

# Основы финансовых вычислений. Задачи

Различные способы вычисления  
процентов

Дисконтирование

Учёт инфляции

Потоки платежей

Ренты

# Задача 1

- Какова простая ставка процентов, при которой первоначальный капитал в размере 130000 руб., достигнет через 100 дней 155000 руб.? Число дней году считается приближённо и равно 360. Ответ привести с точностью до 0,01%.
- **Решение.** Воспользуемся формулой
- $S_t = S_0 \cdot (1 + t \cdot i)$ . Подставив данные задачи
- $S_t = 155000$ ;  $S_0 = 130000$ ;  $t = \frac{100}{360} = 0,2778$ , получим

# Решение задачи 1. Задача 2.

- $155000 = 130000 \cdot (1 + 0,2778i); (1 + 0,2778i) = \frac{155}{130}; 0,2778i = \frac{155}{130} - 1 = 0,1923;$
- $0,2778i = \frac{155}{130} - 1 = 0,1923; i = 69,23\%.$
- **Задача 2.** Ссуда 700000 руб. выдана на квартал по простой ставке процентов 15% годовых. Определить наращенную сумму.
- **Решение.** Используя формулу простых процентов для суммы, получим  $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i) = 700000 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,15\right) = 726250.$

# Задача 3

- Найти сумму накопленного долга и проценты, если ссуда 180000 руб. выдана на три года под простые 18% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при увеличении ставки на 2%?
- **Решение.** Вычислим сумму накопленного долга  $S$  как наращенную сумму:  
$$S = S_0 \cdot (1 + n \cdot i) = 180000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,18) = 277200 \text{ РУБЛЕЙ.}$$
- $S$

# Решение задачи 3. Задача 4

- Проценты равны  $I = S - S_0 = 277200 - 180000 = 97200$ . При ставке  $18\% + 2\% = 20\%$  наращенная сумма  $S'$  на  $= 180000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,2) = 288000$ . Наращенная сумма  $\frac{S'}{S} = \frac{288000}{277200}$  ется в  $= 1,03896$  раза.
- **Задача 4.** Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 122000 руб., достигнет через 120 дней величины 170000 руб. Временная база  $K \cdot t = 122000 \cdot 120 = 14640000$ .

# Решение задачи 4. Задача 5

- Воспользуемся формулой наращенной суммы по простой процентной ставке  $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i)$ .  
Найдём  $t = \frac{120}{122000} = \frac{1}{1220}$ . Подставив условия задачи, получим  $170000 = 122000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1220} \cdot i\right)$   $1 + \frac{1}{1220} \cdot i = \frac{170}{122}$   
 $i = 1220 \cdot \left(\frac{170}{122} - 1\right) = 1,1803$   
или 118,03%.
- **Задача 5.** Определить период, за который начальный капитал в размере 46000 руб. вырастет до 75000 руб., если ставка простых процентов равна 15%.

# Решение задачи 5. Задача 6

- Воспользуемся формулой наращенной суммы по простой процентной ставке  $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i)$ . Подставив условия задачи, получим

$$75000 = 46000 \cdot (1 + 0,15 \cdot t) \quad 1 + 0,15 \cdot t = \frac{75}{46}; \quad t = \frac{75/46 - 1}{0,15} = 4,2$$

- **Задача 6.** Ссуда 150000 руб. выдана на 4 года под 20% годовых (простые проценты). Во сколько раз больше наращенная сумма по сравнению со ссудой?

# Решение задачи 6. Задача 7

- Найдём наращенную сумму по формуле простых процентов  $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i) = 150000 \cdot (1 + 0,2 \cdot 4) = 270000$
- Эта сумма  $\frac{S}{S_0} = \frac{270000}{150000} = 1,8$  раз больше ссуды, что как раз равно множителю наращенния.
- **Задача 7.** В банк 7 февраля на депозит положили сумму 20000 у.е. под 11% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик снимет 1 октября?



# Решение задачи 7. Задача 8

- Найдём время  $t$ . 7 февраля день №38, 1 октября день №274, число дней равно  $274 - 38 = 236$ , время (в годах)  $r \cdot t = \frac{236}{365}$

. Найдём искомую сумму как наращенную величину по формуле

$$S = S_0 \cdot (1 + i)^t = 20000 \cdot (1 + 0,11)^{236/365} = 21396,1$$

- **Задача 8.** Вклад на 80000 руб., открытый в банке на 10 месяцев, принес вкладчику 7000 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад?

# Решение задачи 8.

- Для вычисления сложного процента применим формулу . Подставив данные задачи, получим уравнение  $80000 + 7000$

$$= 80000 \cdot (1 + i)^{\frac{10}{12}} \quad (1 + i)^{5/6} = \frac{87}{80} \quad 1 + i = \frac{87^{6/5}}{80}$$

- $i = \frac{87^{1,2}}{80} = 0,1059$  Откуда ; ;

- или 10,59%. Для вычисления  $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i)$

простого процента применим формулу

Подставив данные задачи, получим

$$\text{уравнение } 1 + \frac{5}{6} \cdot i = \frac{87}{80} \quad \text{Откуда } i = \frac{42}{400} = 0,105 \quad 30000 \cdot (1 + 10/12 \cdot i).$$

Откуда ; или 10,5%.

# Задачи 9, 10

- **Задача 9.** Чему равен процентный платеж, если кредит 170000 руб. взят на 7 месяцев под сложных 17% годовых?
- **Решение.** Процентный платеж равен разности между наращенной суммой и величиной кредита  $I = 170000(1 + 0,17)^{7/12} - 170000 = 16304,78$
- **Задача 10.** Ставка по годовому депозиту равна 8%. Какую ставку годовых процентов нужно назначить на полугодовой депозит,

# Задачи 10, 11

- чтобы последовательное переоформление полугодового депозита привело бы к такому же результату, что и при использовании годового  $I_{1,08} = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2$  а? ( $K=360$ )
- $F_i = 2 \cdot (\sqrt{1,08} - 1) = 0,0785$  . Следовательно
- или 7,85%.

**Задача 11.** Заемщик должен уплатить 80000 руб. через 65 дней. Кредит выдан под 19% годовых (простые проценты).

# Задачи 11, 12

- Какова первоначальная сумма долга и дисконт ( $K=360$ )?
- **Решение**  $S \cdot \left(1 + \frac{65}{360} \cdot 0,19\right) = 80000$  . Следовательно
- $S = \frac{80000}{1 + \frac{0,19 \cdot 65}{360}} = 77346,58$ . Дисконт равен  $D = 80000 - 77346,58 = 2653,42$ .
- **Задача 12.** На счет в банке кладется сумма в размере 20000 руб. на 4 года под 11% годовых по схеме простых процентов с дальнейшей пролонгацией на последующие 2 года под 6% годовых по той

# Задача 12

- же схеме. Найти размер вклада через 6 лет. Определить наращенную сумму, если вклад изымается через 4 года и кладется на новый счет на 2 года по той же схеме.
- **Решение.** а)  $20000 \cdot (1 + 4 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,06) = 31200$
- б)  $20000 \cdot (1 + 4 \cdot 0,11) \cdot (1 + 2 \cdot 0,06) = 32256$

# Задача 13

- В банк положен депозит в размере 2400 руб. под 7% годовых по схеме сложных процентов. Найти величину депозита через три года при начислении процентов 1, 4, 6, 12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.
- **Решение.** а)  $S = 2400 \cdot (1 + 0,07)^3 = 2940,1;$
- б)  $S = 2400 \cdot \left(1 + \frac{0,07}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 2955,45$  ; в)  $S = 2400 \cdot \left(1 + \frac{0,07}{6}\right)^{6 \cdot 3} = 2957,23$
- г)  $S = 2400 \cdot \left(1 + \frac{0,07}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 2959,02$  ; д)  $S = 2400 \cdot (e)^{3 \cdot 0,07} = 2960,83$

# Задача 14

- Клиент поместил в банк вклад в сумме 18000 руб. под 8,5% годовых с ежемесячной выплатой процентов. Какую сумму клиент будет получать каждый месяц, если начисление производится по формуле простых процентов?
- **Решение.** Искомая сумма равна величине  $18000 \cdot 0,085 : 12 = 127,5$ .



# Задача 15

- На годовом депозите можно получить 12% годовых, а на полугодовом — 11,5% годовых. Что выгоднее — положить средства на годовой депозит, или на полугодовой депозит с пролонгацией на тех же условиях? Чему будут равны проценты в обоих случаях при сумме депозита 25000 руб.?
- **Решение.** Наращенная сумма на годовом  $S = 1.12S_0$   
Наращенная сумма на полугос  $S' = \left(1 + \frac{0,115}{2}\right)^2 S_0 = 1,1183S_0 < S$

# Задача 16

- В банк положена сумма 40000 у.е. сроком на 2 года по ставке 10% годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) ежеквартального; б) ежемесячного.

- **Решение.** а) наращенная сумма  $S = 40000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 2} =$
- $= 48736,12$  ; процентные деньги  $I = 8736,12$ ;

# Решение задачи 16. Задача 17

- эффективная процентная ставка

- $i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 - 1 = 0,1038$  или 10,38 %;

б)  $S = 40000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 48815,64$  ;  $I = 8815,64$ ;

- $i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1047$  или 10,47%.

- **Задача 17.** За какой период первоначальный капитал в размере 40000 руб. вырастет до 75000 руб. при простой ставке 15% годовых?

# Решение задачи 17. Задача 18

- Для простых процентов выполняется соотношение  $75000 = 40000 \cdot (1 + 0,15n)$ .  
Следовательно  $0,15n = \frac{75}{40} - 1$  ;  $n = \frac{35}{6} = 5,83$
- Для сложных процентов выполняется соотношение  $75000 = 40000 \cdot (1 + 0,15)^n$ .
- Следовательно  $1,15^n = \frac{75}{40} = 1,875$  ;  $n = \frac{\ln 1,875}{\ln 1,15} = 4,5$
- **Задача 18** . В банк положена сумма 150000 руб. сроком на 6 лет по ставке 14% годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную

# Задача 18

- процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового; б) ежеквартального; в) ежемесячного; г) непрерывного при силе роста 14%.

- **Решение.** а) наращенная сумма равна

- $S = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{2}\right)^{2 \cdot 6} = 337828,74$  ; величина полученного процента равна  $I = 187828,74$ ; эффективная процентная

$$C_{i_{\text{эфф}}} = \left(1 + \frac{0,14}{2}\right)^2 - 1 = 0,1449 (14,49\%)$$

# Решение задачи 18

- б) наращенная сумма равна  $S = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{4}\right)^{4 \cdot 6} = 342499,27$   
; величина полученного процента равна  $I = 192499,27$ ; эффективная процентная ставка  $i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{0,14}{4}\right)^2 - 1 = 0,1475$  (14,75%)
- в) наращенная сумма равна  $S = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{12}\right)^{12 \cdot 6}$
- $= 345769,74$ ; величина полученного процента равна  $I = 195769,74$ ;  
эффективная процентная ставка  $i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{0,14}{12}\right)^{12} - 1 =$
- $= 0,1493$  (14,93%).

# Решение задачи 18. Задача 19

- г) наращенная сумма равна  $S = 150000 \cdot e^{0,14 \cdot 6} =$
- $= 347455,05$ ; величина полученного процента равна  $I = 197455,05$ ; эффективная процентная ставка равна  $i_{\text{эфф}} = e^{0,14} - 1 = 0,1503$  (15,03%)
- **Задача 19.** На сумму долга в течение 8 лет начисляются проценты по ставке 11% годовых. Во сколько раз возрастет наращенная сумма, если проценты будут капитализироваться ежемесячно? Ежеквартально? Непрерывно?

# Решение задачи 19

- Нарощенная сумма при ежегодной капитализации равна  $S_0(1 + 0,11)^8 = 2,3045S_0$  .
- Нарощенная сумма при ежемесячной капитализации равна  $S_0\left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{12 \cdot 8} = 2,4013S_0$  , что  $\frac{2,4013S_0}{2,3045S_0} = 1,042$  раза больше, чем при годовой капитализации.
- Нарощенная сумма при квартальной капитализации равна  $S_0\left(1 + \frac{0,11}{4}\right)^{4 \cdot 8} = 2,3824S_0$  , что в  $\frac{2,3824S_0}{2,3045S_0} = 1,0338$  раза больше, чем при годовой капитализации.



# Решение задачи 19. Задача 20

- Нарощенная сумма при непрерывной капитализации равна  $S_0 e^{0,11 \cdot 8} = 2,4109S_0$ , что  $\frac{2,4109S_0}{2,3045S_0} = 1,0462$  раза больше, чем при годовой капитализации.
- **Задача 20.** На какой срок необходимо положить в банк 12000 руб., чтобы накопить 15000 руб., если банк принимает вклады под простые (сложные) 8% годовых?
- **Решение.** Простые  $S_n = S_0 \cdot (1 + n \cdot i)$   
Воспользуемся формулой

# Решение задачи 20. Задача 21

- $1200(1 + 0,08n) = 1500$ ;  $n = \frac{1,25 - 1}{0,08} = 3,125$ .
- Сложные проценты. Воспользуемся формулой  $S_n = S_0 \cdot (1 + i)^n$   $1500 = 1200 \cdot (1 + 0,08)^n$   $1,08^n = 1,25$   
 $n = \log_{1,08} 1,25 = \frac{\ln 1,25}{\ln 1,08} = 2,9$
- **Задача 21.** Банк принимает депозиты на сумму 500000 руб. на следующих условиях: а) под 10% годовых с ежеквартальным начислением процентов;

# Задача 21

- б) под 10% годовых с полугодовым начислением процентов; в) под 11,5% годовых (во всех трех случаях проценты капитализируются). Выберите оптимальную схему вложения денежных средств.

$$S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- **Реш**  $S_n = 500000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{1}\right)^{4 \cdot n} = 500000 \cdot (1,1038)^{4n}$  И
- а)  $S_n = 500000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^{2 \cdot n} = 500000 \cdot (1,1025)^{2n}$  ;
- б)  $S_n = 500000 \cdot (1 + 0,115)^n = 500000 \cdot (1,115)^n$  ;
- в) .

Самым выгодным депозитом является<sup>27</sup>

# Задача 22

- Компания получила кредит на три года в размере 234000 руб. с условием возврата 456000 руб. Определить процентную ставку для случаев простого и сложного процента.

- **Решение.** Для простого процента имеем соотношение  $456000 = 234000 \cdot (1 + 3i)$ .  
Откуда  $1 + 3i = \frac{456}{234}$   $i = \frac{1}{3} \left( \frac{456}{234} - 1 \right) = 0,3275$  или 32,75%.  
 $456000 = 234000 \cdot (1 + i)^3$

- $D_i = \sqrt[3]{\frac{456}{234}} - 1 = 0,2491$  процента ;  
или 24,91%.

# Задача 23

- Вклад открыт под 14% простых годовых. На него начислен процентный платеж в сумме 1500 руб. Найдите величину вклада, если он был открыт на: а) 10 лет, б) 1 год, в) 6 месяцев, г) 10 дней. Временная база К - 365 дней.

- **Решение.** Воспользуемся формулой для вычисления процентного платежа  $I = S_0 \cdot i \cdot t$

$$\cdot 1500 = S_0 \cdot 0,14 \cdot 10 \quad ; \quad S_0 = \frac{1500}{1,4} = 1071,43$$

- а) ; ;

# Решение задачи 23. Задача 24

- б)  $1500 = S_0 \cdot 0,14 \cdot 1; S_0 = \frac{1500}{0,14} = 10714,29;$
- в)  $1500 = S_0 \cdot 0,14 \cdot \frac{10}{365}; S_0 = \frac{365 \cdot 1500}{1,4} = 391071,43 .$
- **Задача 24.** Вексель стоимостью 100000 руб. учитывается за 4 года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Найдите сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.
- $S_0 = S_n \cdot (1 - d)^n = 100000 \cdot (1 - 0,15)^4 = 52200,53$  руб.

# Задача 25.

- Клиент имеет вексель на 16000 у.е., который он хочет учесть 10.01.2009 г. в банке по сложной учетной ставке 8%. Какую сумму он получит, если срок до погашения 10.07.2009 г.?
- **Решение.** Найдём время  $t$  до погашения векселя. 10,01 – день №10; 10,07 – день №191; число дней равно  $191 - 10 = 181$ ; . Сумма, полученная векселедержателем равна  $S_0 = S_t \cdot (1 - d)^t = 16000 \cdot (1 - 0,08)^{181/365} = 15351,92$

# Задача 26

- Предприятие получило кредит на один год в размере 7 млн. руб. с условием возврата 7,77 млн. руб. Рассчитайте процентную и учетную ставку.

- **Решение.** Процентная ставка вычисляется по формуле  $S_0 = \frac{S}{1+i}$   $7000000 = \frac{7770000}{1+i}$  да

$$1+i = \frac{777}{700} = 1,11$$

- ; или 11%.

- $S_0 = S \cdot (1-d)$  ставка вычисляется по формуле  $\cdot (1-d)$



# Решение задачи 26. Задача 27

- $1 - d = \frac{700}{777} = \frac{100}{111}$ ;  $d = 1 - \frac{100}{111} = \frac{11}{111} = 0,099$  или 9,9%.
  - **Задача 27.** Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 10% с ежемесячным начислением процентов. Найти сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменился.
  - **Решение.** Искомая учётная ставка является эффективной учётной ставкой и вычисляется  $d_{\text{эфф}} = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m$  /ле
- $$d_{\text{эфф}} = 1 - \left(1 - \frac{0,1}{12}\right)^{12} = 0,09555$$
- или 9,55%.

# Задача 28. Задача 29

- **Задача 28.** Вексель стоимостью 550 тыс. руб. учитывается за три года до погашения по сложной учетной ставке 12% годовых. Найти сумму, которую получит векселедержатель, и величину дисконта.

- $$FS_0 = S_n \cdot (1 - d)^n = 550000 \cdot (1 - 0,12)^3 = 374809,6$$

- .

- **Задача 29.** Клиент имеет вексель на 20000 руб., который он хочет учесть 24.04.2011 г. в банке по сложной учетной

# Задачи 29, 30

- Какую сумму он получит, если срок погашения 12.09.2011 г.?
- **Решение.** Найдём время  $t$  с момента учёта до момента погашения векселя.  
24.04 – день №144; 12.09 – день № 255;  
число дней  $255t = \frac{141}{265} = 141$ ; . Сумма,  
полученная клиентом  $S_0 = S_t \cdot (1 - d)^t = 20000 \cdot (1 - 0,1)^{\frac{141}{365}} = 19202,32$
- **Задача 30.** Номинальная учетная ставка равна 10%. При этом проценты начисляются ежеквартально. Найти эффективную учетную ставку.

# Решение задачи 30. Задача 31

- Эффективная учётная ставка равна
- $d_{\text{эфф}} = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0,1}{4}\right)^4 = 0,0963$  или 9,63%.
- **Задача 31.** Что выгоднее, положить 1000 у.е. в банк на год под 8% годовых или купить за 1000 у.е. вексель с номиналом 1100 у.е. и погашением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов?

# Решение задачи 31. Задача 32

- Нарощенная сумма при вкладе в банк равна  $S = S_0 \cdot (1 + i) = 1000 \cdot (1 + 0,08) = 1080$  Покупка векселя с номиналом 1100 выгоднее. Доходность покупки векселя вычисляется  $S = S_0 \cdot (1 + i)$  ;  
 $1100 = 1000 \cdot (1 + i); 1 + i = 1,1; i = 0,1$  или 10%.
- **Задача 32.** Вексель куплен за 200 дней до его погашения. На момент покупки рыночная простая учетная ставка составляла 7% годовых.

# Задача 32

- Через 5 дней вексель продали по учетной ставке 6% годовых. Оцените эффективность данной финансовой операции в виде ставки простых процентов. Временная база  $K = 365$  дней.

- **Решение.** Вексель куплен за сумму

- $S_0 = S \cdot (1 - t \cdot i) = S \cdot \left(1 - \frac{200}{365} \cdot 0,07\right) = 0,9616S$  . Вексель

продан за  $S'_0 = S \cdot (1 - t' \cdot i) = S \cdot \left(1 - \frac{200 - 5}{365} \cdot 0,06\right) = 0,9679S$  .

Эффективность операции выражается

по формуле  $S'_n = S_n \cdot (1 + t \cdot i)$  . Отсюда  $0,9679S_0 = 0,9616S_0 \cdot \left(1 + \frac{5}{365} \cdot i\right)$

- $1 + \frac{i}{73} = \frac{9679}{9616}$ ;  $i = 73 \cdot \left(\frac{9679}{9616} - 1\right) = 0,4783$ ; или 47,83% .

# Задачи 33, 34

- **Задача 33.** Найти сложную процентную ставку, эквивалентную непрерывной ставке 8%. Ответ привести с точностью до 0,01%.

- $i = e^{\delta} - 1 = e^{0,08} - 1 = 0,0833$  ставка процентов  
равна

- или 8,33%.

- **Задача 34.** Найти сложную процентную ставку, эквивалентную простой ставке 10%.

# Решение задачи 34. Задача 35.

- процентных ставок, получим

- $i_c = \sqrt[n]{1 + n \cdot i_{\Pi}} - 1 = \sqrt[5]{1 + 5 \cdot 0,1} - 1 = 0,0845$  или 8,45%.

- **Задача 35.** Найти простую процентную ставку, эквивалентную сложной ставке 11% для временного интервала 1,5 года.

- **Решение.** Искомая простая ставка

- $i_{\Pi} = \frac{1}{n} \cdot ((1 + i_c)^n - 1) = \frac{1}{1,5} \cdot ((1 + 0,11)^{1,5} - 1) = 0,113$   
или 11,3%.



# Задача 36

- Найти непрерывную процентную ставку , эквивалентную простой ставке в 15% для временного интервала в 5 лет.
- **Решение.** Используя равенство множителей наращени  $e^{\delta \cdot n} = 1 + n \cdot i_{\Pi}$  , найдём непрерывную ставку  $i_{\Pi}$  процентов (силу  $\delta$ )  
 $\delta = \frac{1}{n} \cdot \ln(1 + i_{\Pi} \cdot n) = \frac{1}{5} \cdot \ln(1 + 0,15 \cdot 5) = 0,1119$
- или 11,19%.

# Задача 37

- Найти простую процентную ставку , эквивалентную сложной ставке в 15% для временного интервала в 5 лет при ежемесячном начислении процентов.
- **Решение.** Используя равенство множителей наращенения  $1 + n \cdot i_{\Pi} = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n}$
- найдём простую ставку процентов
- $i_{\Pi} = \frac{1}{n} \cdot \left( \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n} - 1 \right) = \frac{1}{5} \cdot \left( \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1 \right) = 0,2214$  или 22,14%.

# Задача 38

- Номинальная процентная ставка составляет 12% годовых при годовом темпе инфляции 4%. Чему равна реальная ставка с учётом инфляции. Чему равна эффективная процентная ставка, если проценты начисляются ежемесячно? ежедневно?

ежеквартально?

- Решение.** Реальная ставка с учётом инфляции равна  $r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{0,12 - 0,04}{1 + 0,04} = 0,0377$  или 3,77%

- 3,7%. Эффективная годовая ставка вычисляется по формуле  $i_{эфф} = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$

# Решение задачи 38. Задача 39

- При **ежемесячном начислении**  
 $\Gamma_{i_{эфф}} = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1268$  или 12,68%
- **ислении процентов**
- При **ежеквартальном начислении**  
 $\Pi_{i_{эфф}} = \left(1 + \frac{0,12}{365}\right)^{365} - 1 = 0,1275$  или 12,75%
- При **ежегодном начислении**  
 $\Theta_{i_{эфф}} = \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 - 1 = 0,1255$  или 12,55%
- **Задача 39.** Номинальная процентная ставка составляет 15% годовых. Чему равна

# Задача 39

- эффективная процентная ставка, если проценты начисляются ежемесячно? ежедневно? ежеквартально?

- **Решение.** Воспользуемся формулой  $i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$

- При ежемесячном начислении

$$i = \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1608 \text{ или } 16,08\%$$

- 

- $i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{0,15}{365}\right)^{365} - 1 = 0,1618 \text{ или } 16,18\%$  процентов

# Решение задачи 39. Задача 40

- При ежеквартальном начислении процентов  $i_{эфф} = \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1 = 0,1586$  или 15,86% .
- **Задача 40.** Ставка процентов составляет 10% годовых. Месячный темп инфляции в первом полугодии был постоянен и составил 2%, во втором полугодии — 3%. Во сколько раз реальная наращенная сумма превзойдёт сумму депозита за год?

# Решение задачи 40. Задача 41

- Темп инфляции за год составляет

$$\alpha = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) - 1 = (1 + 0,02) \cdot (1 + 0,03) - 1 = 0,0506$$
$$r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{0,1 - 0,0506}{1 + 0,0506} = 0,047$$

процентная ставка равна

. Реальная сумма депозита за год  
возрастёт в  $1 + r = 1,047$  раз.

- $\hat{t} = t_1 + t_2 + t_3$  **41.** Темп инфляции за период  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- равен  $t_1, t_2, t_3$ . Темпы инфляции за периоды  $t_1, t_2, t_3$  соответственно, составляют геометрическую прогрессию

# Задача 41

- знаменателем 0,9. Найти темп инфляции за каждый период.

- **Решение.** Темпы инфляций равны  $\alpha_1, \alpha_2 = 0,9 \alpha_1$

$$\alpha_3 = 0,81 \alpha_1 \quad (1 + \alpha_1)(1 + 0,9 \alpha_1)(1 + 0,81 \alpha_1) = 1 + 0,75$$

- $f(\alpha_1) = 729 \alpha_1^3 + 2439 \alpha_1^2 + 2710 \alpha_1 - 750 = 0$

Следовательно

- $f(0,22) = -28; f(0,23) = 28$  Следовательно  $\alpha_1 = 0,225$  с точностью до 0,005 или 22,5%.



# Задача 42

- Темп инфляции за период  $t = t_1 + t_2 + t_3$  равен 0,8. Темпы инфляции  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  за периоды  $t_1, t_2, t_3$  соответственно, составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,01. Найти темп инфляции за каждый период.
- **Решение.** Воспользуемся формулой вычислен  $(1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_1 + 0,01) \cdot (1 + \alpha_1 + 0,02) = 1,8$  периодов

# Решение задачи 42. Задача 43

- $f(\alpha_1) = (1 + \alpha_1) \cdot (1,01 + \alpha_1) \cdot (1,02 + \alpha_1) - 1,8 = 0.$

- $f(0,2) = -0,02856, f(0,21) = 0,015726.$

Следовательно, с то  $\alpha_1 = 0,2050$  до  $0,005$  или  $20,5\%$ .

- **Задача 43.** Темп инфляции за первый период равен  $0,37$ . Темп инфляции за второй период на  $55\%$  выше, чем за первый. Найти темп инфляции за каждый период.

- **Решение.** Используя формулу 50

# Решение задачи 43. Задача 44

- получим  $(1 + \alpha_1) \cdot (1 + 1,55\alpha_1) = 1,37$  ;  $\alpha_1^2 + 2,55\alpha_1 - 0,37 = 0$
- $\alpha_1 = \frac{-2,55 + \sqrt{2,55^2 + 6,2 \cdot 0,37}}{3,1} = 0,1346$  или 13,46%;  $\alpha_2 = 1,55 \cdot 13,46 = 20,79\%$
- **Задача 44.** Темп инфляции за период  $t = t_1 + t_2$  равен 0,4. Темп инфляции за первый период в 1,173 раза меньше, чем за второй. Найти темп инфляции за каждый период.
- **Решение.** Используя формулу

$$(1 + \alpha_1) \cdot (1 + 1,173\alpha_1) = 1,4 \quad \text{и} \quad 1,173\alpha_1^2 + 2,173\alpha_1 - 0,227 = 0 \quad \text{второго периода,}$$

$$\alpha_1 = \frac{-2,173 + \sqrt{2,173^2 + 4 \cdot 1,173 \cdot 0,227}}{2 \cdot 1,173}$$

# Задача 45

- Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 3%. Найти квартальный, полугодовой и годовой темп инфляции.

- **Решение.** а) квартальный темп

инфля  $\alpha = (1 + 0,03)^4 - 1 = 0.1255$

- равен или 12,55%.

- $\alpha = (1 + 0,03)^6 - 1 = 0.1941$  й темп инфляции

равен

- или 19,41%.

$\alpha = (1 + 0,03)^{12} - 1 = 0.4258$

- б) годовой темп инфляции равен

- или 42,58%

# Задача 46

- Месячный темп инфляции составляет 3%. Найти индекс цен и темп инфляции за год, определить наращенную сумму за год, если на сумму 200000 руб. в течение года начислялась простая (сложная) процентная ставка 15% годовых ( $K=360$ ), и определить ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.

$$\alpha = (1 + 0,03)^{12} - 1 = 0,4258$$

Темп инфляции за год равен

или 42.58%. индекс цен 1.42

# Решение задачи 46

- Нарощенная сумма равна  $200000 \cdot 1,15 = 230000$ .
- В случае сложных процентов месячная ставка равна \_\_\_\_\_ или 1,17%.  
Годовая ставка, при которой потери из-за инфляции равны наращению составит  $42, (1 + 0,15)^{1/12} - 1 = 0,01171$

# Задача 47

- Темп инфляции  $\alpha_1$  за период  $t = t_1 + t_2 + t_3$  равен 1,2. Темпы инфляции  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  за периоды  $t_1, t_2, t_3$

- соответственно, составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,1. Найти темп инфляции за каждый период.

- **Решение.** Используя формулу

$$(1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3) = 1 + 1,2$$

или периода,

# Решение задачи 47. Задача 48

- $f(\alpha_1) = (1 + \alpha_1) \cdot (1,1 + \alpha_1) \cdot (1,2 + \alpha_1) - 2,2 = 0$ ;  $f(0,2) = -0,016 < 0$ ;  $f(0,21) = 0,03 > 0$ . Следовательно, с точностью до 0,05  $\alpha_1 = 0,205$   $\alpha_2 = 0,305$   $\alpha_3 = 0,405$  .
- **Задача 48.** Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 1%. Годовая номинальная ставка 15%. Найти эффективную реальную ставку, если начисление происходит 6 раз в году.
- **Решение.** Годовая ставка инфляции
- $\alpha = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 0,1268$  ;



# Решение задачи 48. Задача 49

- реальная годовая процентная ставка  $r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha}$
- $= \frac{0,15 - 0,1268}{1 + 0,1268} = 0,0206$ ; эффективная годовая  $r_{эфф} = \left(1 + \frac{r}{6}\right)^6 - 1 = \left(1 + \frac{0,0206}{6}\right)^6 - 1 = 0,0208$  или 2,08%.
- **Задача 49.** Пусть темп инфляции за месяц равен 2%. Найти темп инфляции за год при условии постоянства темпа инфляции в течение года.
- $\alpha = (1 + 0,02)^{12} - 1 = 0,2682$  темп инфляции равен

# Задачи 50, 51

- Пусть темп инфляции за год равен  $\alpha = 20\%$ . Найти темп инфляции  $\alpha_1$  за квартал при условии его постоянства.

- **Решение.** Темп инфляции за квартал

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{1 + \alpha} - 1 = \sqrt[4]{1,2} - 1 = 0,0466$$

- или 4,6%.

- **Задача 51.** Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 8% годовых он мог бы иметь 10%

$$r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha} \quad 0,1 = \frac{i - 0,08}{1 + 0,08} \quad 0,108 = i - 0,08 \quad i = 0,188$$

**Решение.** Используем формулой

# Задача 52

- Найти реальный доход вкладчика, если на депозит положено 200000 у.е. на 4 года под 15% годовых с ежемесячным начислением процентов при квартальной инфляции, которая составляет в среднем за данный период 3%.

- $\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1 = (1 + 0,03)^4 - 1 = 0,1255$   
инфляции

Годовой темп

$$r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{0,15 - 0,1255}{1 + 0,1255} = 0,0218.$$

# Решение задачи 52. Задача 53

- Реальный доход равен

$$200000 \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{4 \cdot 12} - 200000 = 200000 \cdot \left(1 + \frac{0,0218}{12}\right)^{4 \cdot 12} - 200000$$
$$= 18205,71$$

- **Задача 53.** При какой годовой процентной ставке сумма увеличится в 3 раза за 10 лет, если проценты начисляются поквартально?

- **Решение.** Найдём ставку, исходя из уравнения  $3S_0 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{10 \cdot 4}$

# Решение задачи 53. Задача 54

- Откуда  $\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{40} = 3$  ;  $1 + \frac{i}{4} = 3^{1/40}$  ;  $i = 4 \cdot \left(3^{1/40} - 1\right) = 0,1114$  или 11,14%.
- **Задача 54.** Найти период времени , за который сумма, положенная на депозит под 13% годовых по схеме сложных процентов, возрастет в 4 раза.
- **Решение.** Используем формулу  $S_n = S_0 \cdot (1 + i)^n$
- $4S_0 = S_0 \cdot (1 + 0,13)^n$  ;  $1,13^n = 4$  ;  $n = \frac{\ln 4}{\ln 1,13} = 11,34$  ; **округляем до целого числа**

# Задача 55

- Компания имеет на депозите в банке 100000 руб. Депозитная ставка банка составляет 18% годовых. Предлагается объединить оборотные средства в совместном предприятии, которое прогнозирует утроение капитала через 8 лет. Провести сравнение вариантов вложения капитала.

**Решение** Найдём наращенную сумму в банке

# Решение задачи 55. Задача 56

- за 8 лет.  $S = S_0 \cdot (1 + 0,18)^8 = 3,76 \cdot S_0 > 3S_0$  .

Следовательно, оставить деньги на депозите в банке выгоднее.

- **Задача 56.** При какой годовой сложной процентной ставке сумма удвоится за 7 лет, если проценты начисляются ежеквартально?

- **Решение.** Используем правило

$$n = \frac{70}{i} \text{ и десяти}$$

$$7 = \frac{70}{i} \quad i$$

- в качестве уравнения. ; = 10%.

# Задача 57.

- При какой годовой сложной процентной ставке сумма утроится за 6 лет, если проценты начисляются ежемесячно? ежеквартально?

- **Решение.** Используем формулу

$$S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n}$$

- как уравнение относительно  $i$ .

$$3S_0 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{72} \Rightarrow \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{72} = 3$$

$$i = 12 \cdot \left(\sqrt[72]{3} - 1\right) = 0,1845$$

- ;  $i = 4 \cdot \left(\sqrt[24]{3} - 1\right) = 0,1873$  ИЛИ<sup>64</sup>



# Задача 58

- **Задача 58.** За сколько лет при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза в схеме простых процентов?

- **Решение.** Используем формулу

$$S_n = S_0 \cdot (1 + n \cdot i)^1$$

- $4S_0 = S_0 \cdot (1 + n \cdot 0,1)$  как правило  $1 + 0,1n = 4$  относительно  $n$ .

- ; ; .

- **Задача 59.** За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при

# Задачи 59, 60, 61

- Воспользуемся правилом «семидесяти»  $n = \frac{100}{i} = \frac{100}{18} = 5,56$ .
- **Задача 60.** За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке 18% годовых?
- **Решение.**  $n = \frac{70}{i} = \frac{70}{18} = 3,89$  года правилом семидесяти.
- **Задача 61.** Три платежа: 15000, 26000 и 45000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и

# Задачи 61, 62

- конце пятого, соответственно, заменить платежом 90000 руб. Годовая ставка 15%.

- **Решение.** Найдем срок платежа  $n$

исходя из уравнения эквив:

$$\frac{90000}{1,15^n} = \frac{15000}{1,15^2} + \frac{26000}{1,15^3} + \frac{45000}{1,15^5}$$

- $$1,15^n = \frac{90000}{\frac{15000}{1,15^2} + \frac{26000}{1,15^3} + \frac{45000}{1,15^5}} ; \quad n = \frac{\ln \frac{90000}{\frac{15000}{1,15^2} + \frac{26000}{1,15^3} + \frac{45000}{1,15^5}}}{\ln 1,15} = 4,18$$

- **Задача 62.** Три платежа: 13000, 25000 и 35000 руб., произведенные в начале

# Задача 62

- третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно, заменить двумя платежами в конце шестого и седьмого периодов. При этом первый платеж в три раза больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 11%.
- **Решение.** Обозначим второй из искомых платежей через  $S$ , тогда первый будет равен  $3S$ . Найдем эквивалентности ;
$$\frac{3S}{1,11^6} + \frac{S}{1,11^7} = \frac{13000}{1,11^2} + \frac{25000}{1,11^3} + \frac{35000}{1,11^5}$$

# Решение задачи 62. Задача 63

- $$S \cdot \left( \frac{3}{1,11^6} + \frac{1}{1,11^7} \right) = \frac{13000}{1,11^2} + \frac{25000}{1,11^3} + \frac{35000}{1,11^5}$$

- $$S = \frac{\frac{13000}{1,11^2} + \frac{25000}{1,11^3} + \frac{35000}{1,11^5}}{\frac{3}{1,11^6} + \frac{1}{1,11^7}} = 23783,14$$

- Первый платёж равен  $3S = 71367,43$  ,  
ВТ  $(23783,14)$  .

- **Задача 63.** Два платежа: 13000 и 35000 руб. произведенные в начале четвертого и в конце пятого периодов, соответственно, заменить

# Задача 63

- двумя платежами в конце шестого и восьмого периодов. При этом первый платеж на 20% больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 9%.

- **Решение.** Обозначим второй из искомым платежейй через  $S$ , тогда первый будет равен  $1,2S$ . Найдем  $S$ , исходя из

уравнения  $\frac{1,2S}{1,09^6} + \frac{S}{1,09^8} = \frac{13000}{1,09^2} + \frac{35000}{1,09^5}$  )СТИ

- $S \cdot \left( \frac{1,2}{1,09^6} + \frac{1}{1,09^8} \right) = \frac{13000}{1,09^3} + \frac{35000}{1,09^5}$  ;  $S = \frac{\frac{13000}{1,09^3} + \frac{35000}{1,09^5}}{\frac{1,2}{1,09^6} + \frac{1}{1,09^8}} = 26931,14$

# Решение задачи 63. Задача 64

- Первый платёж равен  $1,2S = 32317,72$  ,  
 $26931,14$  –
- .
- **Задача 64.** Один платеж 43000 руб. в начале третьего периода заменить тремя равными платежами, произведенными в начале первого и в конце четвертого и седьмого периодов, соответственно. Годовая ставка простых процентов равна 17%.

# Решение задачи 64. Задача 65

- Обозначим искомый платёж через  $S$ .

Найдем  $S$ , исходя из уравнения

эквивалентности  $S + \frac{S}{1,17^6} + \frac{S}{1,17^7} = \frac{43000}{1,17^2}$  ;

$$S \cdot \left(1 + \frac{1}{1,17^6} + \frac{1}{1,17^7}\right) = \frac{43000}{1,17^2} \quad S = \frac{43000}{1,17^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{1,17^6} + \frac{1}{1,17^7}\right)} = 16826,29$$

- **Задача 65.** Резервный фонд создается в течение 18 лет. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 4,5% годовых.



# Задача 65

- В течение первых 6 лет в конце каждого года в фонд вносили по 15000 у.е., в течение последующих 4 лет — по 18000 у.е. в конце года, а в последние 8 лет — по 22000 у.е. в конце года. Чему будет равна сумма фонда через 18 лет? Ответ привести с точностью до 0,01.
- **Решение.** Сумма фонда  $S$  складывается из трёх наращенных сумм, каждая из которых

# Решение задачи 65

- вычисляется по формуле  $S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  .

Причём, первая сумма лежит на депозите и наращивается в течение 12

лет, вторая – в  $S = S_1 \cdot (1 + 0,045)^{12} + S_2 \cdot (1 + 0,045)^8 + S_3 =$

$$= 15000 \cdot \frac{1,045^6 - 1}{0,045} \cdot (1,045)^{12} + 18000 \cdot \frac{1,045^4 - 1}{0,045} \cdot (1,045)^8 + 22000 \cdot \frac{1,045^8 - 1}{0,045} = 486738,41$$

- **Задача 66.** Семья планирует через 5 лет купить квартиру за 1900000 руб. и с этой целью ежемесячно на банковский депозит

# Задача 66

- вносится определенная сумма. Найти ее, если годовая банковская ставка составляет 11% с ежемесячным начислением процентов.

- **Решение.** Используем формулу  $S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n \cdot k} - 1}{i}$   
Подставляя данные задачи, получим уравнение относительно годового

$$1900000 = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{12 \cdot 5}}{0,11}$$

$$R = \frac{0,11 \cdot 1900000}{\left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{60} - 1} = 286727,25$$

• Откуда  $R = \frac{0,11 \cdot 1900000}{\left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{60} - 1} = 286727,25$  зен.

# Задача 67

- Какую сумму нужно положить в банк под 12% годовых мужчине 37 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста 60 лет в течение 15 лет в начале каждого месяца снимать по 10000 рублей, если проценты капитализируются: в конце года; в конце каждого полугодия; в конце каждого квартала; в конце каждого месяца?
- **Решение.** Обозначим через  $A$  искомую сумму. Тогда к пенсионному возрасту<sup>76</sup>

# Решение задачи 67

- сумма нарастится до величины  $A \cdot \left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{23k}$ .

Эта величина является приведённой суммой ренты (пенсии) и вычисляется по

$$\left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{23k} A = 10000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{k/12} - 1} \cdot \left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{k/12} A = \frac{10000}{\left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{23k}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{15k} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{k/12} - 1} \cdot \left(1 + \frac{0,12}{k}\right)^{k/12}$$

- $A = \frac{10000}{(1,12)^{23}} \cdot \frac{(1,12)^{15} - 1}{(1,12)^{1/12} - 1} \cdot (1 + 0,12)^{1/12} = 351180,05$  3 год,  $k = 1$ .

Проценты

- $A = \frac{10000}{(1,06)^{46}} \cdot \frac{(1,06)^{30} - 1}{(1,06)^{1/6} - 1} \cdot (1 + 0,06)^{1/6} = 336395,19$  2.

# Решение задачи 67. Задача 68

- Проценты начисляются раз в квартал,  $k =$

$$4A = \frac{10000}{(1,03)^{92}} \cdot \frac{(1,03)^{60} - 1}{(1,03)^{1/3} - 1} \cdot 1,03^{1/3} = 328850,68$$

- $Pr_A = \frac{10000}{(1,01)^{276}} \cdot \frac{(1,01)^{180} - 1}{0,01} \cdot 1,01 = 323762,57$  руб./мес,  $k =$   
12.

- 

- **Задача 68.** Сколько лет должна выплачиваться рента с годовым платежом 5000 руб., чтобы ее текущая (наращенная) стоимость превзошла

# Решение задачи 68. Задача 69

- Найдём наращенную величину (текущую стоимость) ренты  $S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 5000 \cdot \frac{1,09^n - 1}{0,09}$  и решим неравенство  $5000 \cdot \frac{1,09^n - 1}{0,09} > 75000$   $1,09^n - 1 > 15 \cdot 0,09$

$1,09^n > 2,35; n > \frac{\ln 2,35}{\ln 1,09} = 9,91$ . Наименьшее число лет равно 10.

- **Задача 69.** Фонд создается в течение 7 лет, взносы поступают в конце каждого полугодия равными суммами. На поступившие средства в конце года

# Задача 69

- начисляется 12% годовых. На сколько процентов возрастет сумма фонда в конце седьмого года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

- **Решение.** При годовой капитализации сумма фонда составит величину

$$S = \frac{R}{2} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/2} - 1} = \frac{R}{2} \cdot \frac{1,12^7 - 1}{\sqrt{1,12} - 1} = 10,3831R. \text{ При}$$

непрерывной капитализации сумма

$$\text{фонда сост} S' = \frac{R}{2} \cdot \frac{e^{in} - 1}{e^{i/p} - 1} = \frac{R}{2} \cdot \frac{e^{7 \cdot 0,12} - 1}{e^{0,06} - 1} = 10,6439R$$



# Решение задачи 69. Задача 70

- что в  $\frac{S'}{S} = \frac{10,6439R}{10,3881R} = 1,02462$  раза, или на 2,46%, больше, чем при годовой капитализации.
- **Задача 70.** Фонд создается в течение 10 лет. Средства поступают в фонд в конце года равными суммами. На собранные средства в конце года начисляется 10% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма фонда при переходе к: а) взносам в конце каждого квартала; б) ежемесячному начислению

# Решение задачи 70

- При ежегодных взносах наращенная сумма  $S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot \frac{1,1^{10} - 1}{0,1} = 15,9374R$ . При ежеквартальных взносах наращенная

сумма равна

- $S' = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{R}{4} \cdot \frac{1,1^{10} - 1}{1,1^{1/4} - 1} = 16,5232R$ , что в 1,03676

раза, или на 3,676%, больше, чем при годовых взносах. При ежемесячном начислении процентов наращенная

сумма  $S'' = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{120} - 1}{\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1} = 16,30208657R$

$$\frac{S''}{S} = \frac{16,30208657R}{15,9374R} = 1,0229$$

раза, или на 2,29%,

# Задача 71

- Какую сумму нужно положить в банк женщине 55 лет, чтобы в течение 18 лет в конце каждого года снимать по 3000 у.е., если на остаток вклада меньше 10000 у.е. начисляется 3% годовых, больше или равно 10000 у.е. — 4% годовых?
- **Решение.** Найдём срок, в течение которого приведённая величина ренты меньше 10000. Воспользуемся формулой вычисления приведённой

# Решение задачи 71

- решим неравенств  $A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 3000 \cdot \frac{1 - 1,03^{-n}}{0,03} < 10000$
- $3000 \cdot (1 - 1,03^{-n}) < 300$ ;  $1 - 1,03^{-n} < 0,1$ ;  $1,03^{-n} > 0,9$ ;  $-n > \frac{\ln 0,9}{\ln 1,03}$ ;
- $n < \frac{-\ln 0,9}{\ln 1,03} = 3,56$ . Следовательно 3% будут начисляться последние 3 года, а 4% первые 15 лет. Искомый вклад равен сумме приведённой величины 15-летней ренты и дисконтированной приведенной величины 3-летней ренты и равен
- $3000 \cdot \frac{1 - 1,04^{-15}}{0,04} + 3000 \cdot \frac{1 - 1,03^{-3}}{0,03} \cdot 1,04^{-15} = 38067,04$

# Задача 72

- Фонд создается в течение 5 лет. Средства поступают в фонд в конце года по 50000 руб., на них начисляется 13% годовых. В каком случае сумма фонда станет больше: а) при переходе к ежемесячным взносам в конце каждого месяца; б) при переходе к ежедневной капитализации процентов? ( $K=365$  дней).
- **Решение.** Величина фонда (наращенная

# Решение задачи 72

- сумма) при ежемесячных взносах равна

- $$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{50000}{12} \cdot \frac{(1,13)^5 - 1}{(1,13)^{1/12} - 1} = 342893,42$$
 ; при ежедневной капитализации процентов сумма фонда равна

$$S = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1} = S = 50000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,13}{365}\right)^{365 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,13}{365}\right)^{365} - 1} = 329721,11$$

В случае ежедневной капитализации процентов сумма меньше, чем в случае ежемесячных взносов.

# Задача 73

- Для создания премиального фонда один раз в год производятся взносы в размере 15000 руб. На вносимые средства начисляются проценты под 12% годовых. Определить размер фонда через 7 лет в следующих случаях: а) поступление средств в конце года, ежеквартальное начисление процентов; б) поступление средств в конце квартала, начисление процентов 6 раз в году; в) ежемесячное поступление средств и ежеквартальное начисление

# Решение задачи 73

- Воспользуемся формулой  $S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k/p} - 1}$

- а)  $S = 15000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{28} - 1}{(1,03)^4 - 1} = 153924,77$

- б)  $S = \frac{15000}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{6}\right)^{42} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{6}\right)^{6/4} - 1} = 161351,47$

- в)  $S = \frac{15000}{12} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{28} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4/12} - 1} = 162590,24 \cdot$



# Задачи 74, 75

- **Задача 74.** Формируется фонд на основе ежегодных отчислений в сумме 8000 у.е. с начислением на них сложных процентов по ставке 11%. Определить величину фонда через 10 лет.

- **Решение** 
$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 8000 \cdot \frac{1,11^{10} - 1}{0,11} = 133776,07$$

- **Задача 75.** Определить размер вклада, который обеспечивает ежегодное (в конце года) получение денежной суммы в размере 1700 у.е. в конце года в течение 19 лет, если процентная ставка равна 11%

# Решение задачи 75. Задача 76

- $A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 1700 \cdot \frac{1 - 1,11^{-19}}{0,11} = 13326,8.$

- **Задача 76.** Дайте определение внутренней нормы доходности потока и найдите  $CF = \{(0, -2500), (1; 2000), (2; 3500)\}$

- **Решение.** Внутренняя норма доходности – это такая процентная

$$\frac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \frac{P_n}{(1+i)^{t_n}} = 0 \quad \text{и} \quad -2500 + \frac{2000}{1+i} + \frac{3500}{(1+i)^2} = 0$$

- $x = \frac{1}{1+i} \quad 7x^2 + 4x - 5 = 0 \quad x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 7 \cdot 5}}{7} = 0,606428285$
- $i = x^{-1} - 1 = 0,649$

# Задача 77

- Дайте определение внутренней нормы доходности потока и найдите ее для

$$CF = \{(0; -500), (1; 450), (2; 300)\}$$

- **Решение.** Внутренняя норма доходности – это такая процентная

$$\left( \frac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \frac{P_n}{(1+i)^{t_n}} = 0 \right) \Rightarrow -500 + \frac{450}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} = 0$$

$$6x^2 + 9x - 10 = 0 \quad x = \frac{-9 + \sqrt{81 + 240}}{12} = 0,743 \quad i = x^{-1} - 1 = 0,3458$$

# Задача 78

- Определить доходность инвестиций, выраженную в виде годовой ставки процента, если известно, что на 25000 руб. вложений доход составит 3000 руб. ежегодно в течение 17 лет.
- **Решение.** Найдём искомый процент  $i$ , исходя из формулы  $A_n = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$
- рассматриваемой в качестве уравнения относительно  $i$   $25000 = 3000 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-17}}{i}$  ;
- $25i(1+i)^{17} - 3(1+i)^{17} - 3 = 0$   $i = 13\%$ .

# Задача 79

- Сравните два потока по среднему сроку:

$$CF_1 = \{(0; 500), (1; 300), (2; 450), (3; 100)\} \quad CF_2 = \{(0; 600), (1; 250), (2; 350), (3; 50)\}$$

- **Решение**  $t_1 = \frac{0 \cdot 500 + 1 \cdot 300 + 2 \cdot 450 + 3 \cdot 100}{500 + 300 + 450 + 100} = 1,3043$  ;

$$t_2 = \frac{0 \cdot 600 + 1 \cdot 250 + 2 \cdot 350 + 3 \cdot 50}{600 + 250 + 350 + 50} = 0,92$$

- **Задача 80.** Даны два потока  $CF_1 = \{(1; 200), (2; 250), (3; 150)\}$  и  $CF_2 = \{(1; 150), (2; 300), (3; 100)\}$ . Какой из этих потоков является предпочтительнее? Почему?

# Решение задачи 80. Задача 81

- Найдём современные величины обоих потоков.  $A_1 = \frac{200}{1+i} + \frac{250}{(1+i)^2} + \frac{150}{(1+i)^3}$  ;  $A_2 = \frac{150}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3}$  .
- $(1+i)^2 \cdot A_1 > (1+i)^2 \cdot A_2$ , так как  $(1+i)^2 \cdot A_1 = 450 + 200i + \frac{150}{1+i}$  ;
- $(1+i)^2 \cdot A_2 = 450 + 150i + \frac{100}{1+i}$ . Следовательно  $A_1 > A_2$ . Т. о. первый поток предпочтительнее.
- **Задача**  $CF = \{(0; -2500), (2; 2000), (4; \overline{3000})\}$  — это поток платежей и процентная ставка составляет 10%. Найти приведенную стоимость и наращенную величину этого потока.

# Решение задачи 81. Задача 82

- Приведённая стоимость равна.
- $A = -2500 + \frac{2000}{1,1^2} + \frac{3000}{1,1^4} = 1201,93$ . Нарощенная величина  $S = -2500 \cdot 1,1^4 + 2000 \cdot 1,1^2 + 3000 = 1759,75$ .
- $CF = \{(0; 600), (1; 250), (2; 350), (3; 600)\}$
- $t = 2$  к моменту времени при ставке 8%.
- **Решение.** Приведённая величина  $NPV_2 = 600 \cdot (1 + 0,08)^2 + 250 \cdot (1 + 0,08) + 350 + 600 \cdot (1 + 0,08)^{-1} = 1875,4$

# Задачи 83, 84

- Приведите поток  $CF = \{(0; 600), (1; 250), (2; 350), (3; 600)\}$
- к моменту времени  $t = 3$  при ставке 9%.
- **Решение.** Приведённая величина потока равна
  - $PV_2 = 600 \cdot (1 + 0,09)^3 + 250 \cdot (1 + 0,09)^2 + 350 \cdot (1 + 0,09) + 600 = 2055,54$
- **Задача 84.** Найдите средний срок потока
- $CF = \{(0; 100), (1; 200), (2; 400), (3; 100)\}$ .
- **Решение.** Средний срок рав  $t = \frac{t_1 \cdot P_1 + t_2 \cdot P_2 + \dots + t_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} =$



# Решение задачи 84. Задача 85

$$= \frac{0 \cdot 100 + 1 \cdot 200 + 2 \cdot 400 + 3 \cdot 100}{100 + 200 + 400 + 100} = 1,625$$

- **Задача 85.** На счет в банке помещено 160000 руб. За первые 5 лет и 6 месяцев процентная ставка равнялась 10%, а в следующие 7 лет и 4 месяца — 8%, капитализация полугодовая. Чему будет равна наращенная величина вклада через 12 лет 10 месяцев.

- **Решение.**

$$S = 160000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^{2 \cdot 5,5} \cdot \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^{2 \cdot (7 + 4/12)} = 160000 \cdot 1,05^{11} \cdot 1,04^{44/3}$$
$$= 486434,74$$

# Задача 86

- На счет в банке помещено 25000 руб., а через 5 лет сняли 20000 руб. Чему будет равна наращенная величина вклада через 12 лет (со дня помещения), если процентная ставка равна 11%, а капитализация полугодовая.

**Решение.** Через 5 лет сумма на банковском счете оказалась  $25000 \cdot \left(1 + \frac{0,11}{2}\right)^{2 \cdot 5} - 20000$ . Ещё через 7 лет сумма нарастится до величины  $(25000 \cdot (1,055)^{10} - 20000) \cdot \left(1 + \frac{0,11}{2}\right)^{2 \cdot 7} = 48042,92$

# Задача 87

- Банк предлагает вкладчикам на двухлетний срок два варианта начисления процентов: 1) в первый год 2,5% ежеквартально, во второй год по 2% ежеквартально; 2) в первое полугодие по 3,5% ежеквартально, а в каждом последующем полугодии ежеквартальная ставка убывает на 0,5%. Какой вклад выгоднее.
- $PeS = S_0(1 + 0,025)^4 \cdot (1 + 0,02)^4 = 1,1948 \cdot S_0$  равна

# Решение задачи 87. Задача 88

- 2) Наращенная сумма равна
- $S = S_0(1 + 0,035)^2 \cdot (1 + 0,03)^2 \cdot (1 + 0,025)^2 \cdot (1 + 0,02)^2 = 1,244 \cdot S_0.$
- Второй вариант выгоднее.
- **Задача 89.** Контракт предусматривает следующий порядок начисления сложных процентов: первый год — 11%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определить множитель наращивания за 2,5 года.

# Решение задачи 88. Задача 89

- Множитель наращенения является произведением четырёх множителей и равен  $(1 + 0,11)^{1/2} \cdot (1 + 0,12)^{1/2} \cdot (1 + 0,13)^{1/2} \cdot (1 + 0,14)^{1/2} \cdot (1 + 0,15)^{1/2}$   
 $= 1,13571$

**Задача 89.** Банк объявил следующие условия выдачи ссуды на один год: за первый квартал ссудный процент 30%; за второй квартал — 35%; за третий — 37%; за четвертый квартал — 40%. Определить сумму к возврату в банк, если ссуда составляет 200000 руб.

# Решение задачи 89. Задача 90

- Сумма к возврату равна  $S = 200000 \cdot (1 + 0,3) \cdot (1 + 0,35) \cdot (1 + 0,37) \cdot (1 + 0,4) = 673218$ .
- **Задача 90.** Банк объявил следующие условия выдачи ссуды на один год: за первый квартал ссудный процент 30%; за второй квартал — 35%; за третий — 37%; за четвертый квартал — 40%. Определить сумму к возврату в банк, если ссуда составляет 200000 руб.

# Решение задачи 90. Задача 91

- Сумма к возврату равна  $S = 200000 \cdot (1 + 0,3) \cdot (1 + 0,35) \cdot (1 + 0,37) \cdot (1 + 0,4) = 673218$ .
- **Задача 91.** Найти простую процентную ставку , эквивалентную сложной ставке для временного интервала в 6 лет при ежеквартальном начислении процентов.

- **Решение.** Приравняем множители наращенения и выразим ставку простых процентов.  $1 + 6i_{\Pi} = \left(1 + \frac{i_c}{4}\right)^{4 \cdot 6}$  ;  $6i_{\Pi} = \left(1 + \frac{i_c}{4}\right)^{24} - 1$  ;

$$i_{\Pi} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{i_c}{4}\right)^{24} - \frac{1}{6}$$

# Задача 92

- Найти простую процентную ставку , эквивалентную сложной ставке в 8% для временного интервала в 10 лет при ежемесячном начислении процентов.
- **Решение.** Найдём ставку , исходя из равенства множителей наращенения
- $1 + 10 \cdot i_{\text{п}} = \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12 \cdot 10}$  ;  $i_{\text{п}} = \frac{1}{10} \cdot \left( \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{120} - 1 \right) = 0,122$  **или**  
**12,2%.**



# Задачи 93, 94

- Найти простую процентную ставку  $i_{\Pi}$  , эквивалентную непрерывной ставке 9%.
- **Решение.** Найдём ставку  $i_{\Pi}$  , исходя из равенства множителей наращения
- $1 + n \cdot i_{\Pi} = e^{0,09n}$  ;  $i_{\Pi} = \frac{1}{n} \cdot (e^{0,09n} - 1)$
- **Задача 94.** Найти сложную процентную ставку , эквивалентную непрерывной ставке 9%.

# Решение задачи 94. Задача 95.

- Найдём ставку  $i_c$ , исходя из равенства множителей наращения  $(1 + i_c)^n = e^{0,09n}$   $1 + i_c = e^{0,09}$
- $i_c = e^{0,09} - 1 = 0,0942$  или 9,42%.
- **Задача 95.** Найти непрерывную процентную ставку  $i_H$ , эквивалентную сложной ставке 5%.
- **Решение.** Найдём ставку  $i_H$ , исходя из равенства множителей наращения  $e^{i_H n} = (1 + 0,05)^n$
- $e^{i_H} = 1,05$ ;  $i_H = \ln 1,05 = 0,0488$  или 4,88%.
-

# Задачи 96, 97

- Инвестор намерен положить некоторую сумму под 14% годовых с целью накопления через три года 1500000 руб. Определить сумму вклада.

**Решение.** Найдём искомую сумму  $S_0$   
исходя из уравнения  $1500000 = S_0 \cdot (1 + 0,14)^3$   $S_0 = \frac{1500000}{1,14^3} = 1012457,27$

- **Задача 97.** Рыночная цена 12-ти процентной облигации номиналом 1000 руб. за два года до погашения равна 1200 руб.

# Задача 97.

- Найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 10%, б) 14%, в) 12% и её курс.

- **Решение.** Найдём курс  $K = \frac{V}{N} = \frac{1200}{1000} = 1,2$  или 120%. Текущая стоимость  $P$

вычисляем по формуле  $P = c \cdot N \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + N \cdot (1+r)^{-n}$  и равна следующим величинам:

- а)  $P = 0,12 \cdot 1000 \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-2}}{0,1} + 1000 \cdot (1+0,1)^{-2} = 1034,71$  ;

- б)  $P = 0,12 \cdot 1000 \cdot \frac{1 - (1+0,14)^{-2}}{0,14} + 1000 \cdot (1+0,14)^{-2} = 1034,71 = 967,07$  ;

# Задачи 97, 98

- в) текущая стоимость  $P$  равна номинальной стоимости  $N$  и равна 1000, так как купонная и номинальная ставки равны.
- **Задача 98.** Найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 руб., сроком погашения 5 лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15%, если годовая процентная ставка составляет 20%.

# Решение задачи 98. Задача 99.

- Текущая стоимость  $P$  вычисляется по формуле  $P = c \cdot N \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} + N \cdot (1 + r)^{-n}$  и

$$P = 0,15 \cdot 1000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,2)^{-2}}{0,2} + 1000 \cdot (1 + 0,2)^{-2} = 850,47$$

- **Задача 99.** Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры  $(0,4; 0,7)$ , доходность безрисковой бумаги равна  $0,31$ . Найти портфель и его доходность, если его риск равен  $0,55$ .

# Решение задачи 99

- Обозначим через  $x_1$  долю рисковой бумаги,  $x_2$  через долю безрисковой бумаги, через  $\sigma_2$

- и доходность и риск рисковой бумаги.

$\bar{\sigma} = \sigma_2 \cdot x_2$  портфеля вычисляется  $0,55 = 0,7 \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{0,55}{0,7} = 0,7857$

- Следовательно  $x_1 = 1 - x_2 = 0,2143$  ;

- $\bar{\mu} = \mu_1 \cdot x_1 + \mu_2 \cdot x_2 = 0,31 \cdot 0,2143 + 0,4 \cdot 0,7857 = 0,3807$  портфеля равна

- **Задача 100.** Найдите изменение

# Задача 100

- обращения  $n = 7$  лет, номинальной стоимостью  $N = 50000$ , купонной ставкой  $c = 8\%$  и доходностью к погашению  $\rho = 10\%$  при увеличении и уменьшении доходности к погашению на  $2\%$ .
- **Решение.** Текущая рыночная стоимость облигации вычисляется по формуле
- $V = cN \frac{1 - (1 + \rho)^{-n}}{\rho} + N \cdot (1 + \rho)^{-n}$  . При ставке доходности к погашению  $\rho = 10\%$  рыночная стоимость



# Задачи 100, 101

- равна  $V = 0,8 \cdot 5000 \cdot \frac{1 - (1,1)^{-7}}{0,1} + 1000 \cdot (1,1)^{-7} = 45131,58$  ; при ставке 12% стоимость

- $V = 0,8 \cdot 5000 \cdot \frac{1 - (1,12)^{-7}}{0,12} + 1000 \cdot (1,12)^{-7} = 40872,49$  ; при ставке 8% стоимость

$$V = 0,8 \cdot 5000 \cdot \frac{1 - (1,08)^{-7}}{0,08} + 1000 \cdot (1,08)^{-7} = 45000$$

- **Задача 101.** Рыночная цена 20-ти процентной облигации номиналом 3500 руб. за два года до погашения равна 4300 руб. найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а)

# Решение задачи 101

- Курс облигации равен  $K = \frac{V}{N} = \frac{4300}{3500} = 1,2286$  или 122,86%. Текущую стоимость найдём по формуле  $P = c \cdot N \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + N \cdot (1+r)^{-n}$

$$\text{а) } P = 0,2 \cdot 3500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,14)^{-2}}{0,14} + 3500 \cdot (1 + 0,14)^{-2} = 3845,8$$

$$\text{б) } P = 0,2 \cdot 3500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,2)^{-2}}{0,2} + 3500 \cdot (1 + 0,2)^{-2} = 3500$$

$$\text{в) } P = 0,2 \cdot 3500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,23)^{-2}}{0,23} + 3500 \cdot (1 + 0,23)^{-2} = 3345,23$$

# Задачи 102, 103

- Найти срок ренты постнумерандо, если известны  $S = 2000; i = 15\%; R = 100$  .

- **Решение.** Найдём срок ренты  $n$ , исходя из формулы вычисления наращенной

$$C_S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad 2000 = 100 \cdot \frac{(1+0,15)^n - 1}{0,15} \quad (1,15)^n - 1 = 3 \quad (1,15)^n = 4$$

- $n = \frac{\ln 4}{\ln 1,15} = 9,92$  ; ;

- **Задача 103.** Найти рентный  $P_A = 3500; i = 8\%; n = 10$  ренты постнумерандо, если известны

# Решение задачи 103. Задача 104

- Найдём рентный платёж  $R$ , исходя из формулы вычисления приведённой величины  $A$ .  $A = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$  ;  $3500 = R \cdot \frac{1 - (1 + 0,08)^{-10}}{0,08}$
- $R = \frac{3500 \cdot 0,08}{1 - 1,08^{-10}} = 521,6$ .
- **Задача 104.** Семья планирует через 5 лет купить машину за 50000 у.е. С этой целью ежемесячно на банковский депозит вносится определенная сумма в у.е. Найти этот ежемесячный платеж, если годовая

# Задачи 104, 105

- банковская ставка составляет 13% с ежемесячным начислением процентов.
- **Решение**  $50000 = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{60} - 1}{0,13}$  ,  $R = \frac{6500}{\left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{60} - 1} = 5907,57$  .
- Месячный взнос равен  $R/12 = 492,3$ .
- **Задача 105.** Найти размер вклада, обеспечивающего получение в конце каждого года 2000 руб. бесконечно долго при сложной ставке 14% годовых.
- **Решение.**  $A = \frac{R}{i} = \frac{2000}{0,14} = 14285,714$

# Задача 106

- Во сколько раз больше будет наращенная сумма в конце  $n$ -ого периода при ежепериодном (в конце периода) платеже  $R$ , чем при разовом платеже в начальный момент времени?
- **Решение**  $S_1 = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  ;  $S_2 = R \cdot (1+i)^n$   $\frac{S_1}{S_2} = \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$
- **Задача 107.** Для бессрочной (вечной) ренты определить, что больше увеличит приведенную стоимость этой ренты,

# Задачи 106, 107

- увеличение рентного платежа на 3% или уменьшение процентной ставки на 3%?
- **Решение.**  $S = \frac{R}{i}$      $S_1 = \frac{1,03R}{i}$ ;     $S_2 = \frac{R}{0,97i} = 1,0309 \frac{R}{i}$  ;  
Увеличение процентной ставки приведёт к большему увеличению приведенной стоимости ренты.
- **Задача 107.** Фонд создается в течение 12 лет с ежегодными взносами 120000 у.е. в конце года. На поступившие средства

# Задача 107

- начисляется 4% годовых, если сумма не превышает 250000 у.е. и 4,5% годовых, если сумма превышает 250000 у.е. Чему будет равна величина фонда через 12 лет?

$$S_1 = 120000 \cdot \frac{1,04^n - 1}{0,04} < 250000 \quad 1,04^n < \frac{1}{12} + 1$$

$$\bullet \quad n < \frac{\ln 13 / 12}{\ln 1,04} = 2,0428 \quad ; \quad S_1 = 120000 \cdot \frac{1,04^3 - 1}{0,04} = 374592 \quad ;$$

$$S = 374592 \cdot 1,045^9 + 120000 \cdot \frac{1,045^9 - 1}{0,045} = 1852933,06$$

•



# Задача 108

- Сколько нужно вносить ежегодно на счет в банке под 5,5% годовых, чтобы через 14 лет накопить 90000 у.е., если: а) взносы в конце каждого квартала; б) взносы в конце каждого месяца?

- **Решение.** Воспользуемся формулой

- $$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k/p} - 1}$$
 . В случае а)  $p = 4$ ,  $k = 1$ ,  $i = 0,055$ ,  $n = 14$ ,  $S = 90000$ . Следовательно

$$90000 = \frac{R}{4} \cdot \frac{1,055^{14} - 1}{1,055^{1/4} - 1} \quad R = \frac{4 \cdot 90000 \cdot (1,055^{1/4} - 1)}{1,055^{14} - 1} = 4346,4$$

# Задачи 108, 109

- . В случае б)  $p = 12, R = \frac{12 \cdot 90000 \cdot (1,055^{1/12} - 1)}{1,055^{14} - 1} = 4327,09$
- **Задача 109.** За сколько лет можно накопить 150000 у.е., если в конце каждого квартала на счет вносится 10000 у.е. и на данные средства начисляются проценты в конце каждого полугодия по ставке 6% годовых? На сколько нужно увеличить годовые выплаты, чтобы срок уменьшился на полгода?

# Решение задачи 109. Задача 110

- Воспользуемся формулой  $S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1 + \frac{i}{k})^{kn} - 1}{(1 + \frac{i}{k})^{k/p} - 1}$
- где  $S = 150000$ ;  $p = 4$ ;  $i = 0,06$ ;  $k = 2$ ;  $R/4 = 10000$ ;  $R = 40000$ ; Найти  $n$ . Имеем

$$1,03^{2n} = 15 \cdot (\sqrt{1,03} - 1) + 1 \quad n = \frac{\ln(15 \cdot (\sqrt{1,03} - 1) + 1)}{2 \cdot \ln 1,03} = 3,41$$

**Задача 110.** Фонд создается в течение 10 лет, взносы поступают в конце каждого квартала равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляется 7% годовых.

# Решение задачи 109

- На сколько процентов возрастет сумма фонда в конце 10-го года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

- **Решение.** Найдём наращенную сумму при ежегодной капитализации

- $S_1 = R \cdot \frac{(1 + 0,07)^{10 \cdot 0,07} - 1}{0,07} = 13,82R$  . Найдём наращенную сумму при непрерывной

$$S_2 = R \cdot \frac{e^{10 \cdot 0,07} - 1}{e^{0,07} - 1} = 13,98R$$

- $\text{раг}^p = \frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{0,16R}{13,82R} \cdot 100 = 1,16\%$  **1,16% — дополнительный процент**

# Задача 110

- Вычислить приведенную и наращенную величины непрерывной 7-летней ренты с непрерывным начислением процентов с рентным платежом 300 при ставке 15% годовых.

- **Решение.** Приведенная величина равна

- $A = R \cdot \frac{1 - e^{-n}}{i} = 300 \cdot \frac{1 - e^{-7}}{0,15} = 1958,18.$       Наращенная  
сумма равна  $A = R \cdot \frac{1 - e^{-n}}{i} = 300 \cdot \frac{1 - e^{-7}}{0,15} = 1958,18$

# Задача 111

- Приведенная величина 12-летней ренты пренумерандо с непрерывным начислением процентов, процентной ставкой 5% равна 27000 руб. Найти наращенную сумму.
- **Решение.** Воспользуемся формулой, связывающей наращенную величину с приведённой суммой  $S = A \cdot e^{i \cdot n} = 27000 \cdot e^{0,05 \cdot 12} = 49197,21$

# Задача 112

- Приведенная величина 7-летней ренты пренумерандо с ежемесячным начислением процентов, процентной ставкой 7,5%, равна 100000 руб. Найти наращенную сумму.
- **Решение.** Наращенная сумма равна .

$$S = A \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n} = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0,075}{12}\right)^{84} = 168769,92$$

# Задача 113

- Нарощенная сумма 5-летней ренты постнумерандо с ежеквартальным начислением процентов, процентной ставкой 4,25% равна 50000 руб. Найти приведенную величину.

- **Решение.** Найдём приведенную величину по

$$A = S \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-k \cdot n} = 50000 \cdot \left(1 + \frac{0,0425}{4}\right)^{-20} = 40473,36$$



# Задача 114

- Во сколько раз увеличится приведенная величина ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 20%.
- **Решение.** В  $1 + i = 1,2$  раза.
- **Задача 115.** Во сколько раз увеличится приведенная величина квартальной ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 30%.

# Решение задачи 115.

- Приведённая величина ренты пренумерандо равна приведённой величине ренты постнумерандо, умноженной на множитель наращивания за один малый период (квартал), т. е. на
- $(1 + i)^{1/4} = (1 + 0,3)^{1/4} = 1,0678$  . Следовательно приведённая величина ренты пренумерандо в 1,0678 раза больше приведённой величины ренты постнумерандо.

# Задача 116

- Какова процентная ставка, если наращенная величина месячной ренты постнумерандо увеличится в 1,0234 раза, если платежи платить в начале периода?
- $(1+i)^{1/p}$  **значение.** Величина ренты пренумерандо в  $(1+i)^{1/12} = 1,0234$
- $i = 1,0234^{12} - 1 = 0,3199$  **больше приведённой величины ренты постнумерандо.**  
Поэтому ;

# Задача 117

- Какова процентная ставка, если приведенная величина ежедневной ренты постнумерандо увеличится в 1,000687 раз, если платежи платить в начале периода ( $K=360$ )?

- **Решение.** Величина ренты

$(1+i)^{1/p}$  мерандо в

- $\frac{1}{(1+i)^{1/360}}$  раза больше приведённой  $(1+i)^{1/360} = 1,000687$

$i = 1,000687^{360} - 1 = 0,2805$  постнумерандо.

поэтому, ;

# Задача 118

- Заменить ренту с параметрами  $R_1 = 200$ ;  $n = 5$ ;  $i = 10\%$  рентой с параметрами  $R_2 = 100$ ;  $i = 10\%$  .

- **Решение.** Используем уравнение эквивалентности (равенство

приведённых величин  $R_1 \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{i_1} = R_2 \cdot \frac{1 - (1+i_2)^{-n_2}}{i_2}$

$$\cdot 200 \frac{1 - (1+0,1)^{-5}}{0,1} = 100 \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-n}}{0,1} \quad 2 - 2 \cdot 1,1^{-5} = 1 - 1,1^{-n}$$

- $1,1^{-n} = 2 \cdot 1,1^{-5} - 1$  ;
- ;  $n = -\frac{\ln(2 \cdot 1,1^{-5} - 1)}{\ln 1,1} = 14,9$

# Задача 119

- Замените годовую ренту параметрами  $R_1 = 2; n_1 = 2; i = 20\%$ , на  $p$ -срочную (месячную) ренту  $n_2 = 4; i = 20\%$ .

- Решение. Используем уравнение эквивалентности (равенство

приведённых величин)

$$R_1 \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{i_1} = \frac{R_2}{p} \cdot \frac{1 - (1+i_2)^{-n_2}}{(1+i_2)^{1/p} - 1}$$

$$2 \frac{1 - (1+0,2)^{-3}}{0,2} = \frac{R_2}{p} \cdot \frac{1 - (1+0,2)^{-4}}{1,2^{1/12} - 1}$$

- $$R_2 = \frac{120 \cdot (1 - 1,2^{-3})(1,2^{1/12} - 1)}{1 - 1,2^{-4}} = 1,495$$

# Задача 120

- Замените две ренты постнумерандо с параметрами  $R_1 = 200; n_1 = 4; i_1 = 10\%$  и  $R_2 = 250; n_2 = 6; i_2 = 12\%$
- разовым платежом в момент времени  $n = 4$

$$i = 15\%$$

- И процентной ставкой

- **Решение.** Используем уравнение эквивалентности

$$R_1 \cdot \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{i_1} + R_2 \cdot \frac{1 - (1+i_2)^{-n_2}}{i_2} = S \cdot (1+i)^{-n}$$

двух рент)

$$200 \cdot \frac{1 - (1,12)^{-4}}{0,12} + 250 \cdot \frac{1 - (1,14)^{-6}}{0,14} = S \cdot (1,15)^{-4}$$

$$S = 1,15^4 \cdot 200 \cdot \frac{1 - (1,12)^{-4}}{0,12} + 1,15^4 \cdot 250 \cdot \frac{1 - (1,14)^{-6}}{0,14} = 2762,79$$

# Задача 121

- Консолидируйте три ренты  
 постнумерандо  $R_1 = 1000; n_1 = 3; i_1 = 10\%$   $R_2 = 1500; n_2 = 5; i_2 = 10\%$   
 $R_3 = 2000; n_3 = 7; i_3 = 10\%$  4-летней рентой  
 постнумерандо с  $i = 15\%$  .

- **Решение.** Воспользуемся равенством суммы приведённых величин трёх данных рент и приведённой величины

$$\text{Искомо } R_1 \cdot \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{i_1} + R_2 \cdot \frac{1 - (1+i_2)^{-n_2}}{i_2} + R_3 \cdot \frac{1 - (1+i_3)^{-n_3}}{i_3} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$



# Задачи 121, 122

$$1000 \cdot \frac{1 - (1,1)^{-3}}{0,1} + 1500 \cdot \frac{1 - (1,1)^{-5}}{0,1} + 2000 \cdot \frac{1 - (1,1)^{-7}}{0,1}$$
$$= R \cdot \frac{1 - (1,15)^{-4}}{0,15}$$

$$R = \frac{1500 \cdot (1 - 1,1^{-3}) + 2250 \cdot (1 - 1,1^{-5}) + 3000 \cdot (1 - 1,1^{-7})}{1 - 1,15^{-4}} = 6273,21$$

**Задача 122.** Пусть доходность актива за  $\mu_1$  месяц равна 2%. Найти доходность  $\mu$  актива за год при условии постоянства месячной доходности в течение года.

# Решение задачи 122. Задача 123

- Доходность актива за год равна

$$\mu = (1 + \mu_1)^{12} - 1 = 1,03^{12} - 1 = 0,2628 \text{ или } 26,28\%.$$

- **Задача 123.** Замените единовременный платеж 345000 руб. в момент времени  $t = 2$

- $p$ -срочной рентой постнумерандо с параметрами  $R_1; n_1 = 5; i = 15\%; p = 6$

- **Решение.** Приравняем современные величины данного платежа и искомой

ренты

$$\frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + i_1)^{-n_1}}{(1 + i_1)^{1/p} - 1} = S \cdot (1 + i)^{-n}$$

# Задачи 123, 124, 125

$$\frac{R}{6} \cdot \frac{1 - (1,15)^{-5}}{(1,15)^{1/6} - 1} = 345000 \cdot (1,15)^{-2R} \quad R = \frac{345000 \cdot 1,15^{-2} \cdot (1,15^{1/6} - 1) \cdot 6}{1 - 1,15^{-5}} = 73360,95$$

- **Задача 124.** Доходность актива за год равна 24%. Найти доходность актива за квартал при условии ее постоянства.
- **Решение.** Квартальная ставка равна
- $\mu_{1/4} = \sqrt[4]{1 + \mu} - 1 = \sqrt[4]{1,24} - 1 = 0,0553$  или 5,53%.
- **Задача 125.** Замените единовременный платеж 600000 руб. в момент времени  $t = 1$  и процентной ставкой 8% -срочной рентой

# Задача 125

- постнумерандо с параметрами  $R_1 = 5000$ ;  $n_1$ ;  $i_1 = 8,25\%$

- **Решение.** Приравняем современные величины данного платежа и искомой ренты

$$\frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + i_1)^{-n_1}}{(1 + i_1)^{1/p} - 1} = S \cdot (1 + i)^{-n} \quad \frac{5000}{12} \cdot \frac{1 - (1,0825)^{-n_1}}{(1,0825)^{1/12} - 1} = 60000 \cdot (1,08)^{-1}$$

$$1 - (1,0825)^{-n_1} = \frac{720000 \cdot (0,0825^{1/12} - 1)}{5000 \cdot 1,08} \quad - (1,0825)^{-n_1} = \frac{720 \cdot (0,0825^{1/12} - 1)}{5,4} - 1$$

$$(1,0825)^{-n_1} = 1 - \frac{800 \cdot (0,0825^{1/12} - 1)}{6} \quad n_1 = - \frac{\ln \left( 1 - \frac{400}{3} \cdot (0,0825^{1/12} - 1) \right)}{\ln 1,0825} = 27,14$$

# Задачи 126, 127

- Пусть доходности за два последовательных  $t_1$ ;  $t_2$  периода времени равны 20% и 30% соответственно. Найти доходность  $t = t_1 + t_2$  период .
- **Решение.** Годовая доходность равна
- $\mu = (1 + \mu_1) \cdot (1 + \mu_2) - 1 = 1,2 \cdot 1,3 - 1 = 0,56$  или 56%.
- **Задача 127.** По вине пенсионного фонда семье в течение 3 лет не доплачивали 625 руб. ежемесячно. Какую сумму должен

# Задачи 127, 128

- должен выплатить фонд вместе с процентами (10% годовых)?

- **Решение.** Сумма выплаты равна

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n_1}}{(1+i)^{1/p} - 1} = 625 \cdot \frac{1,1^3 - 1}{1,1^{1/12} - 1} = 25943,24$$

- **Задача 128.** Доходность актива за

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$\mu_1; \mu_2; \mu_3$       $|$   $t_1; t_2; t_3$  0,75. Доходности актива за периоды соответственно

составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 1,2. Найти доходность актива за каждый период

# Решение задачи 128

- Доходности активов за периоды равны
- $\mu_1; \mu_2 = 1,2 \cdot \mu_1; \mu_3 = 1,44 \cdot \mu_1$ . Тогда  $(1 + \mu_1) \cdot (1 + 1,2\mu_1) \cdot (1 + 1,44\mu_1) = 1 + 0,75$

$$f(\mu_1) = (1 + \mu_1) \cdot (1 + 1,2\mu_1) \cdot (1 + 1,44\mu_1) - 1,75 = 0 \quad f(0,2) = 0,1665 \quad f(0,19) = 0,11$$

$$f(0,18) = 0,0568 \quad f(0,17) = 0,00352 \quad f(0,16) = -1,43 \quad f(0,168) = -0,007$$

Так как значения функции  $f$  имеют разные знаки в точках 0,168 и 0,17, то с точностью до 0,001 (0,1%) искомое значение до

$$\mu_1 = 0,169; \mu_2 = 1,2 \cdot \mu_1 = 0,228; \mu_3 = 1,44 \cdot \mu_1 = 0,2434$$