

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

член-корр. РАН И.Г. Поспелов,

ВЦ РАН, отдел математического моделирования экономических систем

*Заведующий отделом академик РАН А.А.ПЕТРОВ*

**В течение последних 30 лет в отделе разрабатываются модели советской и российской экономики с учетом особенностей фактически складывающихся экономических отношений и институтов.**

- Модели позволяют дать системно согласованные качественные и количественные оценки состояния экономики, в том числе тех показателей, которые не наблюдаются экономической статистикой.**
- Модели позволяют проводить сценарные расчеты для оценки последствий реализации тех или иных вариантов макроэкономической политики.**
- Модели использовались для анализа эволюции структуры советской и российской экономики, а результаты их исследования составляют "летопись" экономической истории нашей страны в последние два десятилетия.**

# ЭКОНОМИКА = система управления производством, распределением и потреблением благ (ресурсов, товаров и услуг)

- **Сложные системы** – это системы, способные к **необратимому саморазвитию** (живой организм; биосфера; Земля в целом; человеческое общество и его подсистемы: технология, экономика, язык)
- Сложные системы **неэргодичны**, т.е. не показывают всех своих возможностей на наблюдаемой траектории. Исследование сложных систем выводит нас за пределы применимости **эмпирического метода**, которой обеспечил триумф естественных наук в последние 300 лет.
- Опыт показывает, что сложной системы получается **много моделей**, не выводящихся как частный случай из какой бы то ни было универсальной «супермодели». Частные модели описывают **разные ракурсы** исследуемой системы. Они оперируют разными наборами понятий и пренебрегают отнюдь не малыми отклонениями от учтенных в них закономерностей.
- Систему моделей сложной системы можно рассматривать как математическую **категорию**. Понятия теории выступают в этом случае не как собрания частных случаев, а как **морфизмы**, отображающие одну частную модель в другие.

# Типы моделей экономики

## Макромодели

(модели целостных экономических систем)

## Микромодели

(модели типичных предприятий или рынков)

Модели конкретных предприятий или рынков

Агрегирование ?

Типизация ?

Модели взаимодействия экономических агентов

**Балансовые**  
Планирование в рамках технологических ограничений

**«Теоретические»**  
формализация содержательных теорий

**Имитационные**  
сборка из «простых» частей

**Эконометрические**  
поиск устойчивых корреляций наблюдаемых показателей

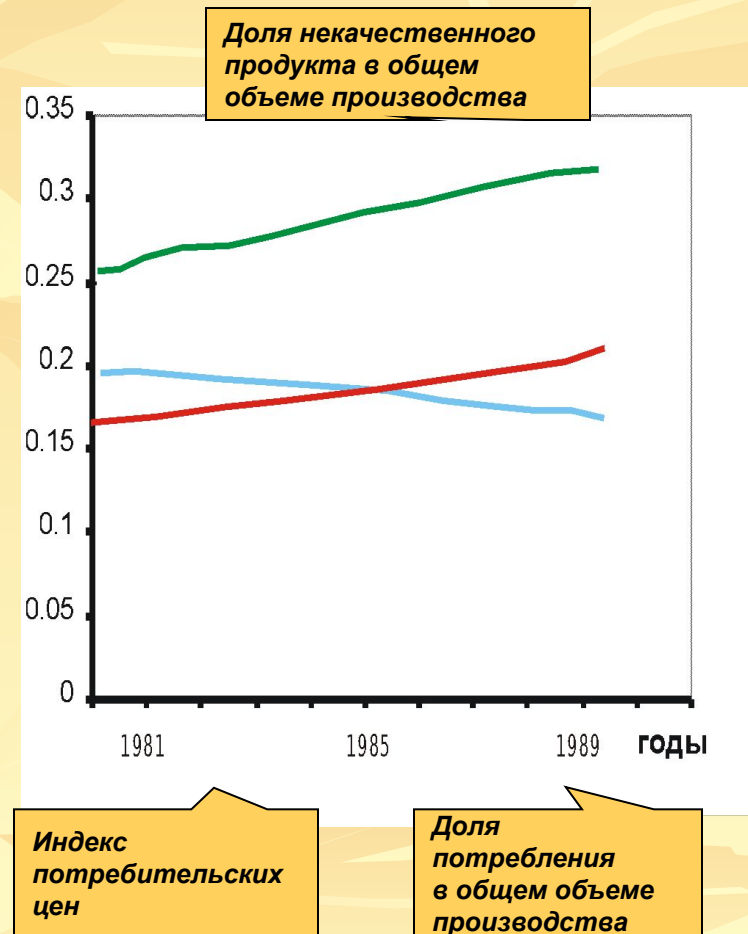
Модели САРЭ с 1990х ВЦ  
**Учет сложившихся экономических отношений**

**Вычислимые модели равновесия**  
с 1990х наиболее популярные

- **Динамическое равновесие** = баланс сил
- **Статистическое равновесие** = баланс вероятностей переходов
- **Экономическое равновесие** = баланс интересов субъектов

# ПЛАНОВАЯ ЭКОНОМИКА С КООПЕРАТИВНЫМ СЕКТОРОМ (1985-1989, Председатель Совета министров СССР - Н.И. Рыжков)

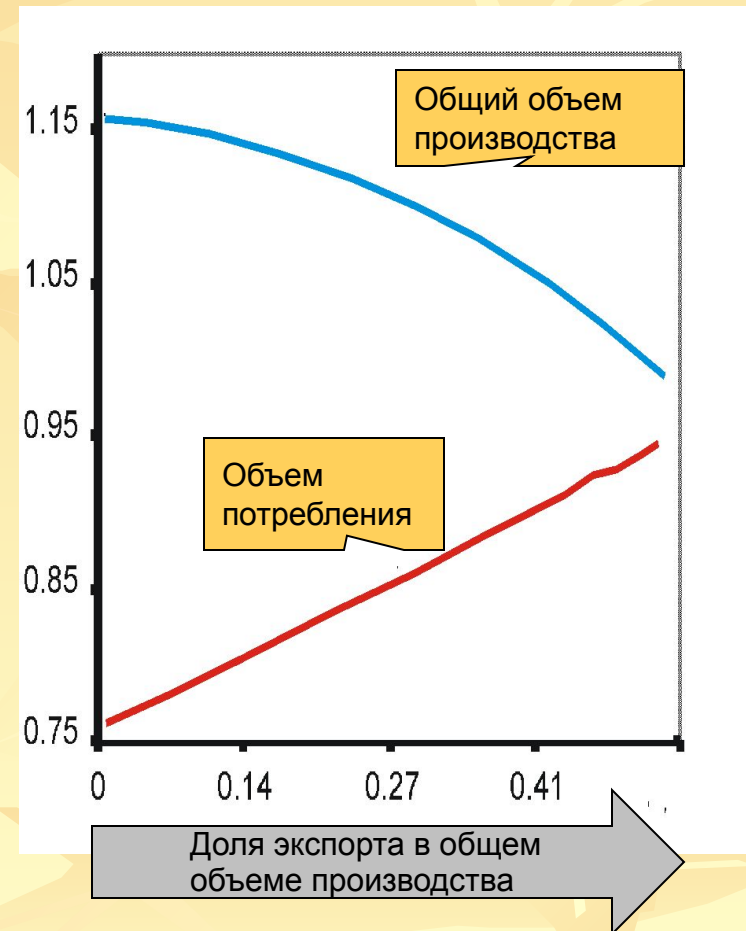
- Модель плановой экономики построена в 1986г. по заказу Госбанка СССР. В ней описаны механизмы функционирования плановой экономики.
- Модель описывает феномен «отчетной экономики»: если запланированный темп роста больше допустимого, то по данным планирующих органов происходит рост производительности труда, замещение труда капиталом и рост благосостояния населения при постоянных ценах, а фактически происходит снижение качества продукции, рост объемов незавершенного строительства и дефицит потребительских благ.
- В 1988г. модель была модифицирована так, чтобы учесть возникновение кооперативного сектора на основе аренды производственных мощностей, не загруженных государственным заказом.
- Оказалось, что кооперативный сектор несколько сглаживает дефекты плановой экономики (увеличивается доля потребления, снижается доля некачественного продукта), но в ограниченных масштабах и ценой усиления инфляции.



# ЭКОНОМИКА САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

(1989-1991, Премьер-министр СССР - В.С. Павлов)

- Модель построена в 1990г. Описана экономика, в которой предприятия, оставшись в государственной собственности, получили право самостоятельно распоряжаться своей продукцией, произведенной сверх госзаказа. Но в условиях распада потребительского рынка предприятия вынуждены были снабжать свои трудовые коллективы потребительскими товарами. В модели учтены **бартерный обмен** между предприятиями и **чёрный рынок** потребительских продуктов.
- Модель описывает тенденцию к **сокращению производства** за счет **свертывания отраслей ВПК** при **росте экспорта сырья**. При этом в краткосрочном плане объем потребления может даже расти. Эта тенденция проявляется тем ярче, чем выше доходность чёрного рынка.





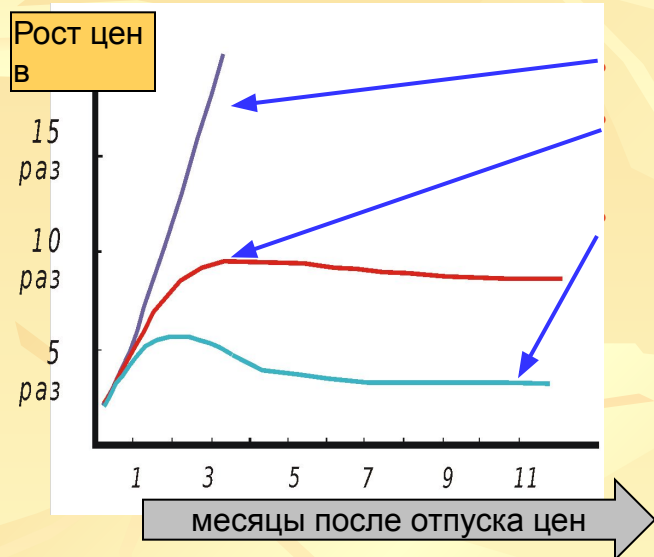
# ПРОГНОЗ ПОСЛЕДСТВИЙ ЛИБЕРАЛИЗАЦИИ ЦЕН В ПЛАНОВОЙ ЭКОНОМИКЕ

(1992, и.о. Председателя правительства РФ - Е.Т. Гайдар)

Расчеты произведены в 1990г., за 2 года до реформы

• Модель построена в 1990г. по запросу Комиссии по экономической реформе ВС СССР оценить **последствия либерализации цен**. Представленные оценки Комиссия не приняла во внимание.

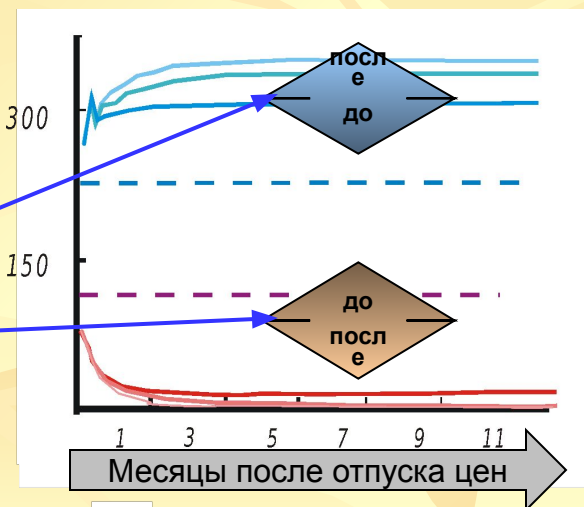
• Модель предсказала катастрофический **рост цен**, **резкое расслоение населения по доходам** и **потерю им сбережений** при неизбежном **резком сокращении государственного потребления**.



Цены неограниченно растут при сохранении 3/4 гос. потребления  
Фактически за 1992г. гос. потребление было сокращено на 60%,  
и за первые три месяца этого года цены выросли в 10 раз.

Рост цен мог быть относительно небольшим лишь при сокращении гос. потребления на 3/4 за полгода

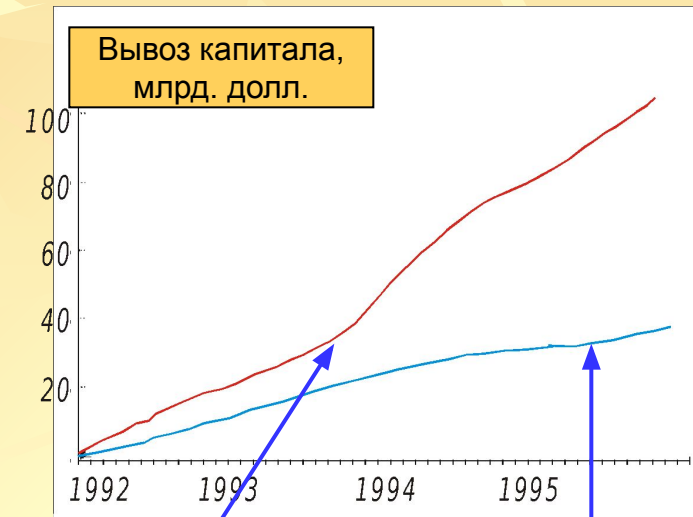
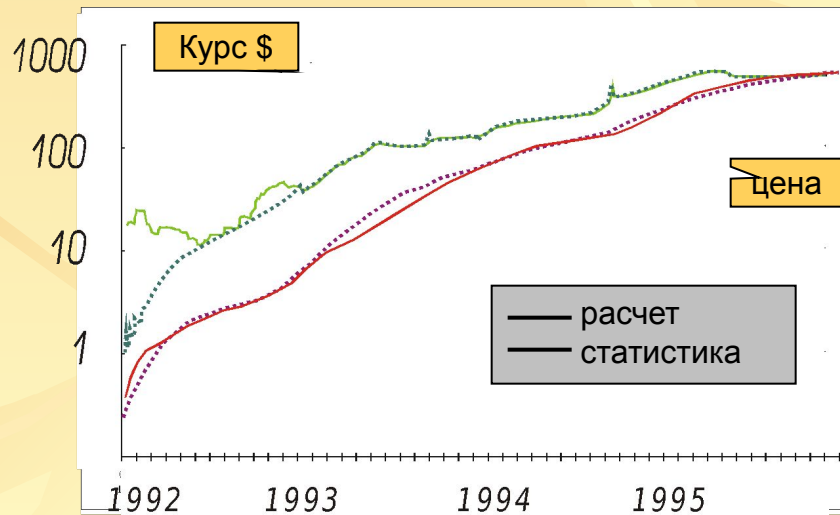
Доходы, млрд. руб. в год



- Во всех случаях возникала резкая дифференциация доходов **занятых коммерцией и производством** и **занятых в бюджетной сфере**
- Подробное исследование модели показало, что были и другие, **более мягкие варианты** либерализации, но они требовали точной и жесткой налоговой и бюджетной политик.

# ЭКОНОМИКА ПЕРИОДА ВЫСОКОЙ ИНФЛЯЦИИ (1992-1995 гг., Председатель правительства РФ - В.С. Черномырдин)

- Модель построена в 1993г. по заказу Центра экономической конъюнктуры при Правительстве РФ.
- Модель описывает экономику, сложившуюся в России после реформы 1992г., когда в сфере обращения возникла **иерархия монополий**: экспортеры и банки → импортеры → промышленные предприятия. В модели описаны обращение неплатежей, льготное кредитование производителей Центральным банком (практиковалось в 1992-1994гг.), функционирование банков в условиях, когда отсутствуют сбережения населения, а процент за кредит меньше темпа инфляции.
- Модель хорошо предсказывала основные макропоказатели состояния экономики и особенно точно изменение **курса** доллара и потребительских **цен**.



- Модель использовалась для оценки вывоза капитала из страны **экспортерами** и **импортерами**.
- С помощью модели систематически проводился анализ последствий разных вариантов государственной макроэкономической политики и были выявлены **потенциально опасные** жесткие монетаристские варианты, грозившие дефляционным шоком экономики. С помощью модели было проанализировано внутреннее экономическое содержание событий "черного вторника" 11 октября 1994г.

# ЭКОНОМИКА ПЕРИОДА ФИНАНСОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ (1995-1998гг., Председатели правительства РФ – В.С. Черномырдин, С.В. Кириенко)

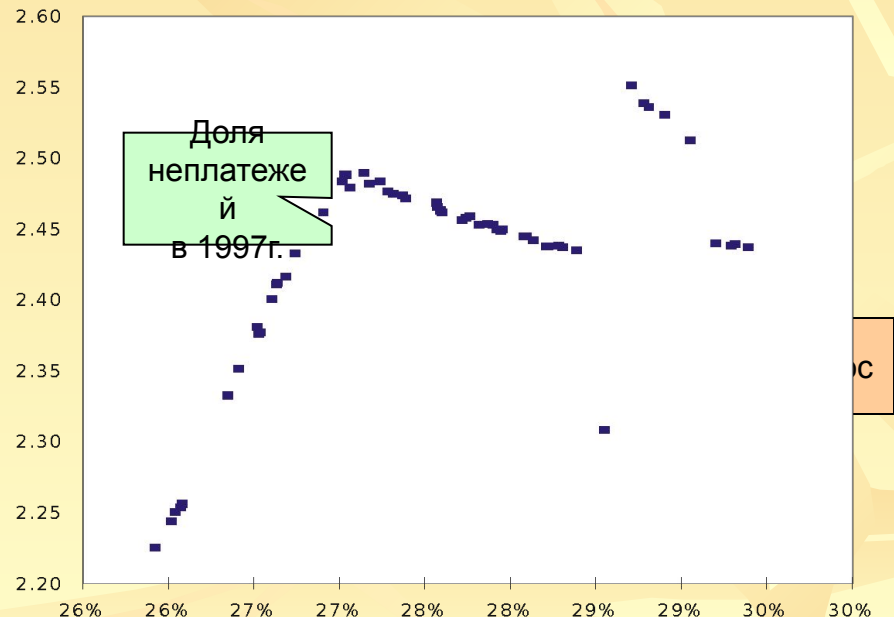
- Модель построена в 1996г. по заказу Главного управления ЦБ РФ по Свердловской области. В 1997-1998г. модель использовалась для **регулярных аналитических и прогнозных расчетов** состояния экономики и кредитно-денежной системы Свердловской области. По данным о состоянии экономики области на конец мая 1998г. с помощью модели было **предсказано, что в августе 1998г. наступит кризис банковской системы области.**

- Модель описывает экономику типичного российского региона периода "финансовой стабилизации", когда в результате приватизации руководство предприятий в массе перестало чувствовать ответственность за благосостояние трудового коллектива, Центральный банк прекратил льготное кредитование производителей и последние вынуждены были занимать деньги у коммерческих банков, коммерческие банки могли вкладывать свободные активы в ГКО.

- В модели описано обращение неплатежей, а также теневой оборот денег. С помощью модели был объяснен феномен спонтанного объединения промышленных и торговых предприятий под эгидой коммерческих банков.

- Показано, что неплатежи производителей и теневой оборот денег представляют собой разные проявления одного и того же механизма адаптации производителей к высоким издержкам обращения.

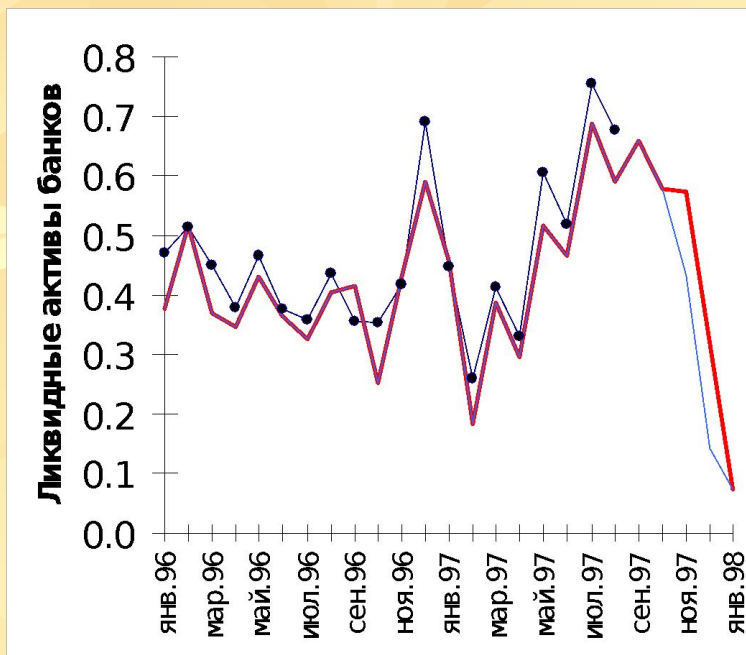
Средний уровень жизни в регионе



Доля неплатежей в оплате топлива

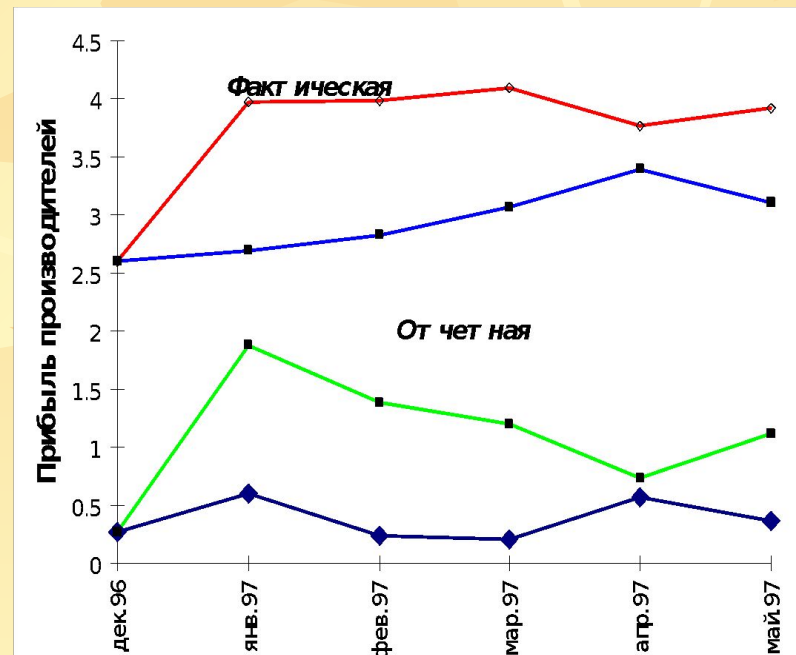


# ЭКОНОМИКА ПЕРИОДА ФИНАНСОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ (продолжение)



## Верификация модели

Модель воспроизводила динамику более чем 70 основных статистических показателей развития области в течении года с отклонением **менее 10%** и корреляцией **более 85%**



## Аналитические расчеты

С помощью модели проводились аналитические расчеты, например, что было бы, если теневой оборот исчез

# ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛА РОСТА РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ

(1999г., Председатель правительства РФ - Е.М. Примаков)

• Модель построена в 1999г. для оценки потенциала среднесрочного роста российской экономики в той ситуации, когда еще **сохраняется прежняя структура производства**, но уже произошло **оздоровление кредитно-денежной системы** и возникли достаточно конкурентные рынки товаров и капитала.

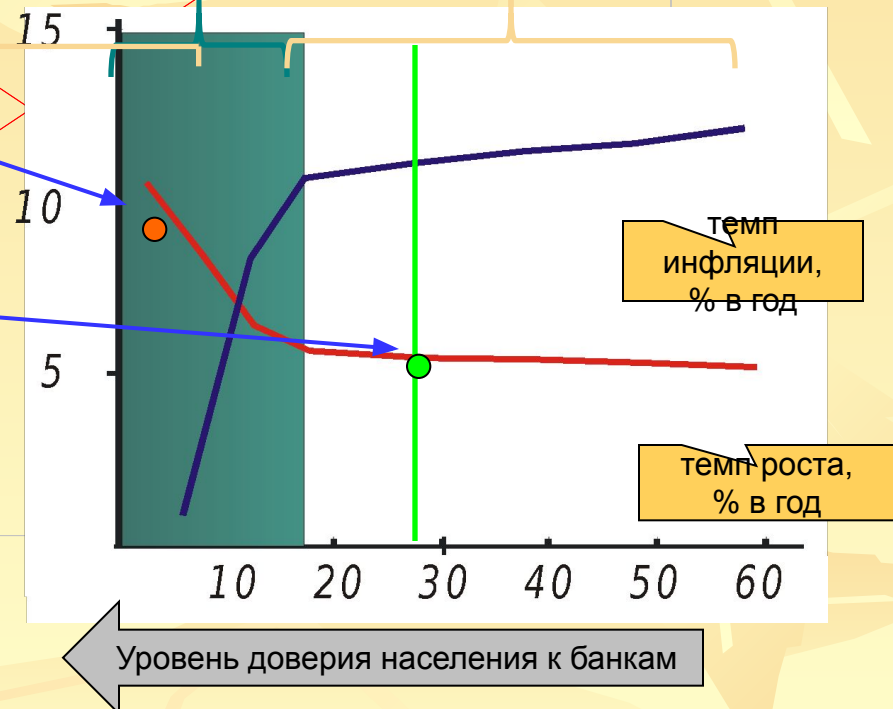
• В модели описана кредитно-денежная система с **разными механизмами эмиссии денег**, что позволило изучить проблему неинфляционного финансирования инвестиций в реальный сектор экономики.

Когда банки пользуются доверием населения, им **не требуется** государственная поддержка кредитования инвестиций.

Когда банки НЕ пользуются доверием, им **необходима** государственная поддержка кредитования инвестиций.

• Показано, что при существующей структуре реального сектора без иностранных инвестиций трудно ожидать стабильного реального роста более, чем **10% в год**

• При существующем уровне доверия населения к банковской системе экономический рост 5% в год возможен только при государственной поддержке кредитов в реальный сектор.



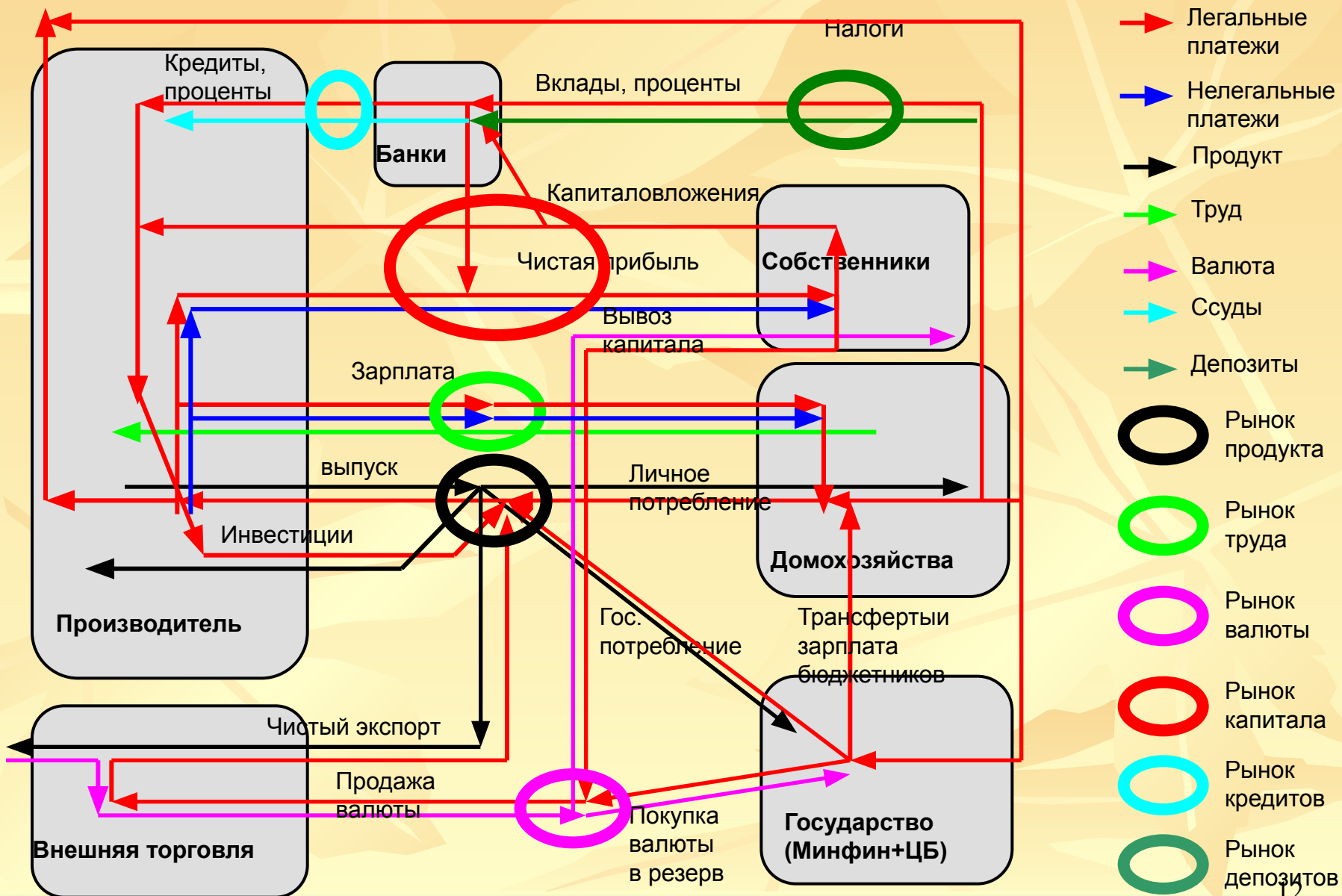
(мера доверия населения к банкам - процент, под который население готово класть деньги в банк)

# Модель экономики России для оценки теневого оборота (2004-2006)

- ❖ В модели производство продуктов, производство услуг и торговля объединяются в один сектор, а финансовый сектор рассматривается отдельно.
- ❖ Сопровождающие производство, распределение и потребление продукта финансовые потоки описываются как оборот 5 **финансовых инструментов**:
  - **наличных денег, остатков расчетных счетов, остатков корреспондентских счетов в ЦБ, банковских ссуд, банковских депозитов, иностранной валюты.**

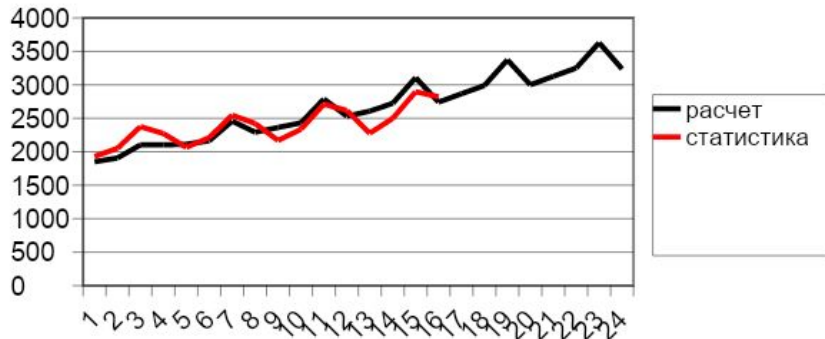
Продукт, труд и перечисленные финансовые инструменты образуют набор аддитивных величин, для которых в модели выписывается полная система балансов, причем потоки финансовых инструментов разделяются на легальные и теневые.
  - ❖ Развитие экономики, выраженное движением аддитивных величин, описывается в модели как результат деятельности 7 **экономических агентов**:
    - **Производителя**, представляющего совокупность нефинансовых коммерческих организаций,
    - **Банка**, представляющего совокупность финансовых коммерческих организаций,
    - **Населения**, представляющих физических лиц – потребителей и наемных работников,
    - **Собственника**, представляющего физических и юридических лиц, осуществляющих управление движением капитала между секторами национальной экономики и за пределы страны.
    - **Государства**, деятельность которого представлена в модели явно агрегированным описанием деятельности Министерства финансов и неявно – установлением различных параметров экономической политики (ставок налогов, норм резервов и др.).
    - **Центрального банка** *CB*, представленного в модели своими функциями эмитента национальной валюты, держателя валютных резервов и расчетного центра.
    - **Внешней торговли** *F*.

# Оценка теневого оборота в экономике России

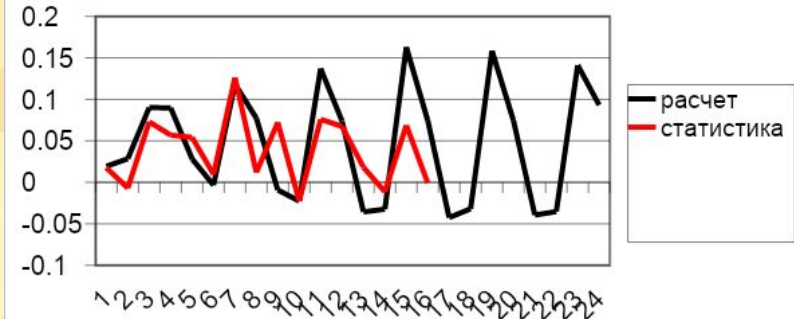


# Результаты прогнозных расчетов

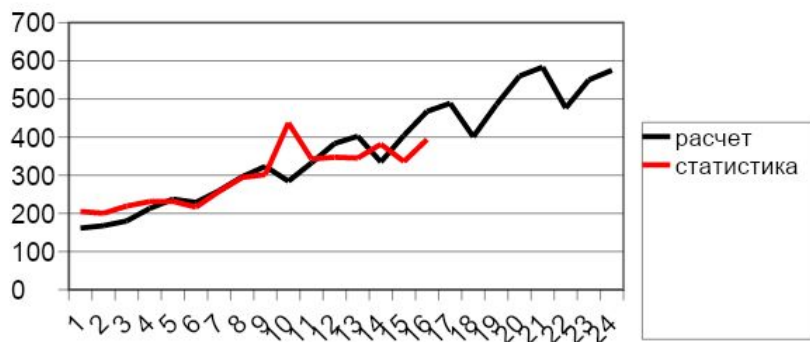
**ВВП, млрд. руб. 2000г. в квартал**



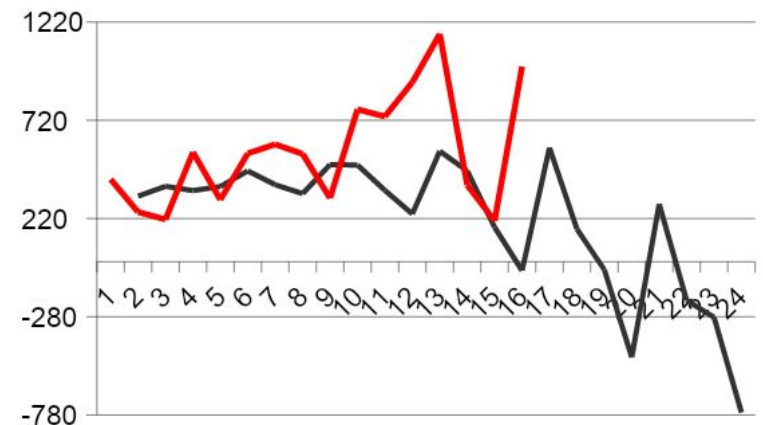
**инфляция, в квартал**



**НДС, млрд. руб. в квартал**



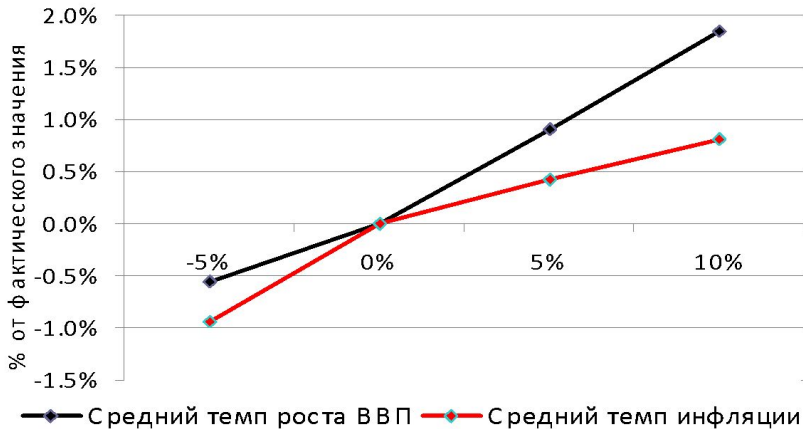
**Отток капитала за границу, млрд. руб**



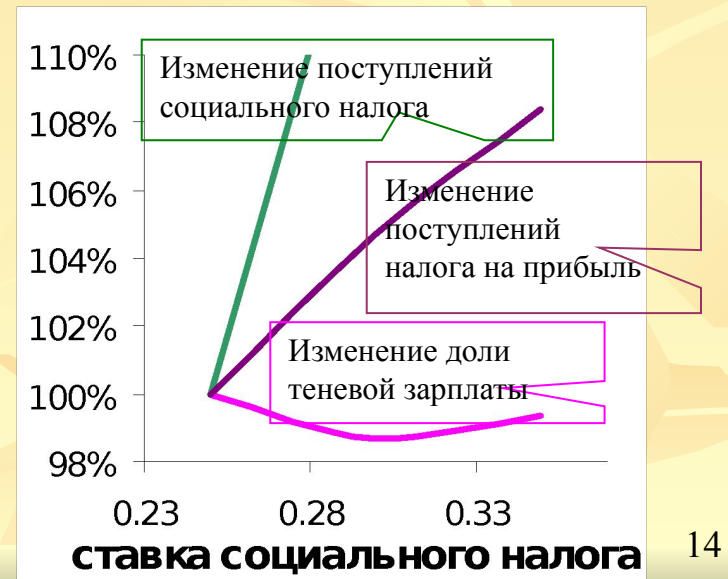
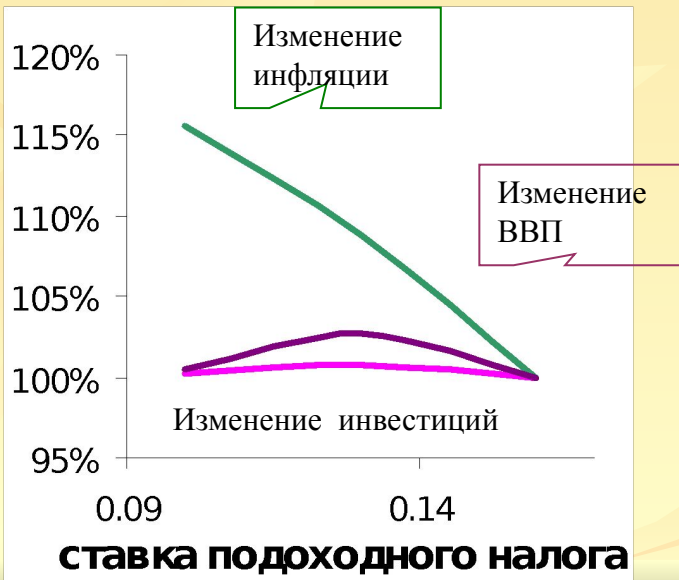
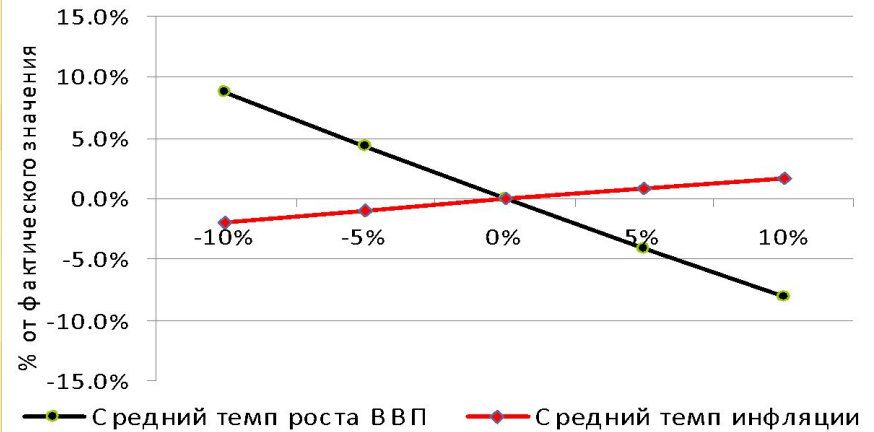


# Аналитические расчеты

## Эффект от прироста реальных доходов бюджетников



## Эффект от прироста государственных расходов



## Исходные представления структурного описания экономики

### *материальные балансы*

Вся бухгалтерия и вся экономическая статистика построены на следующей картине движения **материальных благ**: продуктов, услуг и ресурсов.

- Исчерпывающий список  $N$  всех физических и юридических лиц ( $|N| \sim 10^9$ ).
- Исчерпывающий список  $\square$  всех материальных благ ( $|\square| \sim 10^9$ ).
- В момент времени  $t$  весь наличный объем блага  $i \in \square$  разделен между агентами  $i \in \square$ ,

$$\underbrace{Q_i^v}_{\text{Скорость изменения запаса}} = \underbrace{X_i^v}_{\text{производство}} - \underbrace{C_i^v}_{\text{конечное потребление}} - \underbrace{V_i^v}_{\text{текущие затраты}} - \underbrace{Z_i^v}_{\text{капитальные затраты}} - \sum_{\mu \in N} \underbrace{(h_i^{\nu\mu} - h_i^{\mu\nu})}_{\text{передачи}}$$

Сложность этой системы превосходит возможности ее наблюдения и планирования, поэтому экономика, как система принятия решений по поводу производства, распределения и потребления

- всегда **децентрализована**
- нуждается в **механизмах агрегирования** (свертывания) информации.

**материальные балансы не могут адекватно описать движение общественных и информационных благ**

# Исходные представления структурного описания экономики

## финансовые балансы

Свертывание и передачу информации осуществляют **деньги**.

Каждому потоку обмена  $h_i^{v\mu}$  отвечает встречный поток платежей

$$H_i^{\mu\nu}(t) = \underset{\text{цена}}{p_i(t)} h_i^{v\mu}(t)$$

Умножая балансы на цены и складывая по группам агентов и продуктов, получаем **агрегированное описание**, в частности, **основной макроэкономический баланс**

$$\sum_{v \in S} \sum_{i \in \square} p_i (X_i^v - V_i^v) = \sum_{v \in S} \sum_{i \in \square} p_i \overset{\text{Потребление}}{C_i^v} + \sum_{v \in S} \sum_{i \in \square} p_i (Z_i^v + \overset{\text{Накопление}}{Q_i^v}) + \sum_{v \in S} \sum_{i \in \square} p_i \sum_{\mu \in N \setminus S} h_i^{v\mu} - \sum_{v \in S} \sum_{i \in \square} p_i \sum_{\mu \in N \setminus S} h_i^{\mu v}$$

*ВВП*
*Экспорт*
*Импорт*

Запасы денег – аддитивная величина

$$\underset{\text{скорость изменения запаса денег}}{W^v} = \sum_{\mu \in N} \sum_{i \in \square} (H_i^{\mu\nu} - H_i^{v\mu}) + \sum_{\mu \in N} (T^{\mu\nu} - T^{v\mu}) + \sum_{\mu \in N} (\overset{\text{скорость изменения долгов и сбережений}}{L^{\mu\nu}} - L^{v\mu}) + \sum_{\mu \in N} (R^{\mu\nu} - R^{v\mu})$$

*платежи*
*трансферты*
*проценты*

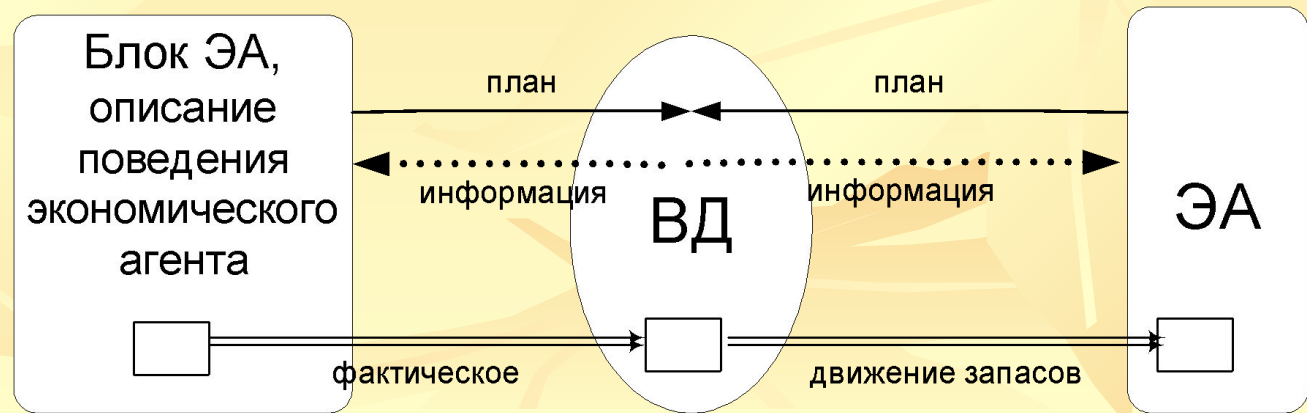
Потоки денег замкнуты  $\frac{d}{dt} \sum_{v \in N} W^v(t) = 0$

Деньги возникают в процессе **кредитной эмиссии** – одновременного увеличения активов (положительных запасов) и пассивов (отрицательных запасов)

## Исходные представления *описание поведения субъектов*

- ❖ **Экономический субъект** (потребитель, производитель, государство, торговец, и т.п.) *в модели* описывается как **лицо, принимающее решение**, в первую очередь относительно **потоков** аддитивных величин.
- ❖ Экономический субъект «не видит» всей системы, и при принятии решения опирается на **информационные переменные**: (цены, проценты, курсы, и т.п.)
- ❖ Поведение отдельного субъекта **хаотично**, но совокупное поведение массы субъектов, исполняющих сходные роли – **рационально** благодаря **синергетическим эффектам конкуренции** (отбора), **кооперации** и **подражания** (обучения)
- ❖ Поведение влиятельных индивидуумов (государства, монополий) описывается **сценариями**
- ❖ Масса сходных субъектов (производителей, потребителей банков) описывается как один **экономический агент** **принципом оптимальности**

### ■ **Экономическое равновесие**



# Исходные представления структурного описания экономики

## *принцип рациональных ожиданий*

В динамических моделях возникает парадокс:

Мы строим модель, чтобы дать прогноз конъюнктуры, а для построения модели надо знать, как агенты конъюнктуру прогнозируют

Варианты решения:

1. Наложить ограничения, чтобы будущее для агентов стало неважно
2. Рассматривать самоподобные режимы, что сводит задачу к статике
3. Рассматривать самосогласованный прогноз, т.е. **считать, что для прогнозирования агент пользуется именно той моделью, которую мы строим**

*Агенты согласуют свои планы на все будущее за счет подстройки все будущих (ожидаемых) значений информационных переменных (цен, процентов, курсов).*

План агент строит, исходя из своих целей и правильного прогноза доступных ему информационных переменных.

Такой подход представляется естественным для моделирования теневого оборота, поскольку агенты получаются «очень умными» и сами определяют какими лазейками и в какой степени пользоваться.

Любая альтернатива этому подходу приводит к «удвоению модели»: придется отдельно описывать как экономика развивается на самом деле и отдельно – что думают о ней агенты.



# Математическая форма модели: общая задача агента

$$\bar{\theta}^a \bar{K} \rightarrow \max$$

двойственные переменные имеют смысл цен

$$\dot{\Phi}^a = \alpha \Phi^a + r x^a + p y^a - \bar{\theta}^a v,$$

$$\xi^a$$

$$\dot{x}^a = R x^a + P y^a + \Phi^a,$$

$$\psi^a$$

$$g(t, x^a, y^a, \Phi^a) \geq 0,$$

$$\varphi^a$$

$$g(t, \cdot, \cdot, \cdot) \text{ – вогнута и однородна } x^a \frac{\partial g}{\partial x^a} + y^a \frac{\partial g}{\partial y^a} + \Phi^a \frac{\partial g}{\partial \Phi^a} = g$$

- ❖ Задача агента – это неавтономная задача оптимального управления со смешанными ограничениями. Считаем возможным обойтись достаточными условиями оптимальности в форме Лагранжа

## Система условий оптимальности – гамильтонова

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial}{\partial \Psi} H(t, \mathbf{q}, \Psi) \quad \dot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} H(t, \mathbf{q}, \Psi)$$

Это вызывает ассоциацию: «Динамическая система, типичные решения которой суть обратимые колебания или вращения вокруг положений равновесия с сохранением величин, связанных с симметриями системы».

# Отличие от физики

- ❖ **Обратимости может не быть** вследствие неголономных связей
- ❖ Симметрий ожидать, вроде не приходится ввиду неавтономности системы, но **симметрия есть**. Ввиду того, что *управления экстенсивны*, а *возмущения* по большей части *интенсивны*, имеется **нарушенная симметрия инвариантности относительно растяжения «координат»**.

Это позволяет определить **капитал агента** как стоимость его чистых активов, оцененных в двойственных ценах

$$\Omega^a(t) = \Phi^a + \frac{\psi^a x^a}{\xi^a} \quad \frac{d\Omega^a(t)}{dt} = \rho^a(t) \Omega^a(t) - \bar{\theta}^a v$$

Анализ выражения для **балансовой прибыли**  $\rho^a(t) \Omega^a(t)$  обнаруживает полное соответствие бухгалтерским правилами исчисления этой величины

- ❖ **Динамической системы с вращениями нет**, поскольку типичные особые точки гамильтониана не центры, а седла. Импульсы ненаблюдаемы и неустойчивы. **Надо решать краевую задачу**

Но зато возникает неизвестное физике **магистральное свойство**:

**Оптимальная траектория оказывается слабо зависящей от начальных и терминальных условий**

# ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ ЭКОМОД

**Система ЭКОМОД**, в среде компьютерной алгебры **Maple**, поддерживает все этапы разработки и использования модели в канонической форме:

## Описание блоков

**Контроль синтаксиса, Контроль размерности, Автоматическая генерация условий оптимальности, Использование упрощенных обозначений**

## Сборка модели

**Контроль системы балансов, Контроль информационных связей агентов, Некоторые гарантии от смешения обозначений**

## Аналитическое исследование модели

**Автоматическое упрощение системы соотношений** на основе их семантики,  
Возможность узнать **исходный вид и смысл** соотношений после любых преобразований,

**Контроль корректности переобозначений,**

Сохранение дерева вариантов преобразований в файловой системе,  
Возможность быстро повторить все преобразования при модификации исходных гипотез

**Расчеты по модели** (идентификация, верификация, численные эксперименты,

**Сохранение стандартной математической нотации до самого расчета**

**Представление и хранение результатов расчетов**

# ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ ЭКОМОД

**Система ЭКОМОД**, в среде компьютерной алгебры **Maple**, поддерживает все этапы разработки и использования модели в канонической форме:

## Описание блоков

**Контроль синтаксиса, Контроль размерности, Автоматическая генерация условий оптимальности, Использование упрощенных обозначений**

## Сборка модели

**Контроль системы балансов, Контроль информационных связей агентов, Некоторые гарантии от смешения обозначений**

## Аналитическое исследование модели

**Автоматическое упрощение системы соотношений** на основе их семантики,  
Возможность узнать **исходный вид и смысл** соотношений после любых преобразований,

**Контроль корректности переобозначений,**

Сохранение дерева вариантов преобразований в файловой системе,  
Возможность быстро повторить все преобразования при модификации исходных гипотез

**Расчеты по модели** (идентификация, верификация, численные эксперименты,

**Сохранение стандартной математической нотации до самого расчета**

**Представление и хранение результатов расчетов**

$$\frac{d}{dt} p(t) = u(t) p(t)$$

$$0 = A M(t) + R\_s(t) B e^{(b t - b t_0)} - Y(t)$$

$$\frac{d}{dt} M(t) = J(t) - \kappa M(t)$$

$$\frac{d}{dt} FK(t) = p(t) J(t) - \beta_a FK(t)$$

$$(\zeta_n - 1) N(t) + (-1 + \zeta_s) S(t) + (-g(t) + 1) L(t) =$$

$$N(t) e^{\left( \frac{epl \rho_B(t)}{\delta} - \frac{epl rb}{\delta} \right)}$$

$$0 = N(t) + (-g(t) - 1) L(t) + (1 + nd) Ab(t)$$

$$+ \left( 1 - nl + \rho(t) \tau_y - \frac{\psi(t)}{p(t)} \right) FK(t) + \psi(t) M(t)$$

$$\frac{d}{dt} L(t) = \sigma Y(t) p(t) e^{(-g(t) \varepsilon)} - \beta_k L(t)$$

$$\frac{d}{dt} Q(t) = -\mu Q(t) - J(t) - V\_s(t) + Y(t)$$

$$\frac{d}{dt} S(t) = (N\_s(t) + V\_s(t)) p(t) + (-1 + (1 - mv) P(t)) p(t) Y(t) + p(t) J(t) + \left( \frac{1}{q(t)} - \mu + u(t) \right) S(t)$$

$$0 = N(t) - p(t) \tau_y J(t)$$

$$+ (-\tau_s nv ar + \tau_s ar - \tau_s (kr - 1) (nv - 1) P(t)) p(t) Y(t)$$

$$0 = Ab(t) + (-\tau_{bl} ar + \tau_{bl} nv ar + \tau_{bl} kr (nv - 1) P(t)) p(t) Y(t)$$

$$0 = (kn - (\tau_{bl} nd kr + \tau_{bl} kr + \tau_s - \tau_s kr) (nv - 1) \rho(t)) P(t) +$$

$$(-B an e^{(b t - b t_0)} - B ar (-\tau_s + nd \tau_{bl} + \tau_{bl}) (nv - 1) e^{(b t - b t_0)} \rho(t))$$

$$R\_s(t)/Y(t)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = - \frac{\beta_a nl - nn \beta_a + A an}{\tau_y} + \rho(t)^2 - (-\beta_a \tau_y - 1 - nd \tau_{bl} A ar$$

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = (\kappa + \rho(t)) \psi(t)$$

$$+ (-A an - A ar (nv - 1) (-\tau_s + nd \tau_{bl} + \tau_{bl}) \rho(t)) p(t)$$

$$u(t) = \mu + \frac{(-1 + \zeta_s) \rho_B(t)}{nv - 1 + np} - \frac{1}{q(t)}$$

$$\rho(t) / \tau_y + \frac{\left( \frac{-\beta_a + \kappa}{\tau_y} - \frac{u(t)}{\tau_y} \right) \psi(t)}{p(t)}$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = (-\eta \mu + \Delta + \mu) q(t) - 1$$

$$+ \frac{-\eta q(t) V\_s(t) - \eta q(t) J(t) + q(t) Y(t) \eta}{Q(t)}$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = \beta_k g(t) + \frac{(g(t) + 1) (nv - 1 + np) \rho(t)}{np - nn + nv - 1} - \frac{nn (-1 + g(t)) \rho_B(t)}{np - nn + nv - 1}$$



# Мировой финансовый кризис

1992

США импортируют мозги и экспортируют технологии.  
На выручку покупают за границей материальные блага.  
Производство выводится.  
Население занимается обслуживанием друг друга

2000

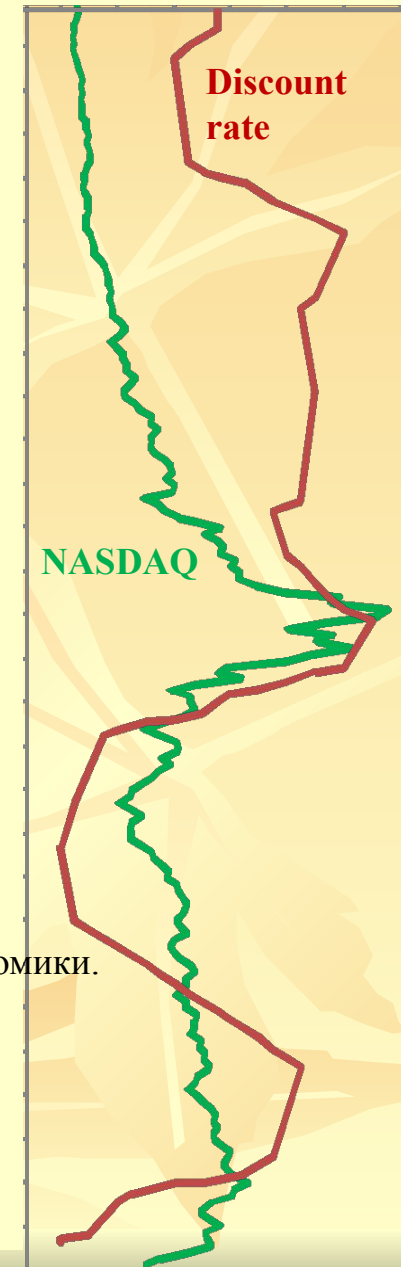
Развитие высоких технологий обернулось пузырем. Другого мотора не нашлось.  
Политика монетарного регулирования догматически доводится до абсурда

2003

Переход к кейнсианским механизмам стимулирования – **война в Ираке** – подъем экономики.  
Набранные по низким ставкам ипотечные кредиты становятся невозвратными

2007

ипотечный кризис – банкротства – распродажа иностранных активов



# Банковская система в модели

## МОДЕЛЬНЫЙ БАЛАНС КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА

*Активы*

*Пассивы*

$$W + L + R = N + S + C + O$$

Ликвид-  
ность

Ссуды

Резервы

Рас.  
счета

Депозиты

Кредиты  
ЦБ

«Капитал  
»

## УСЛОВИЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ

$$R = Lc + \xi(t) (N + S)$$

## ЭМПИРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

|     |     |           |                   |     |     |                     |     |     |  |  |
|-----|-----|-----------|-------------------|-----|-----|---------------------|-----|-----|--|--|
| $L$ | $+$ | $R$       | $\approx$         | $N$ | $+$ | $S$                 | $+$ | $C$ |  |  |
| $W$ |     | $\approx$ | $\tau_1 \Delta W$ |     | $+$ | $\tau_2 \beta(t) S$ |     |     |  |  |

# Модель рационального поведения банка: ограничения

Переменные без индекса банк **планирует**,  
переменные с индексом банк **прогнозирует**

## Балансы:

$$\frac{d}{dt} L(t) = K(t) - \beta_l(t) L(t) \quad K(t) \geq 0 \quad \text{ссуды под процент} \quad r_l(t)$$

$$\frac{d}{dt} S(t) = V(t) - \beta_s(t) S(t) \quad V(t) \geq 0 \quad \text{депозиты под процент} \quad r_s(t)$$

Резервы  $R(t) = \text{обязательные резервы } R_c(t) + \text{депозиты } L_c(t) \text{ под процент } r_c(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(t) = & r_l(t) L(t) + \beta_l(t) L(t) - K(t) - r_s(t) S(t) - \beta_s(t) S(t) + \\ & + V(t) + \frac{d}{dt} N(t) - \frac{d}{dt} L_c(t) + r_c(t) L_c(t) - \mathbf{Z(t)} \end{aligned} \quad \text{ликвидность; } \mathbf{Z(t)} \text{ —извлекаемый доход}$$

## Правила игры:

$$N(t) \leq N_n(t)$$

$$R_c(t) = \zeta_l(t) (S(t) + N(t)) \quad \text{резервные требования}$$

$$L(t) + L_c(t) + R_c(t) \leq S(t) + N(t) \quad \text{работа по открытой схеме}$$

$$\frac{d}{dt} W(t) = W_d W(t) \quad W(t) \geq \tau_w W_d W(t) + \tau_s \beta_s(t) S(t) \quad \text{спрос на деньги с предвидением потребности}$$

# Модель рационального поведения банка: *функционал и терминальные условия*

Соотношения представляют собой *ограничения*, наложенные в рамках модели на возможности банка выбирать значения своих *планируемых переменных* (управлений):

$$S(t) \quad L(t) \quad W(t) \quad K(t) \quad V(t) \quad Z(t) \quad N(t) \quad Lc(t) \quad WdW(t)$$

Согласно **принципу рациональных ожиданий**, лежащему в основе моделей межвременного равновесия, при планировании своих управляющих переменных банк может рассчитывать на точный прогноз *информационных переменных*:

$$\zeta_l(t) \quad r_l(t) \quad r_s(t) \quad r_c(t) \quad \beta_s(t) \quad \beta_l(t) \quad N_n(t)$$

**Модель межвременного равновесия с управлением капиталом:**  
**агент максимизирует собственную капитализацию**

что эквивалентно

**максимизации потока полезных расходов** (в данном случае  $Z(t)$ ) **в заданной временной пропорции**

$$Z(t) = \theta d_b(t) \quad \theta \rightarrow \max$$

на некотором интервале  $[t_0, T]$ , при заданных в начальный момент значениях фазовых переменных  $S(t_0)$ ,  $L(t_0)$ ,  $W(t_0)$  и заданных траекториях изменения экзогенных величин и терминальном условии

$$(aL(t_0) L(t_0) + aS(t_0) S(t_0) + W(t_0)) e^{(\gamma(T-t_0))} \leq \\ aL(T) L(T) + aS(T) S(T) + W(T)$$

# Сильное магистральное свойство

- ❖ Хотя задача о рациональном поведении банка ставилась в предположении знания будущих значений информационных переменных, на оптимальной траектории оставшиеся двойственные переменные определяются текущими значениями информационных переменных, и **рациональное поведение банка фактически описывается динамической системой**, а не краевой задачей

$$\frac{d}{dt} L(t) = (ML(k(t)) - \beta_l(t)) L(t)$$

$$\frac{d}{dt} W(t) = -\frac{MW(\rho(t)) W(t)}{\tau_w} + \frac{W(t)}{\tau_w} - \frac{\tau_s \beta_s(t) S(t)}{\tau_w}$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \frac{-b_1 + 1 - b_2 + \zeta(t) b_2 + a_1 r_s(t) + \zeta(t) b_1 - 2 \zeta(t) + r_s(t) a_2 + \zeta(t)^2}{\tau_w (a_2 + a_1 \zeta(t))}$$

$$+ \frac{a_1 (-1 + \zeta(t)) r_c(t)}{\tau_w (a_2 + a_1 \zeta(t))} + \rho(t)^2 + \left( \frac{-a_2 - a_1 \zeta(t) + a_2 \beta_s(t) \tau_s + a_1 \tau_s \beta_s(t) - a_1 r_s(t) \tau_w - a_2 \tau_w r_s(t)}{\tau_w (a_2 + a_1 \zeta(t))} \right)$$

$$- \frac{a_1 (-1 + \zeta(t)) r_c(t)}{a_2 + a_1 \zeta(t)} \rho(t) + \frac{(-1 + \zeta(t)) L(t)}{\tau_w (a_2 + a_1 \zeta(t)) P(t)}$$

$$\frac{d}{dt} k(t) = -\frac{\zeta(t) b_2 + r_s(t) a_2 - \zeta(t) + \zeta(t)^2 + \zeta(t) b_1}{a_2 + a_1 \zeta(t)} + r_l(t) - \frac{\zeta(t) a_1 r_c(t)}{a_2 + a_1 \zeta(t)} + \beta_l(t) k(t) + \left( \frac{-\tau_s a_2 \beta_s(t) + \tau_w a_2 r_s(t)}{a_2 + a_1 \zeta(t)} - r_l(t) \tau_w + \frac{\zeta(t) a_1 r_c(t) \tau_w}{a_2 + a_1 \zeta(t)} + k(t) \right) \rho(t) - \frac{\zeta(t) L(t)}{(a_2 + a_1 \zeta(t)) P(t)}$$

Для идентификации ~ 20 параметров имеем ~200 наблюдений



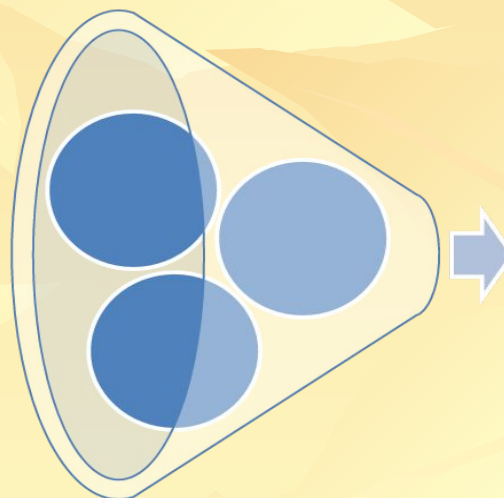
# Модель реакции банковской системы на внешние воздействия

Модель банковской систем строилась как блок целостной модели экономики России, поэтому она может показывать реакцию банковской системы, но не может предсказывать ее будущее (слишком открыта)

## ВХОД

- Привлеченные средства  $S(t), N(t)$
- Проценты по кредитам и депозитам  $r_l(t), r_s(t), r_c(t)$
- Нормативы резервирования  $\xi(t)$  и обратных дюраций  $\beta_l(t), \beta_s(t)$

## МОДЕЛЬ

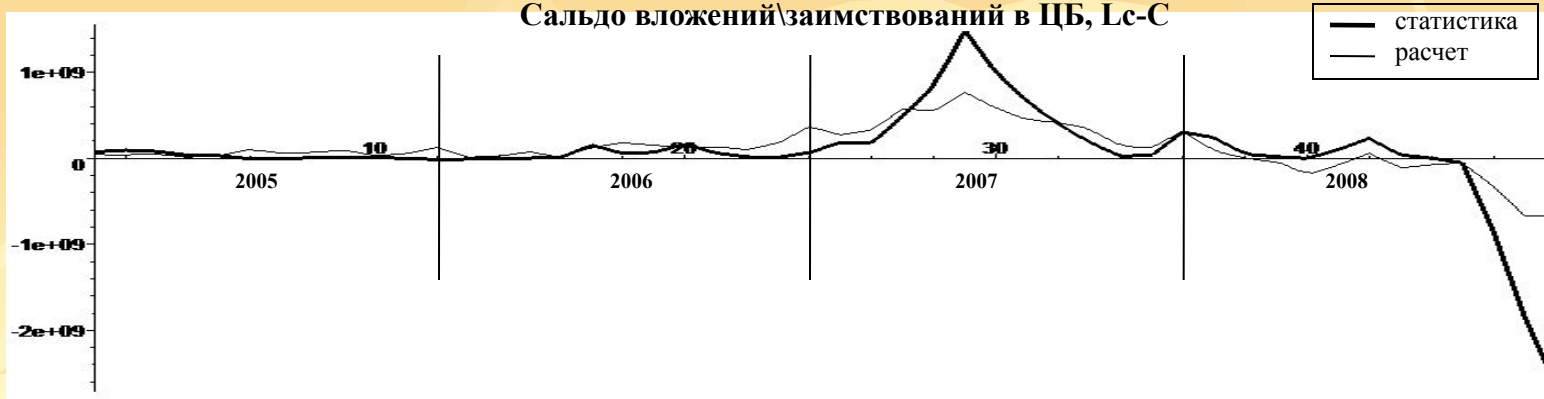


## ВЫХОД

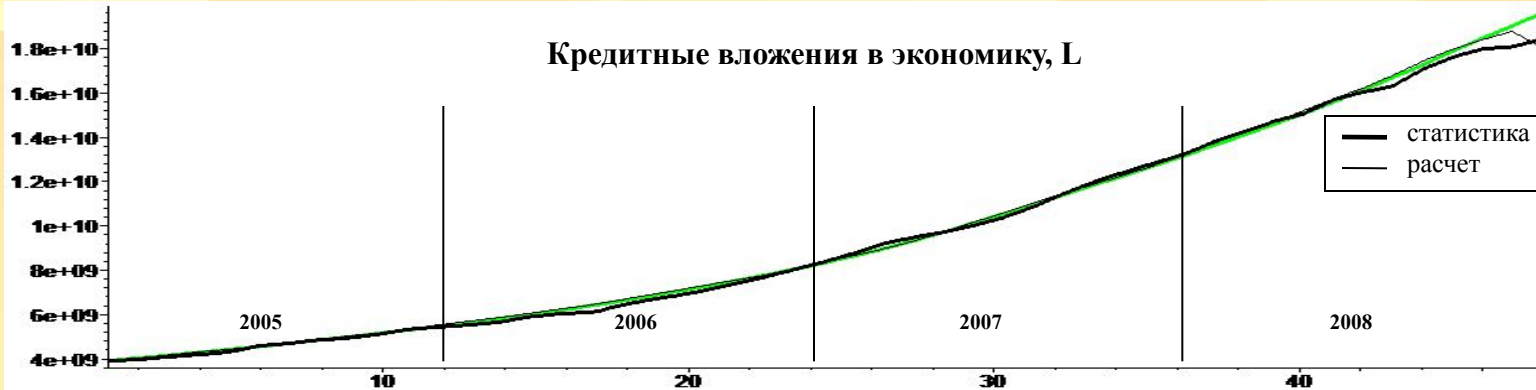
- Кредиты  $L(t)$
- Ликвидность  $W(t)$
- Сверхнормативные резервы  $Lc(t)$

# Результаты расчетов

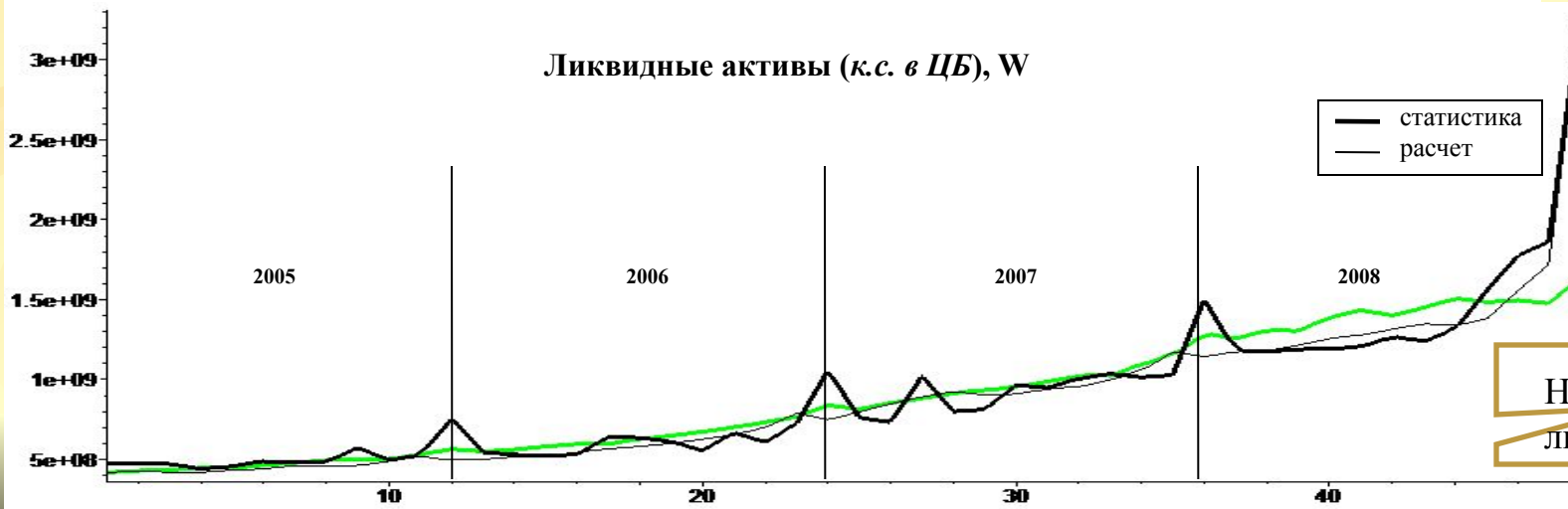
## Сальдо вложений\заимствований в ЦБ, Lc-C



## Кредитные вложения в экономику, L



## Ликвидные активы (к.с. в ЦБ), W



Нехватка  
ликвидности