

ОБЛИГАЦИИ

Финансовый университет при Правительстве
РФ, кафедра Прикладная математика

Основные понятия и параметры облигации.

- **Опр. Облигация** - ценная бумага , длительный заем эмитенту от ее обладателя и оговоренный доход обладателю. Он обычно ниже , чем от других ЦБ, но более надежен и стабилен. В облигации чаще всего инвестируют свободные средства пенсионные фонды, ПИФЫ и др.
- **ПАРАМЕТРЫ ОБЛИГАЦИИ.**
- **Дата погашения** (T - время обращения ОБ с момента выпуска);
- **Срок погашения** ($n=T-t$, где t -текущее время).
- **НОМИНАЛЬНАЯ СТОИМОСТЬ (N)** –сумма денег , выплачиваемая владельцу облигации на дату погашения. Обычно указывается на самой облигации.
- **Выкупная стоимость** (если она отличается от номинальной).

ПАРАМЕТРЫ ОБЛИГАЦИИ.

- Купонный доход (С)- постоянные платежи , которые выплачиваются владельцу ежегодно по купонной ставке – с (норма дохода)-с = C/N .
- Опр. Если выплаты по купонам не предусмотрены , то такую облигацию называют безкупонной. Доход по ней образуется за счет курсовой разницы стоимости облигации.

Виды облигаций

- По сроку действия облигации подразделяются на краткосрочные (от года до 3 лет), среднесрочные (от 3 до 7 лет), долгосрочные (от 7 до 30 лет) и бессрочные (выплаты процентов осуществляются неопределённо долго).

Текущая стоимость облигации.

- С каждой облигацией связан поток платежей - C . Поэтому в момент времени t вводится понятие текущей стоимости - P облигации (r - процентная ставка, n -время до погашения)

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{N}{(1+r)^n}$$

- Так как $C=cN$, то

$$P = cN \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + \frac{N}{(1+r)^n}, (O1)$$

Пример. Найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью $N=1000$ руб., сроком погашения $n=5$ лет и ежегодными выплатами. По купонной ставке $c=15\%$ при годовой процентной ставке $r=20\%$.

• Решение. Подставляя в формулу (О1) получим

•
$$P = cN \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} + \frac{N}{(1 + r)^n} = 150 \frac{1 - 1,2^{-5}}{0,2} +$$

$$1000 * 1,2^{-5} = 850,1$$

Текущая доходность и доходность к погашению

- **Курсом облигации** ^{облигации} **есть отношение**
вида: $K = V/N * 100\%$,

- где V -рыночная (курсовая) цена облигации определяется конъюнктурой рынка. .

- **Текущая доходность** —
 $i = C/V = cN/V = c/K.$

Показателем текущей доходности удобно пользоваться, когда до погашения облигации остается немного времени, так как в этом случае ее цена вряд ли будет испытывать существенные колебания.

Пример.

- Если облигация с $N=1000$ куплена по цене $V=900$, то ее курсовая стоимость равна
- $K=V/N*100\%=90\%$ т.е. курс облигации составляет 90 % от номинала.

Доходность к погашению- ρ .

- Если известны V , n , c , то

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+\rho)^i} + \frac{N}{(1+\rho)^n},$$

- где ρ - доходность к погашению
- Если $C=cN$, то

$$V = cN \frac{1 - (1+\rho)^{-n}}{\rho} + \frac{N}{(1+\rho)^n} \quad (02)$$

- Решение при $n < 10$

$$\rho \approx \frac{2(cn + 1 - K)}{(K - 1 + n(K + 1))}$$

АНАЛИЗ (02)

- Следствия

- 1) $V=N$ ($K=1$) $\Leftrightarrow \rho=c$,
- 2) $V>N$ ($K>1$) $\Leftrightarrow \rho<c$,
- 3) $V<N$ ($K<1$) $\Leftrightarrow \rho>c$,

Бескупонная облигация

- Так для бескупонной облигации $C=0$, то

$$P = \frac{N}{(1+r)^n}$$

Пример.

$N = 10000$ руб., $r = 20\%$, $n = 3$ года. Определить P .

$$P = \frac{10000}{(1+0,2)^3} = 5786,0 \text{ руб.}$$

Дюрация облигации по Маколею.

- Для сравнения облигаций с **одинаковым сроком погашения**, но с различной структурой купонных платежей, необходимо учитывать особенности распределения доходов во времени («профиль» поступления доходов).
- Также важно знать как реагирует **цена** или стоимость на изменение процентной ставки.

Дюрация потока по Маколею

- Рассмотрим поток $\{ (t_1, C_1), (t_2, C_2), \dots, (t_k, C_k) \}$

- $$P(y) = \sum C_k (1+y)^{-t_k} .$$

- Продиф. функцию $P(y)$ по y и разделим на P :

- $$P'(y)/P(y) = - [1/(1+y)] * \sum w_k * t_k, \quad (O3)$$

Дюрация облигации

-

- $$D = \sum w_k * t_k$$

- где $w_k = C_k(1+y)^{-t_k} / P(y)$ – весовые коэфф. определяющ. вклад каждого платежа - $C_k(1+y)^{-t_k}$ в текущ. стоим. всего потока - $P(y)$ и

- $$\sum w_k = 1$$

Дюрация облигации

Дюрация по Маколею. Для выбора облигации необходимо оценивать ее риск. Он связан со сроком облигации: чем больше **D** выше риск.

$$D = 1 \frac{C}{(1+i)P} + 2 \frac{C}{(1+i)^2 P} + \dots + j \frac{C}{(1+i)^j P} + \dots + n \frac{C}{(1+i)^n P} + \frac{nN}{(1+i)^n P}$$

где $C = qN$ – размер купона.

Замечание.

- Дюрация (D) измеряется в годах и показывает среднее время всех выплат. Так дюрация бескупонной облигации равна сроку n до ее погашения. В остальных случаях $D < n$. Чем ниже дюрация, тем привлекательнее данная облигация

Пример 5.7. Две облигации номинала $N = 1\,000$ приобретены за 3 года до погашения. Купоны выплачиваются один раз в году и равны 10 % и 20 % годовых от номинала соответственно. Определить их дюрации при рыночной доходности $i = 20\%$ годовых.

Решение. Купонные доходы облигации равны соответственно

$$C_1 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100, \quad C_2 = 0.2 \cdot 1\,000 = 200.$$

Вычислим цену первой облигации:

$$P_1 = \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_1}{(1+i)^2} + \frac{C_1 + N}{(1+i)^3} = \frac{100}{(1+0.2)} + \frac{100}{(1+0.2)^2} + \frac{1100}{(1+0.2)^3} = 789.352$$

Дюрация первой облигации равна:

$$D_1 = 1 \frac{C_1}{(1+i)P_1} + 2 \frac{C_1}{(1+i)^2 P_1} + 3 \frac{C_1 + N}{(1+i)^3 P_1} = 1 \cdot 0.106 + 2 \cdot 0.088 + 3 \cdot 0.805 = 2.701 \text{ лет.}$$

Цена второй облигации равна номиналу 1000, как это следует из (5.1). Дюрация второй облигации равна:

$$D_2 = 1 \frac{C_2}{(1+i)P_2} + 2 \frac{C_2}{(1+i)^2 P_2} + 3 \frac{C_2 + N}{(1+i)^3 P_2} = 1 \cdot 0.167 + 2 \cdot 0.1389 + 3 \cdot 0.694 = 2.528 \text{ лет.}$$

Вывод: вторая облигация имеет меньший риск, поскольку ее купон 200 больше купона первой облигации, и потому рентный проект второй облигации окупается быстрее.

Дюрация по Макколею может быть определена с использованием стандартной функции:

ДЛИТ {дата_согл; дата_вступл_в_силу; купон; доход; частота ;базис},

где:

Модифицированная дюрация облигаций

- Из (ОЗ) следует получим Модифицированную дюрацию облигаций MD

$$MD = - \frac{\partial \ln P}{\partial i} = \frac{D}{1+i}.$$

- Отсюда получим, при малых процентных изменениях

$$\Delta P \approx -MD \cdot P \cdot \Delta i.$$

Вывод

- Модифицированная дюрация (или волатильность цены облигации) – MD показывает на сколько процентов уменьшится облигация при увеличении средней доходности по рынку на 1%. Так при увеличении доходности на 1% , т.е. при $\Delta=1\%$ получаем , что $\Delta P/P = -MD$

Пример 5.8. Облигация номинала $N = 1\ 000$ руб. приобретена за 3 года до погашения. Купоны выплачиваются один раз в году и равны 20 % годовых от номинала. При рыночной доходности $i = 20\ %$ определить

- 1) модифицированную дюрацию
- 2) процентное изменение цены при рыночной доходности $i = 21\ %$ годовых.

Решение. Модифицированная дюрация облигации равна

$$MD = \frac{D}{1+i} = \frac{2.528}{1.2} = 2.107.$$

Отсюда следует, что при увеличении рыночной доходности на 1% годовых, изменение цены облигации составит 2.107 % от её первоначальной цены 1 000 руб.,

$$\Delta P_2 \approx MD_2 * P_2 * 1\% = -2.107 * 1000 * \boxed{\frac{0,01}{01}} = -21.07,$$

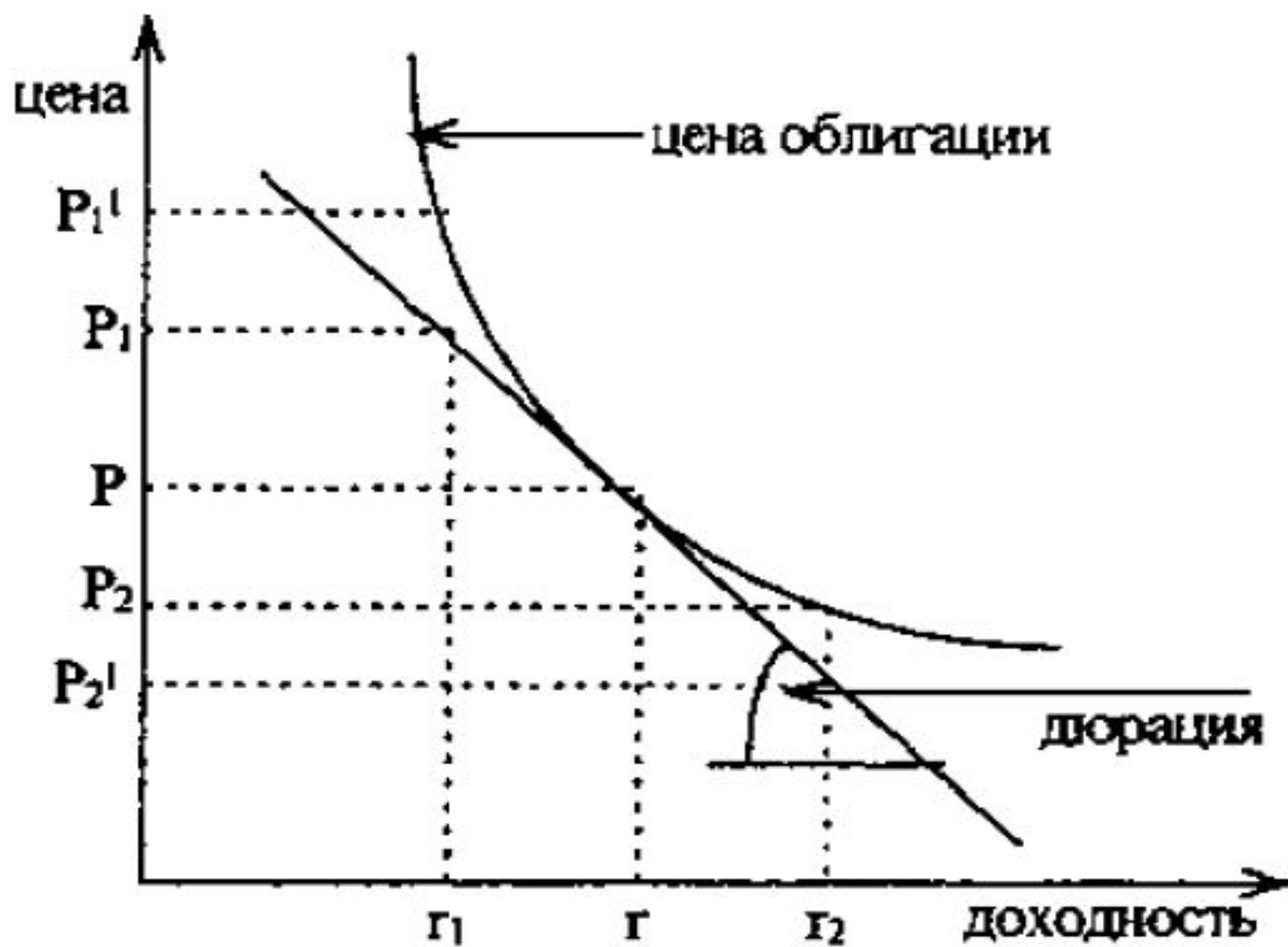


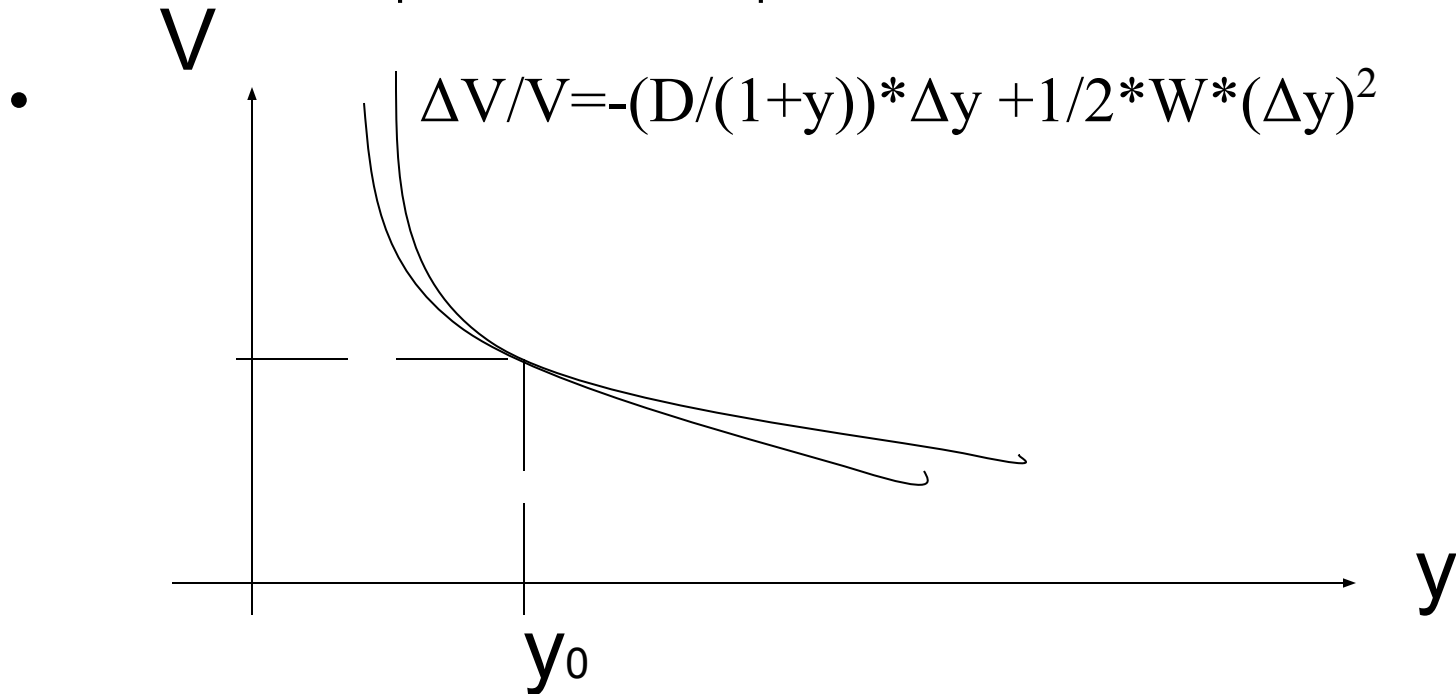
Рис. 1. Дюрация.

Выпуклость облигации

- **Опред.** Выпуклостью облигации $W(y)$ при данной доходности y называют величину

$$W(y) = V''(y) / V(y) * (1+y)^2$$

- Основное значение - уточнение формулы относительного изменения цены облигации



Определение курсовой стоимости акции

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{Div_t}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

где: P_n — цена акции в конце периода n , когда инвестор планирует продать ее.

Простейшая модель прогнозирования дивидендов предполагает, что они будут расти с постоянным темпом. Тогда дивиденд для любого года можно рассчитать по формуле:

$$Div_t = Div_0 (1+g)^t \quad (105)$$

где: Div_0 — дивиденд за текущий год (т. е. уже известный дивиденд),

Более удобно определять курсовую стоимость по формуле (106):

$$P = \frac{Div_1}{r - g} \quad (106)$$

где: Div_1 — дивиденд будущего года; его можно определить по формуле (105).

Если компания выплачивает одинаковые дивиденды, то цена акции определяется по формуле:

$$P = \frac{Div}{r} \quad (108)$$

Определение доходности акции

Принимая решение купить акцию на определенный период времени, инвестору необходимо оценить доходность от его операции. Аналогичным образом, после завершения операции следует оценить ее фактическую доходность. Доходность операции с акцией, которая занимает несколько лет, можно ориентировочно определить по формуле:

$$r = \frac{(P_S - P_P) / n + Div}{(P_S - P_P) / 2} \quad (110)$$

где: r — доходность от операции с акцией;

P_S - цена продажи акции;

P_P — цена покупки акции;

Div — средний дивиденд за n лет (он определяется как среднее арифметическое);

n — число лет от покупки до продажи акции

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!