходность единичного портфеля**. Сделав необходимые расчеты, рассчитаем доходности единичного портфеля и его среднюю доходность за все периоды. Доходность единично портфеля представляет собой доходность портфеля составленного из используемых акций, взятых в равных пропорциях. **Доходность единичного**  $R_{sp}^t$  ается следующим образом:

$$R_{sp}^t = \frac{\sum_{i=1}^N R_i^t}{N};$$

Где:

$R_{sp}^t$  – доходность единичного портфеля;

$R_i^t$  – доходность  $i$ -ой ценной бумаги за период  $t$ .

Средняя доходность единичного портфеля за все периоды рассчитывается

т:

$$\bar{R}_{sp} = \frac{\sum_{t=1}^T R_{sp}^t}{T};$$

$\bar{R}_{sp}$  средняя доходность единичного портфеля;

$T$  – рассматриваемое количество временных периодов;

$R_{sp}^t$  – доходность единичного портфеля.





Далее рассчитаем **чувствительность изменения доходности акции** от изменения доходности единичного портфеля.

Чувствительность показывает коэффициент бета ( $\beta$ ). И формула его вычисления следующая:

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^T [(R_i^t - \bar{R}_i) \cdot (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})]}{\sum_{t=1}^T (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2};$$

Для упрощения расчета посчитаем сначала знаменатель коэффициента бета, он для всех акций будет одинаков, а после числитель.

формуле:

```
=СТЕПЕНЬ( (K3-$K$15) ; 2)
```

И в ячейке L14 происходит расчет непосредственно знаменателя по формуле:

```
=СУММ(L3:L13)
```



Для вычисления числителя по периодам коэффициента бета сначала воспользуемся формулой.

$= (F3 - F\$14) * (\$K3 - \$K\$15)$  для акций Аэрофлота, колонка M

Аналогично для других акций.

Суммируем полученные результаты за все периоды, то есть непосредственно рассчитываем числителя. Расчеты находятся в ячейках L14-Q14 по формулам:

```
=СУММ(L3:L13)
```

Коэффициент бета ( $\beta$ ) будет рассчитан как отношение числителей к знаменателю.

```
=M14/$L$14
```

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Доходность					Доходность ЕП	Знаменатель	Числитель_1	Числитель	Числитель	Числитель_4	Числитель
2												
3	0.201373	0.300261	0.198382	0.003865	0.045906	0.149957326	0.014161298	0.018807132	0.030194	0.019934	-9.89768E-05	0.0019707
4	0.07581	0.25502	0.065951	-0.00393	0.11228	0.10102682	0.00490991	0.002275757	0.014609	0.002458	-0.000604287	0.0058113
5	-0.01735	0.04	-0.13698	-0.06683	-0.02575	-0.0413826	0.005232884	0.004389714	0.000473	0.012142	0.005174411	0.0039857
6	0.225405	0.067692	0.124509	0.061309	0.183007	0.132384307	0.010287687	0.018467431	0.002146	0.009498	0.005742042	0.0155856
7	-0.08587	0.080692	-0.08392	-1.2E-05	0.04105	-0.009611283	0.00164571	0.005241353	-0.00139	0.004657	0.000191026	-0.0004748
8	-0.08155	-0.14667	-0.09669	-0.08825	-0.11216	-0.105063208	0.018501245	0.016986376	0.026279	0.017351	0.012642582	0.019247
9	0.004203	-0.04688	0.077465	0.060365	-0.10438	-0.001845076	0.001075915	0.001283456	0.003064	-0.00153	-0.001825988	0.0043865
10	0.058249	-0.09016	0.105359	0.065015	0.105673	0.048826607	0.000319356	0.000266584	-0.00244	0.001331	0.001077925	0.001364
11	0.006922	0.027027	-0.07391	-0.05233	0.044266	-0.009605847	0.001645269	0.001476859	0.000791	0.00425	0.002313177	-0.0006052
12	0.090507	0.035088	0.099221	0.063221	0.001164	0.05784023	0.000722758	0.001268282	-0.00031	0.001838	0.001573378	-0.0007576
13	-0.00105	-0.01017	0.060177	0.009244	0.031747	0.017989527	0.000168131	0.000575483	0.000735	-0.00038	-5.89585E-05	-3.114E-05
14	0.043332	0.046537	0.03087	0.004697	0.029345		0.058670163	0.071038428	0.074154	0.07155	0.026126331	0.050482
15	Средняя доходность единичного портфеля					0.030956073	Бета (β)	1.210810122	1.263922	1.219522	0.445308644	0.8604373

Следующим этапом рассчитаем остаточный риск, который представляет собой степень разброса доходности ценной бумаги относительно линии регрессии. **Формула расчета остаточного риска** следующая:

$$\sigma_{ri} = \frac{\sum_{t=1}^T (R_i^t - \bar{R}_i - \beta \cdot (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp}))^2}{T};$$

Сначала рассчитываем остаточный риск на каждый период:

=СТЕПЕНЬ(F3-F\$14-M3\*M\$15;2)

После рассчитываем остаточный риск за все периоды (R14-V14):

```
=СРЗНАЧ(R3:R13)
```

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	
1	Доходность					Доход	Знамен	Числитель	Числитель	Числите	Числетел	Числитель	Остаточный риск					
2																		
3	0.20137	0.30026	0.19838	0.00387	0.04591	0.15	0.0142	0.0188071	0.030194	0.01993	-9.9E-05	0.001971	0.018298	0.046467	0.020507	6.20399E-07	0.000221	
4	0.07581	0.25502	0.06595	-0.0039	0.11228	0.101	0.0049	0.0022758	0.014609	0.00246	-0.0006	0.005811	0.000883	0.036107	0.001029	6.98037E-05	0.006074	
5	-0.0174	0.04	-0.137	-0.0668	-0.0258	-0.0414	0.0052	0.0043897	0.000473	0.01214	0.005174	0.003986	0.004356	5.09E-05	0.033362	0.005451543	0.003425	
6	0.22541	0.06769	0.12451	0.06131	0.18301	0.1324	0.0103	0.0184674	0.002146	0.0095	0.005742	0.015586	0.025508	0.00034	0.006733	0.002921931	0.01967	
7	-0.0859	0.08069	-0.0839	-1E-05	0.04105	-0.0096	0.0016	0.0052414	-0.00139	0.00466	0.000191	-0.00047	0.018373	0.001289	0.014512	2.29818E-05	0.000147	
8	-0.0816	-0.14667	-0.0967	-0.0883	-0.1122	-0.1051	0.0185	0.0169864	0.026279	0.01735	0.012643	0.019247	0.021156	0.051265	0.022118	0.009717392	0.024984	
9	0.0042	-0.04688	0.07746	0.06037	-0.1044	-0.0018	0.0011	0.0012835	0.003064	-0.00153	-0.00183	0.004386	0.001655	0.009464	0.002348	0.003190165	0.018907	
10	0.05825	-0.09016	0.10536	0.06502	0.10567	0.0488	0.0003	0.0002666	-0.00244	0.00133	0.001078	0.001364	0.000213	0.017852	0.005309	0.003580655	0.005648	
11	0.00692	0.02703	-0.0739	-0.0523	0.04427	-0.0096	0.0016	0.0014769	0.000791	0.00425	0.002313	-0.00061	0.001459	0.000421	0.012092	0.003370775	0.000238	
12	0.09051	0.03509	0.09922	0.06322	0.00116	0.0578	0.0007	0.0012683	-0.00031	0.00184	0.001573	-0.00076	0.002083	0.000122	0.004371	0.003343581	0.000758	
13	-0.0011	-0.01017	0.06018	0.00924	0.03175	0.018	0.0002	0.0005755	0.000735	-0.00038	-5.9E-05	-3.1E-05	0.002032	0.003322	0.000886	2.09144E-05	5.9E-06	
14	0.04333	0.04654	0.03087	0.0047	0.02935		0.0587	0.0710384	0.074154	0.07155	0.026126	0.050482	0.008729	0.015155	0.011206	0.002880942	0.00728	
15	Средняя доходность единичного портфеля					0.031	Бета (β)	1.2108101	1.263922	1.21952	0.445309	0.860437	Риск единичного портфеля			0.069922674		

При формировании инвестиционного портфеля из этих акций нам еще потребуется рассчитать **риск единичного портфеля**:

$$\sigma_{sp} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2}{T}};$$

Риск единичного портфеля равен (U15):

=КОРЕНЬ (L14/12)



Итак, давайте обобщим все полученные данные в таблицу.

Название	Коэффициент $\beta$	Средняя доходность	Остаточный риск
AFLT	1,21	4,3%	0,8%
YKEN	1,26	4,6	1,5%
SBER	1,21	3%	1,1%
LKOH	0,44	4,6%	0,2%
GMKN	0,86	2,9%	0,7%

Для расчета долей в инвестиционном портфеле воспользуемся надстройкой Excel «Поиск решений» (в английском варианте «Solver»).

### **Расчет долей в инвестиционном портфеле на основе модели «Квази – Шарпа»**

Создадим новый рабочий лист в Excel и построим следующую таблицу. Используя поиск решений нам необходимо найти доли акций в новом инвестиционном портфеле. На рисунке, они помечены синей колонкой. Перед нами стоит прямая задача максимизации доходности инвестиционного портфеля с ограничением на риск. Максимальный риск установим на отметке 5%. Заполним дополнительные столбцы для **расчета доходности и риска.**



Формула расчета целевой ячейки с доходностью портфеля (С9) будет следующая.

=СУММПРОИЗВ(В2:В6;G2:G6)+F4\*СУММПРОИЗВ(С2:С6;G2:G6)

Формула расчета риска инвестиционного портфеля:

A screenshot of an Excel formula bar. The formula bar is highlighted in light blue and contains the text "=КОРЕНЬ(J7\*E4+E4+K7)". The text is in a light blue font, matching the background of the formula bar.

Для нахождения оптимальной структуры портфеля загрузим надстройку «Поиск решений». Выберем целевую функция – ячейку с доходностью (С9). Ее мы будем максимизировать. Для этого будем изменять доли акций в портфеле – диапазон ячеек С2:G6. Необходимо так же наложить ограничения на риск и веса акций. Веса должны быть положительны, сумма их должна не превышать единицы и риск рассчитанный в ячейке С10 должен быть меньше 5%.



# Поиск решения



Установить целевую ячейку:

\$C\$9



Выполнить

Равной:  максимальному значению

значению:

0

Закреть

минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$G\$2:\$G\$6



Предположить

Ограничения:

\$C\$10 <= 5%

\$G\$2:\$G\$6 >= 0

\$G\$7 <= 1

Добавить

Изменить

Удалить

Параметры

Восстановить

Справка



## **Заключение**

Итак, проведем качественное сравнение трех моделей формирования инвестиционного портфеля: модель Г. Марковица, модель У. Шарпа (CAPM) и модель «Квази – Шарпа».

**Модель Марковица** рационально использовать на стабильных рынках с повышающей доходностью, когда портфель формируется из акций, принадлежащих различным отраслям. Недостаток этой модели – это оценка доходности как среднеарифметическое доходностей за предыдущие периоды.

**Модель У. Шарпа** применяется для рассмотрения большого количества ценных бумаг, охватывающих большую часть фондового рынка. Недостаток этой модели – это необходимость прогнозирования доходности фондового рынка и безрисковую ставку доходности.

**Модель «Квази- Шарпа»** рационально использовать при рассмотрении небольшого числа ценных бумаг, принадлежащих одной или нескольким отраслям. С помощью этой модели хорошо поддерживать оптимальную структуру уже созданного инвестиционного портфеля. Недостатком этой модели можно считать не учет глобальных тенденций, которые влияют на доходность портфеля.