Основы финансовых вычислений

Тема 6.
Переменные и непрерывные ренты

Доцент Фирсова Е.В.

6.1. Анализ переменных потоков платежей

Нерегулярный поток платежей

Временные интервалы между последовательными платежами в нерегулярном потоке могут быть любыми, *не постоянными*, любыми могут быть так же и члены потока.

Обобщающие характеристики в этом случае получают только путем прямого счета:

наращенная сумма $S = \sum_t R_t (1+i)^{n-t}$,

современная величина $\sum_t R_t v^t$,

где t - время от начала потока платежей до момента выплаты,

R_t – сумма платежа.

Пример 5.1. Четыркин

Переменная рента с разовыми изменениями размеров платежа

Пусть общая продолжительность ренты n и этот срок разбит на k участков продолжительностью $n_1, n_2, \ldots, n_k$, в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_t ($t = 1, 2, \ldots, k$), но изменяется от участка к участку.

Тогда наращенная сумма для годовой ренты постнумерандо (p = 1, m = 1)

$$S = R_1 s_{n_1,i}(1+i)^{n-n_1} + R_2 s_{n_2,i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k s_{n_k,i}$$

а современная величина

$$A = R_1 a_{n_1,i} + R_2 a_{n_2,i} v^{n_1} + \ldots + R_k a_{n_k,i} v^{n-n_k}.$$

Рента с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть размер платежей изменяется с постоянным приростом *a* (положительным или отрицательным). Если рента годовая постнумерандо, то размеры последовательных платежей составят $R, R + a, R + 2a, \ldots, R + (n - 1)a$.

Величина *t*-го члена равна

$$R_t = R + (t - 1)a.$$

Тогда современная стоимость такой ренты равна

$$A = \left(R + \frac{a}{i} \right) a_{n,i} - \frac{nav^n}{i},$$

а наращенная сумма

$$S = \left(R + \frac{a}{i} \right) s_{n,i} - \frac{na}{i}.$$

В случае p-срочной ренты с постоянным приростом платежей ($m = 1$) последовательные выплаты равны

$R, R+\frac{a}{p}, R+2\frac{a}{p}, \ldots, R+(pn-1)\frac{a}{p}$, где a – прирост платежей за год,

R – первый платеж, то есть

$R_t = R+(t-1)\frac{a}{p}$, где t – номер члена ряда, $t = 1, 2, \ldots, np$.

Современная величина

$$A = \sum_{t=1}^{pn} \left(R + \frac{a(t-1)}{p} \right) v^{t/p},$$

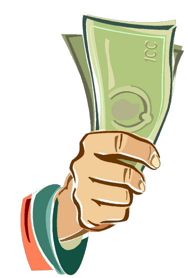
а наращенная сумма

$$S = \sum_{t=1}^{pn} \left(R + \frac{a(t-1)}{p} \right) (1+i)^{n-t/p}.$$

6.2. Ренты с постоянным относительным изменением платежей

Если платежи годовой ренты изменяются с постоянным темпом роста *q*, то члены ренты будут представлять собой ряд:

$$R,\ Rq,\ Rq^2, \ldots,\ Rq^{n-1}.$$



Для того чтобы получить современную величину, дисконтируем эти величины:

$$Rv,\ Rqv^2,\ \ldots,\ Rq^{n-1}v^n$$

получили геометрическую прогрессию.

Сумма членов этой прогрессии

$$A = Rv\frac{q^n v^n - 1}{qv - 1} = R\frac{q^n v^n - 1}{q - (1+i)}$$

Наращенная сумма ренты

$$S = A\,(1+i)^n =$$

$$= R\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$$

Для *p*-срочной ренты (m=1):

$$A = R\frac{q^{np}v^{n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}}$$

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^{n}}{q - (1+i)^{1/p}}$$

6.3. Постоянная непрерывная рента

Во всех рассмотренных выше рентах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно - через фиксированные интервалы времени (периоды ренты).

Вместе с тем иногда более адекватное описание потока платежей достигается, когда он воспринимается как *непрерывный процесс.*

Рассмотрим постоянную непрерывную ренту, к которой применяется годовая дискретная процентная ставка.

По определению у непрерывной ренты

$$p \to \infty$$

Найдем коэффициент приведения такой ренты $\tilde{a}_{n;i}$.

Для этого необходимо найти предел коэффициента при ведения р-срочной ренты при $p \to \infty$

$$\tilde{a}_{n;i} = \lim_{p \to \infty} a_{n;i}^{(p)} = \lim \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}.$$

Непосредственная подстановка *p* в знаменатель приводит к неопределенности:

$$\frac{1}{\infty\left[(1+i)^{1/\infty}-1\right]}.$$

Раскроем неопределенность, применив правило Лопиталя.

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = \frac{1}{\ln(1+i)}.$$

(1)

$$\tilde{a}_{n;i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{\ln(1 + i)}.$$

Аналогичным путем получим коэффициент наращения непрерывной ренты:

(2)

$$\tilde{s}_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)}.$$

Переход от дискретных платежей постнумерандо к непрерывным увеличивает коэффициенты приведения и наращения в ***i* / ln(1+i)** раз

$$\tilde{a}_{n;i} = \frac{i}{\ln(1+i)} a_{n;i};$$

$$\tilde{s}_{n;i} = \frac{i}{\ln(1+i)} s_{n;i}.$$

ПРИМЕР (*)

Ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения полезных ископаемых составят 1 млрд руб. в год, продолжительность разработки 10 лет, отгрузка и реализация продукции непрерывны и равномерны. Найти капитализированную стоимость дохода при дисконтировании по ставке 10.

Решение

$$A = 1000\frac{1 - 1{,}1^{-10}}{\ln 1{,}1} = 6446{,}91 \text{ млн руб.}$$

Формулы предполагают непрерывное поступление платежей и дискретное начисление процентов.

Более "естественным" является положение, когда оба процесса (поступление денег и наращение процентов) непрерывны.

$\delta = \ln(l + i)$; $i = e^{\delta} - 1$

Для получения формул соответствующих коэффициентов воспользуемся формулами эквивалентности между непрерывными и дискретными ставками

$$\delta = \ln(l + i); \qquad i = e^{\delta} - 1$$

Тогда из (1) и (2):

$$\tilde{a}_{n;\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}, \quad (3)$$

$$\tilde{s}_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}. \quad (4)$$

Примечание:

Формулы (1) – (4) дают одинаковые результаты только в том случае, когда непрерывные и дискретные ставки являются <u>эквивалентными.</u>

Пример

Пусть в примере * дисконтирование осуществляется по силе роста 10, тогда

Решение

$$A = R\tilde{a}_{n;\delta} = 1000\frac{1 - e^{-0,1 \times 10}}{0,1} = 6321,21 \text{ млн руб.}$$

Эквивалентная дискретной ставке 10 (которая была применена в примере *) сила роста составит δ = ln1,1 = 0,09531, или 9,531.

$$A = 1000\frac{1 - e^{-0,09531 \times 10}}{0,09531} = 6446,91 \text{ млн руб.}$$

Определение срока для постоянных непрерывных рент

$$\tilde{a}_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

$$A = R\tilde{a}_{n;i}.$$

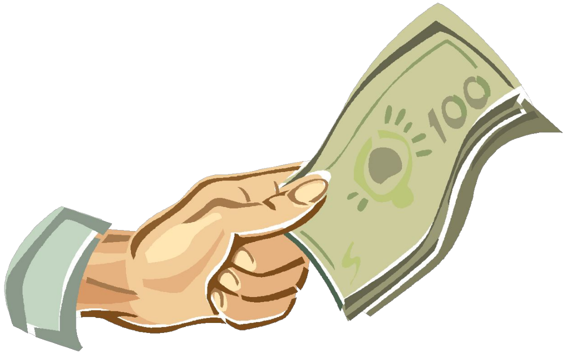
$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}\delta\right)}{\delta}$$

Аналогично для случая, когда исходной является наращенная сумма ренты:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\delta + 1\right)}{\delta}.$$

6.4. Конверсия аннуитетов

В практике иногда возникает необходимость изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов, т.е. **конвертировать ренту.**



1) Выкуп ренты

Выкуп ренты представляет собой замену предстоящей последовательности выплат единовременным платежом.

Из принципа финансовой эквивалентности (ФЭ) следует, что в этом случае вместо ренты выплачивается ее <u>современная величина</u>.

2) Рассрочка платежей -

это замена единовременного платежа аннуитетом.

Для соблюдения принципа ФЭ современную величину ренты следует приравнять величине заменяемого платежа. Определить член ренты или ее срок при остальных заданных параметрах.

3) Замена немедленной ренты на отсроченную

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1, i и ее необходимо заменить на отсроченную на t лет ренту, т.е. начало ренты сдвигается на t лет.

Обозначим параметры отложенной ренты как R_2, n_2, i. Ставку процентов при этом будем считать неизменной.

Типы расчетных задач:

А) Задан срок n_2, требуется определить размер R_2.

Исходим из принципа ФЭ результатов, т. е. из равенства современных стоимостей заменяемого и заменяющего потоков: $A_1=A_2$.

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i} v^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$R_2 = R_1 \left(\frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} \right) (1+i)^t$$

При $n_1 = n_2 = n$ имеем

$$R_2 = R_1(1+i)^t$$

Типы расчетных задач:

Б) Размеры платежей заданы, требуется определить срок n_2.

Пусть платежи годовой ренты одинаковыми: $R_2=R_1=R$. Исходя из равенства современных стоимостей,

$$Ra_{n_1,i} = Ra_{n_2,i}v^{-t},$$

где $a_{n,i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$,

+

последовательно приходим к выражению

$$n_2 = \frac{-\ln[1-(1-(1+i)^{-n_1})(1+i)^t]}{\ln(1+i)}.$$

4) Изменение продолжительности ренты

Пусть имеется годовая обычная рента, и у партнеров есть договоренность об изменении срока ренты, т.е. вместо срока n_1, принят новый срок n_2. Тогда для эквивалентости финансовых результатов требуется изменение и размера платежа.

Из $R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i}$,

$$\boxed{R_2 = R_1 \frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}.}$$

5) Общий случай изменения параметров ренты

В случае одновременного изменения нескольких параметров ренты, исходим из равенства $A_1 = A_2$.

Если годовая рента, то приводится к виду

$$A_1 = R_2 \frac{1 - \left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2 n_2}}{p_2 \left[\left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2 p_2} - 1\right]} \times \left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{-t m_2},$$

где

- A_1 подсчитывается заранее,
- t – период (возможной) отсрочки,
- ряд параметров задается по согласованию сторон,
- один параметр находится из этого уравнения.

6) Объединение рент

В случае объединения (консолидации) нескольких рент в одну из принципа ФЭ обязательств до и после операции следует, что

$$A = \sum_k A_k ,$$

где *A*- современная величина заменяющей ренты,

A_k – современная величина *k*-ой объединяемой ренты.

Объединяемые ренты могут быть любыми. Если заменяющая рента постнумерандо является немедленной и задан срок n, то

$$R = \sum_k A_k / , \ a_{n;i}$$

Спасибо за внимание!