МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Лекция 8

Поиск решения задач, формальные модели которых сводятся к многокритериальным задачам о назначениях

(СЛУЧАЙ ДВУХ КРИТЕРИЕВ)

Содержательная постановка многокритериальной задачи о назначениях

Заданы n работ и n рабочих, причем известна стоимость r(i, j) и время t(i,j) выполнения i-м рабочим j-й работы. Требуется распределить работы между рабочими т.о., чтобы:

1. Все работы были выполнены;

2. Все рабочие были заняты;

3. Суммарные задачи на выполнение всего цикла работ были минимальны.

4. Время выполнения всех работ было минимально.

Формальная постановка задачи

$$
\begin{cases}
S = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r(i,j)\, y(i,j) \to \min; \text{ - минимизация затрат на выполнение плана;} \\
T = \max\limits_{i} \max\limits_{j} t(i,j) y(i,j) \to \min; \text{ - минимизация времени выполнения работ;} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad j = 1,2,\dots,n; \quad \text{- условие выполнения всех работ;} \\
\sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad i = 1,2,\dots,n; \quad \text{- условие загруженности всех рабочих;} \\
y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,n \quad \text{– дискретность переменных}
\end{cases}
\qquad (1)
$$

Примечание: если i-й рабочий не может делать j-ю работу, то ***r(i,j)=∞***

Формальная постановка задачи поиска нижней границы минимизации затрат в системе (1)

$$\begin{cases} S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r(i,j)\, y(i,j) \to \min; \text{ - минимизация затрат;} \\ \sum_{i=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad j = 1,2,\dots,n; \quad \text{- условие выполнения всех работ;} \\ \sum_{j=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad i = 1,2,\dots,n; \quad \text{- условие загруженности всех рабочих;} \\ y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,n \quad \text{– дискретность переменных} \end{cases} \qquad (2)$$

Формальная постановка задачи поиска верхней границы объема затрат в на выполнение работ в системе (1)

$$\begin{cases} S_{\max} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r(i,j)\, y(i,j) \to \max; \ \text{- максимизация затрат;} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n; \quad \text{- условие выполнения всех работ;} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad \text{- условие загруженности всех рабочих;} \\ y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,n \quad \text{– дискретность переменных} \end{cases} \tag{3}$$

Формальная постановка задачи поиска нижней границы времени выполнения плана в системе (1)

$$\begin{cases} T_{\min} = \min\limits_{i} \min\limits_{j} t(i,j) y(i,j) \text{ - минимизация времени выполнения плана;} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n; \quad \text{- условие выполнения всех работ;} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad \text{- условие загруженности всех рабочих;} \\ y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,n \quad \text{– дискретность переменных} \end{cases} \qquad (4)$$

Формальная постановка задачи поиска верхней границы времени выполнения плана в системе (1)

$$\begin{cases} T_{\max} = \max\limits_{i} \max\limits_{j} t(i,j)y(i,j) \text{ - максимизация времени выполнения плана;} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n; \quad \text{- условие выполнения всех работ;} \qquad (5) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad \text{- условие загруженности всех рабочих;} \\ y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,n \quad \text{– дискретность переменных} \end{cases}$$

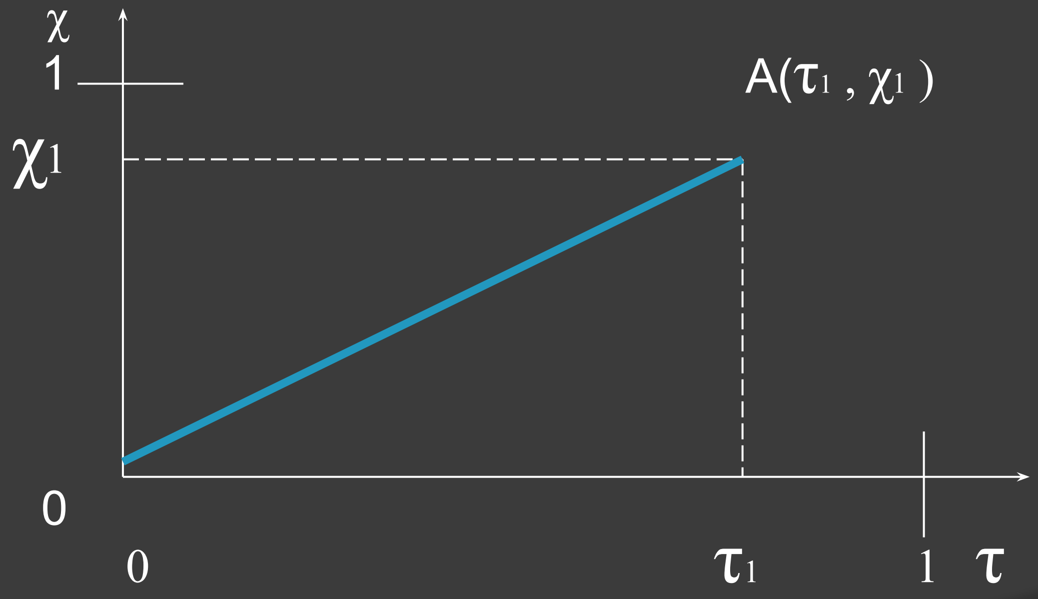
Формальная постановка задачи с нормированными целевыми функциями

$$\begin{cases} \chi = \dfrac{S - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} \to \min; \\ \tau = \dfrac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad j = 1,2,\dots,n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad i = 1,2,\dots,n; \\ y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,n. \end{cases} \tag{6}$$

Примечание: если i-й рабочий не может делать j-ю работу, то ***r(i,j)*=∞**

Графическая иллюстрация

- Любому допустимому вектору «У» системы (6) соответствует точка А в системе координат «χ, τ»:



$L(0,A)= \chi_1\hat{}2 + \tau_1\hat{}2$

Формальная постановка задачи с нормированными целевыми функциями

$$\begin{cases} F = \chi^2 + \tau^2 = \left(\dfrac{S - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} \right)^2 + \left(\dfrac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \right)^2 \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i, j) = 1, \quad j = 1,2,\ldots, n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i, j) = 1, \quad i = 1,2,\ldots, n; \\ y(i, j) = 1,0; \quad i = 1,2,\ldots, n; \quad j = 1,2,\ldots, n. \end{cases} \tag{7}$$

Теоремы, облегчающие поиск решения системы (1):

- Теорема 1: Оптимальное решение системы (7) является одним из оптимальных по Парето решений системы (1).
- Теорема 2: Существует единственное значение, минимизирующее целевую функцию F системы (7).

Алгоритм поиска решения системы (7) (первые 6 шагов)

Шаг 1. R = ∞.

Шаг 2. Строится перестановка π компонент Матрицы исходных данных М такая, что для её k-й компоненты t(i,j) и (k+1)-й компоненты t(p,q) справедливо: t(i,j) ≤ t(p,q).

Шаг 3. k=1.

Шаг 4. T присваивается значение, равное t(i,j) на k-м месте в перестановке π .

Шаг 5. $\forall (i, j) \in U : t(i, j) > T \Rightarrow r(i, j) = \infty.$

Шаг 6. После этого матрица М , содержащая лишь *r(i,j)*, используется для решения «классической» задачи о назначениях.

Алгоритм поиска решения системы (7) (последние 5 шагов)

Шаг 6. Вычисляется значение целевой функции F системы (7).

Шаг 7. Если $F < R$, то перейти к шагу 8, в противном случае – к шагу 10

Шаг 8. $k = k + 1$.

Шаг 9. Перейти к шагу 4.

Шаг 10. Конец алгоритма. Величина R равна оптимальному значению целевой функции системы (7).

ПРИМЕР

Решить задачу (1) сведением ее к виду (7), если данные матриц r и t приведены ниже:

Матрица “r”

2	11	7	4
12	8	3	9
14	10	5	13
4	6	15	1

Матрица “t”

14	5	9	12
4	8	13	7
2	6	11	3
12	10	1	15

РЕШЕНИЕ

- Шаг 1. $R = \infty$.
- Шаг 2. $\pi =$

4,3	3,1	3,4	2,1
1,2	3,2	2,4	2,2
1,3	4,2	3,3	1,4
4,1	2,3	1,1	4,4

Читать таблицу слева направо сверху вниз.

- Шаг 3. $S_{max} = 53$; $S_{min} = 0$; $T_{max} = 15$; $T_{min} = 0$.
- Шаг 4. $T=5$; $S=51$; $F=1{,}037$.
- Шаг 5. $T=6$; $S=51$; $F=1{,}236$.
- Шаг 6. Конец алгоритма. $R = 1{,}037$.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Решить задачу (1) сведением ее к виду (7), если данные матриц r и t приведены ниже:

Матрица “r”

12	1	4	7
11	3	8	9
4	10	15	13
4	6	5	9

Матрица “t”

4	5	8	9
14	8	13	7
2	6	1	3
12	10	11	6