

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Лекция 8

Поиск решения задач,
формальные модели которых
сводятся к многокритериальным
задачам о назначениях
(СЛУЧАЙ ДВУХ КРИТЕРИЕВ)

Содержательная постановка многокритериальной задачи о назначениях

Заданы n работ и n рабочих, причем известна стоимость $r(i, j)$ и время $t(i, j)$ выполнения i -м рабочим j -й работы. Требуется распределить работы между рабочими т.о., чтобы:

1. Все работы были выполнены;
2. Все рабочие были заняты;
3. Суммарные задачи на выполнение всего цикла работ были минимальны.
4. Время выполнения всех работ было минимально.

Формальная постановка

задачи

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(i, j) y(i, j) \rightarrow \min; \text{ - минимизация затрат на}$$

выполнение плана;

$$T = \max_i \max_j t(i, j) y(i, j) \rightarrow \min; \text{ - минимизация времени}$$

выполнения работ;

$$\sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие выполнения всех работ;} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие загрузки всех рабочих;}$$

$$y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ - дискретность переменных}$$

Примечание: если i -й рабочий не может делать j -ю работу, то $r(i, j) = \infty$

Формальная постановка задачи поиска нижней границы минимизации затрат в системе (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\min} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(i, j) y(i, j) \rightarrow \min; \text{ - минимизация затрат;} \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие выполнения всех работ;} \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие загрузки всех рабочих;} \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ - дискретность переменных} \end{array} \right. \quad (2)$$

Формальная постановка задачи поиска верхней границы объема затрат на выполнение работ в системе (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\max} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(i, j) y(i, j) \rightarrow \max; \text{ - максимизация затрат;} \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие выполнения всех работ;} \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие загрузки всех рабочих;} \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ - дискретность переменных} \end{array} \right. \quad (3)$$

Формальная постановка задачи поиска нижней границы времени выполнения плана в системе (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\min} = \min_i \min_j t(i, j) y(i, j) - \text{минимизация времени выполнения плана;} \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; - \text{условие выполнения всех работ;} \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; - \text{условие загрузки всех рабочих;} \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n - \text{дискретность переменных} \end{array} \right. \quad (4)$$

Формальная постановка задачи поиска верхней границы времени выполнения плана в системе (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\max} = \max_i \max_j t(i, j) y(i, j) - \text{максимизация времени выполнения плана;} \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad - \text{условие выполнения всех работ;} \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad - \text{условие загрузки всех рабочих;} \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad - \text{дискретность переменных} \end{array} \right. \quad (5)$$

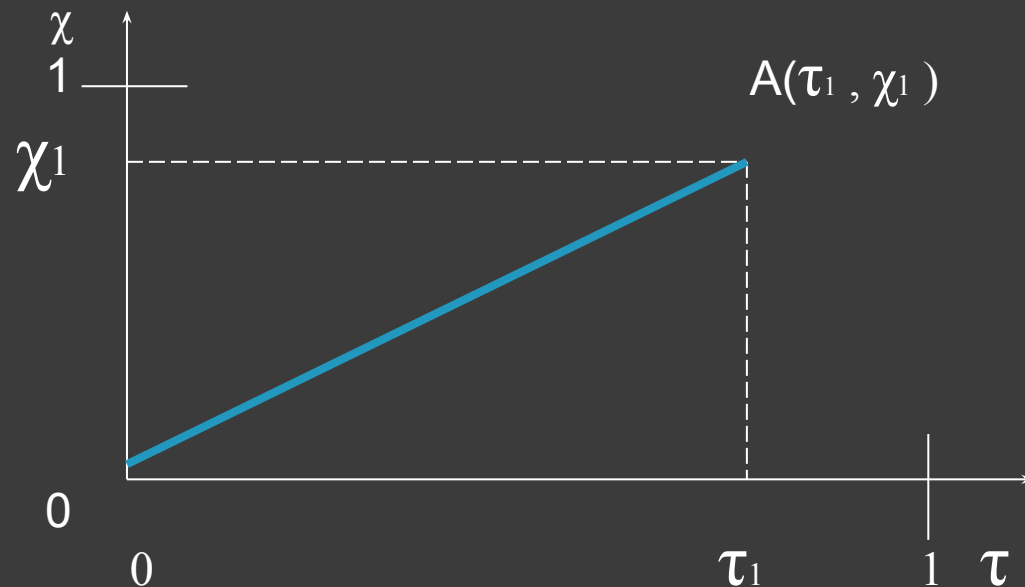
Формальная постановка задачи с нормированными целевыми функциями

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{S - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} \rightarrow \min; \\ \tau = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (6)$$

Примечание: если i -й рабочий не может делать j -ю работу, то $r(i, j) = \infty$

Графическая иллюстрация

- Любому допустимому вектору «У» системы (6) соответствует точка А в системе координат « χ , τ »:



$$L(0,A) = \chi_1^2 + \tau_1^2$$

Формальная постановка задачи с нормированными целевыми функциями

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \chi^2 + \tau^2 = \left(\frac{S - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} \right)^2 + \left(\frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \right)^2 \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (7)$$

Теоремы, облегчающие поиск решения системы (1):

- ◎ **Теорема 1:** Оптимальное решение системы (7) является одним из оптимальных по Парето решений системы (1).
- ◎ **Теорема 2:** Существует единственное значение, минимизирующее целевую функцию F системы (7).

Алгоритм поиска решения системы (7) (первые 6 шагов)

Шаг 1. $R = \infty$.

Шаг 2. Строится перестановка π компонент Матрицы исходных данных M такая, что для её k -й компоненты $t(i,j)$ и $(k+1)$ -й компоненты $t(p,q)$ справедливо: $t(i,j) \leq t(p,q)$.

Шаг 3. $k=1$.

Шаг 4. T присваивается значение, равное $t(i,j)$ на k -м месте в перестановке π .

Шаг 5. $\forall (i, j) \in U : t(i, j) > T \Rightarrow r(i, j) = \infty$.

Шаг 6. После этого матрица m , содержащая лишь $r(i,j)$, используется для решения «классической» задачи о назначениях.

Алгоритм поиска решения системы (7) (последние 5 шагов)

Шаг 6. Вычисляется значение целевой функции F системы (7).

Шаг 7. Если $F < R$, то перейти к шагу 8, в противном случае – к шагу 10

Шаг 8. $k = k + 1$.

Шаг 9. Перейти к шагу 4.

Шаг 10. Конец алгоритма. Величина R равна оптимальному значению целевой функции системы (7).

ПРИМЕР

Решить задачу (1) сведением ее к виду (7),
если данные матриц r и t приведены ниже:

Матрица “r”

| | | | |
|----|----|----|----|
| 2 | 11 | 7 | 4 |
| 12 | 8 | 3 | 9 |
| 14 | 10 | 5 | 13 |
| 4 | 6 | 15 | 1 |

Матрица “t”

| | | | |
|----|----|----|----|
| 14 | 5 | 9 | 12 |
| 4 | 8 | 13 | 7 |
| 2 | 6 | 11 | 3 |
| 12 | 10 | 1 | 15 |

РЕШЕНИЕ

⊙ Шаг 1. $R = \infty$.

⊙ Шаг 2. $\pi =$

Читать таблицу
слева направо
сверху вниз.



| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 4,3 | 3,1 | 3,4 | 2,1 |
| 1,2 | 3,2 | 2,4 | 2,2 |
| 1,3 | 4,2 | 3,3 | 1,4 |
| 4,1 | 2,3 | 1,1 | 4,4 |

⊙ Шаг 3. $S_{\max} = 53$; $S_{\min} = 0$; $T_{\max} = 15$; $T_{\min} = 0$.

⊙ Шаг 4. $T = 5$; $S = 51$; $F = 1,037$.

⊙ Шаг 5. $T = 6$; $S = 51$; $F = 1,236$.

⊙ Шаг 6. Конец алгоритма. $R = 1,037$.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Решить задачу (1) сведением ее к виду (7),
если данные матриц r и t приведены ниже:

Матрица “ r ”

| | | | |
|----|----|----|----|
| 12 | 1 | 4 | 7 |
| 11 | 3 | 8 | 9 |
| 4 | 10 | 15 | 13 |
| 4 | 6 | 5 | 9 |

Матрица “ t ”

| | | | |
|----|----|----|---|
| 4 | 5 | 8 | 9 |
| 14 | 8 | 13 | 7 |
| 2 | 6 | 1 | 3 |
| 12 | 10 | 11 | 6 |