

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В НОРМИРОВАНИИ ТРУДА

**Разработчик: к.т.н., доцент кафедры
экономики и управления на предприятии
транспорта Демидов Дмитрий
Валентинович (Уральский государственный
лесотехнический университет)**

Сущность метода наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов исходит из того, что **сумма квадратов отклонений** каждого из наблюдаемых значений от соответствующих значений, исчисленных по эмпирической формуле, при данных числовых значениях коэффициентов **должна быть наименьшей** по сравнению с любыми другими их значениями.

В качестве критерия оценки той или иной функции определяется **средняя абсолютная погрешность**

$$\Delta = \frac{\sum |\Delta_i|}{n} \rightarrow \min,$$

где n - количество элементов ряда; Δ_i - погрешность вычисления

$$\Delta_i = \bar{y}_i - y_i$$

Типовые графики и соответствующие им системы уравнений для нахождения параметров методом наименьших квадратов

№ п/п	Типовая формула и вид графика	Характеристика типовой формулы и соответствующего ей графика	Примеры зависимостей	Формулы для нахождения значений коэффициентов методом наименьших квадратов
1	$y = a x$ - график линейной функции	Исследуемые затраты прямо пропорциональны значениям фактора	Зависимость нормы времени самоходной машины от расстояния перевозки	<p style="text-align: center;">Уравнение</p> $a \sum x_i^2 = \sum x_i y_i;$ $a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$
2	$y = a x + b$ - график линейной функции	Одна часть исследуемых затрат прямо пропорциональна значениям фактора x , а другая часть от него не зависит		<p style="text-align: center;">Система уравнений</p> $\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + nb = \sum y_i \end{cases}$ $a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2};$ $b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$

№ п/п	Типовая формула и вид графика	Характеристика типовой формулы и соответствующего ей графика	Примеры зависимостей	Формулы для нахождения значений коэффициентов методом наименьших квадратов
3	$y = \frac{a}{x}$ - график гипербо- лической функции	Исследуемые затраты обратно пропорциональны значениям фактора x	Зависимость нормы времени от нормы выработки и наоборот	Уравнение $a \sum \frac{1}{x_i^2} = \sum \frac{y_i}{x_i};$ $a = \frac{\sum \frac{y_i}{x_i}}{\sum \frac{1}{x_i^2}}$
4	$y = \frac{a}{x} + b$ - график гипербо- лической функции	Одна часть исследуемых затрат обратно пропорциональна значениям фактора x , а другая от него не зависит	Зависимость выработки самоходной машины от расстояния перемещения	Система уравнений $\begin{cases} a \sum \frac{1}{x_i^2} + b \sum \frac{1}{x_i} = \sum \frac{y_i}{x_i} \\ a \sum \frac{1}{x_i} + bn = \sum y_i \end{cases}$ $a = \frac{n \sum \frac{y_i}{x_i} - \sum \frac{1}{x_i} \sum y_i}{n \sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i} \right)^2};$ $b = \frac{\sum \frac{1}{x_i^2} \sum y_i - \sum \frac{1}{x_i} \sum \frac{y_i}{x_i}}{n \sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i} \right)^2}$

№ п/п	Типовая формула и вид графика	Характеристика типовой формулы и соответствующего ей графика	Примеры зависимостей	Формулы для нахождения значений коэффициентов методом наименьших квадратов
5	$y = b x^a$ - график степенной функции	Одна часть исследуемых затрат с увеличением значения фактора x возрастает интенсивно, а другая часть от него не зависит	Зависимость выработки самоходной машины от расстояния перемещения	Система уравнений $\begin{cases} a \sum \lg^2 x_i + \lg b \sum \lg x_i = \sum \lg x_i \lg y_i \\ a \sum \lg x_i + n \lg b = \sum \lg y_i \end{cases}$
6	$y = b e^{ax}$ - график натуральной функции			Система уравнений $\begin{cases} a \sum x_i^2 + \ln b \sum x_i = \sum x_i \ln y_i \\ a \sum x_i + n \ln b = \sum \ln y_i \end{cases}$
7	$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ - график параболы		Зависимость выработки экскаватора от объема ковша	Система уравнений $\begin{cases} a_1 \sum x_i^4 + a_2 \sum x_i^3 + a_3 \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \\ a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i + a_3 n = \sum y_i \end{cases}$

Пример 1. Нахождение параметров методом наименьших квадратов (степенная функция)

В качестве исходных данных для исследования принимаем расчетные значения выработки y_i (м³ в смену) самоходных скреперов с объемом ковша 8 м³ в зависимости от расстояния перемещения грунта x_i (м).

Расчетная таблица для нахождения параметров степенной функции методом наименьших квадратов

i	x_i	y_i	$\lg x_i$	$\lg y_i$	$\lg^2 x_i$	$\lg x_i \lg y_i$	$\overline{y_i}$	$ x_i $
1	0,3	282	- 0,5229	2,4502	0,2734	- 1,2812	315,52	33,52
2	0,5	232	- 0,3010	2,3655	0,0906	- 0,7120	226,10	5,90
3	1,0	161	0	2,2068	0	0	143,85	17,15
4	2,0	99	0,3010	1,9956	0,0906	0,6007	91,52	7,48
5	3,0	72	0,4771	1,8573	0,2276	0,8861	70,25	1,75
6	4,0	56	0,6021	1,7482	0,3625	1,0526	58,23	2,23
7	5,0	46	0,6990	1,6628	0,4886	1,1623	50,34	4,34
Σ	15,8	948	1,2553	14,2864	1,5333	1,7085	955,81	72,37

Полученное уравнение функции имеет вид $y = 143,847 x^{-0,6524}$, а средняя абсолютная погрешность $\Delta = 10,34$.

Пример 2. Нахождение параметров методом наименьших квадратов в табличном процессоре Excel

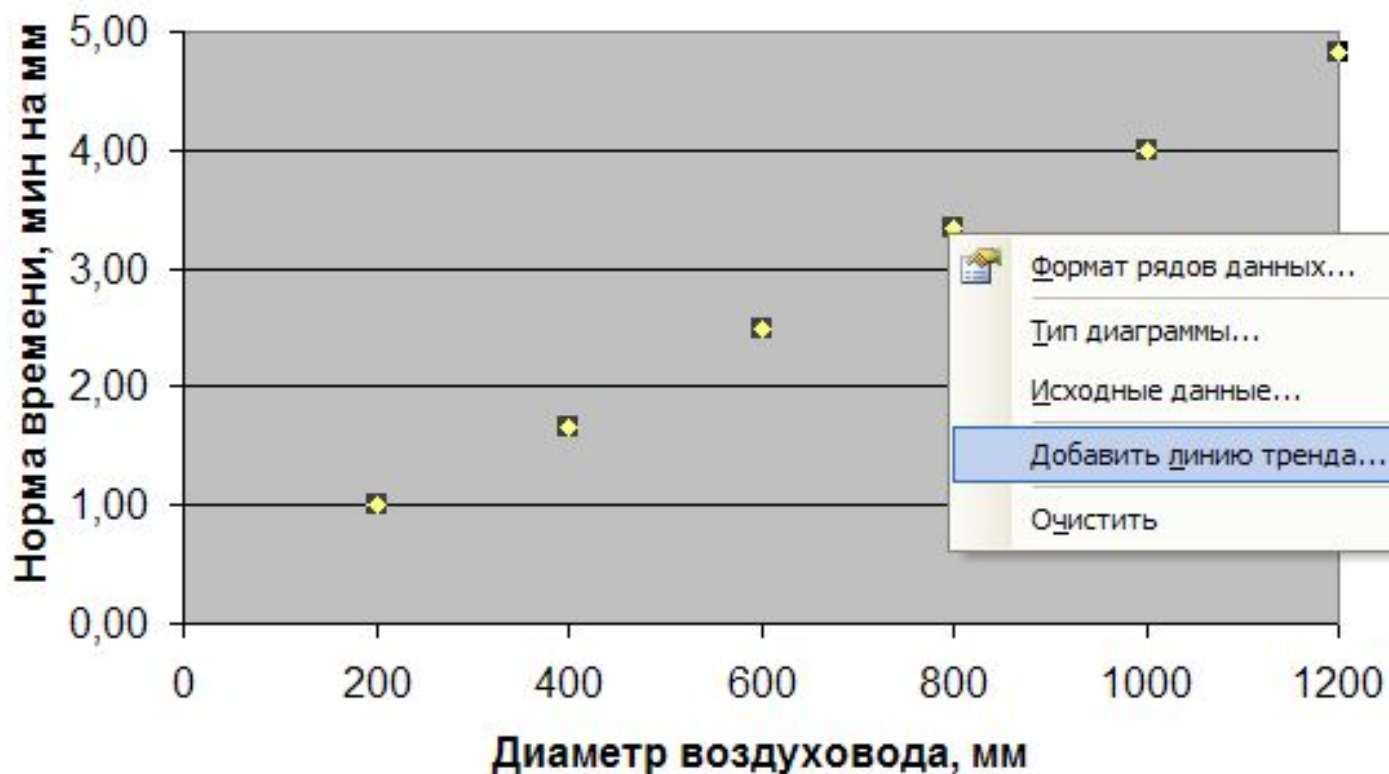


В качестве примера определяем норму времени y_i (мин) от диаметра x_i (мм) изготовления спирально-навивных воздуховодов на станке **Tube Forming Machine type 1602 (Швейцария)** при ширине штрипсы 137 мм и длине воздуховодов 3 м.

Зависимость нормы времени изготовления спирально-навивных воздуховодов от диаметра трубы						
х, мм	200	400	600	800	1000	1200
у, мин	1,00	1,67	2,50	3,33	4,00	4,83

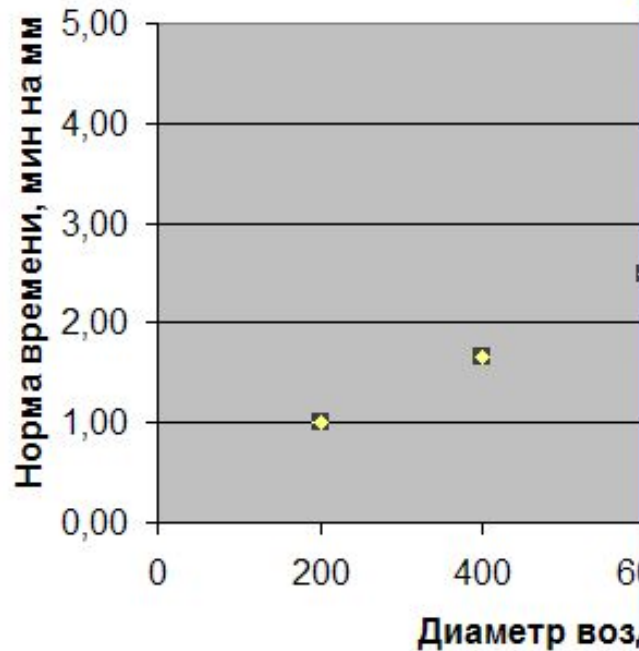
Добавление линии тренда

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздуховодов от диаметра трубы



Выбор линии тренда

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздуховодов от диаметра трубы



Линия тренда

Тип | Параметры

Построение линии тренда (аппроксимация и сглаживание)

- Линейная
- Логарифмическая
- Полиномиальная
- Степенная
- Экспоненциальная
- Линейная фильтрация

Степень: 2

Точки: 2

Построен на ряде:

Ряд 1

OK Отмена

Формат линии тренда

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздуховодов от диаметра трубы

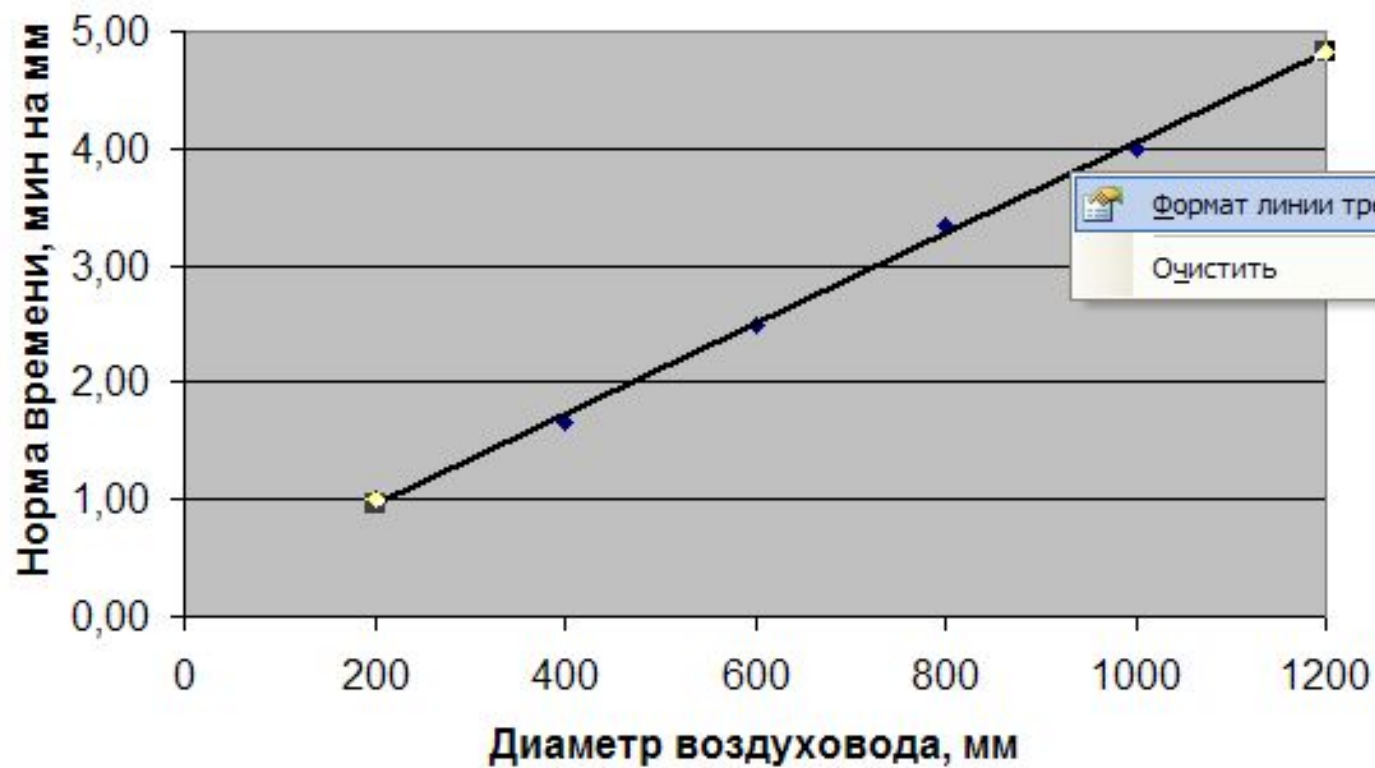
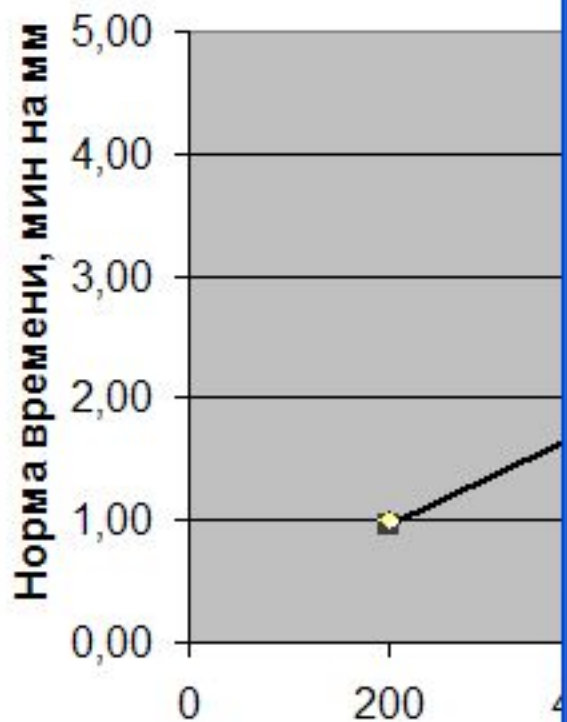


График зависимости
спирально-навив



Формат линии тренда

Вид | Тип | Параметры

Название аппроксимирующей (сглаженной) кривой

автоматическое: Линейный (Ряд 1)

другое:

Прогноз

вперед на: 0 единиц

назад на: 0 единиц

пересечение кривой с осью Y в точке: 0

показывать уравнение на диаграмме

поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)

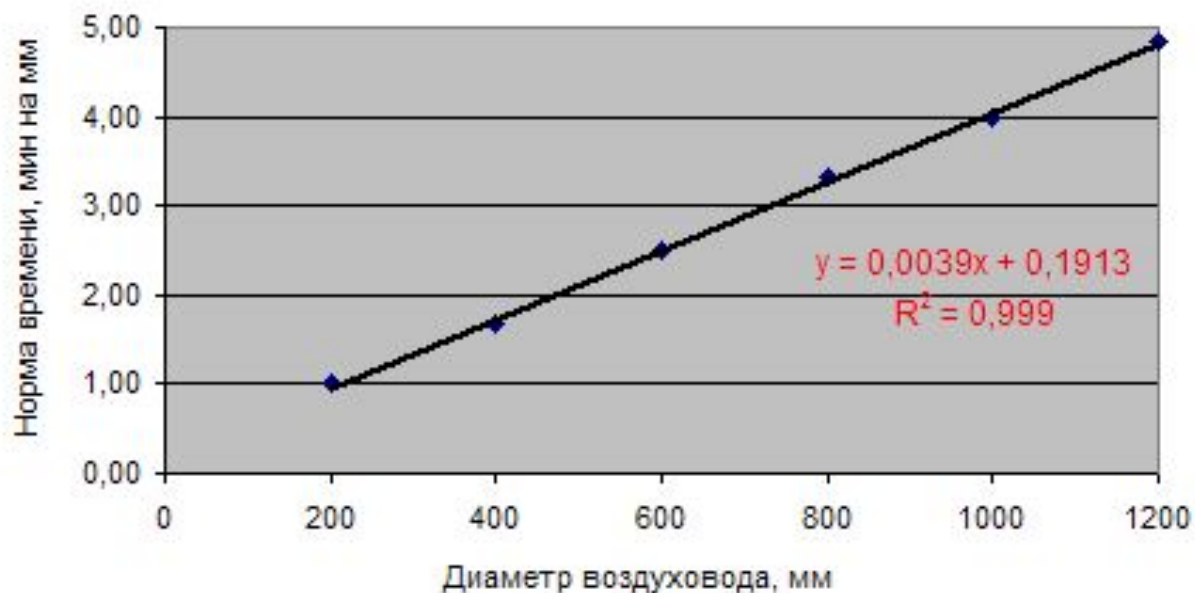
OK

Отмена

Окончательный вид графика и уравнения регрессии

Зависимость нормы времени изготовления спирально-навивных воздухопроводов от диаметра трубы						
x, мм	200	400	600	800	1000	1200
y, мин	1,00	1,67	2,50	3,33	4,00	4,83
y, мин	0,97	1,75	2,53	3,31	4,09	4,87

График зависимости нормы времени изготовления спирально-навивных воздухопроводов от диаметра трубы



Пример 3. Применение метода наименьших квадратов в табличном процессоре Excel при определении состава звена ведущих машин

Расчет 3. Определение потребности автомобилей-самосвалов при автомобильной возке грунта из сосредоточенного резерва

Для автомобильной возки грунта вводим условие для нахождения предельного количества автосамосвалов для одного работающего экскаватора, обозначая через L расстояние транспортирования грунта (концентрация не должна превышать 5 машин на км технологических путей)

$$N_s = \frac{H_{\text{экс}}^2}{H_{\text{авт}}^2} \leq 5L,$$

где $H_{\text{экс}}^a$ и $H_{\text{экс}}^3$ - нормы выработки соответственно экскаватора и автосамосвала в смену, куб.м.

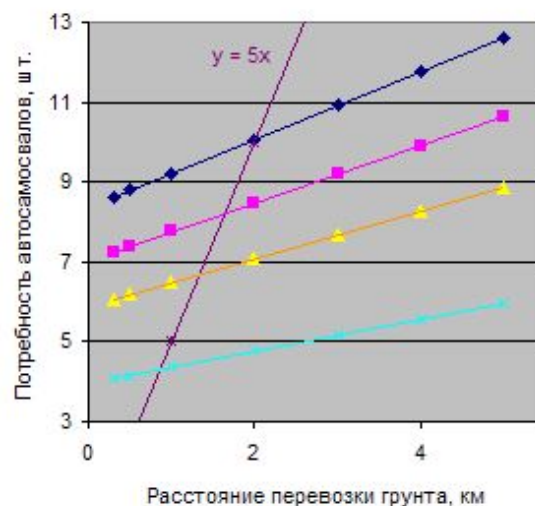
Предельное количество автосамосвалов на один экскаватор при расстоянии перевозки грунта L (км)

0,3	0,5	1	2	3	4	5
1,5	2,5	5	10	15	20	25

3.1. Определение количества автомобилей самосвалов

(грунт плотностью 1,6 т/куб.м, 1 категория трудности разработки)

Объем ковша, куб.м	Расчетное количество автосамосвалов на экскаватор в зависимости от расстояния перевозки грунта (км)						
	0,3	0,5	1	2	3	4	5
1,60	8,62	8,79	9,21	10,06	10,91	11,76	12,61
1,25	7,26	7,40	7,76	8,48	9,19	9,91	10,62
1,00	6,06	6,18	6,48	7,08	7,68	8,28	8,87
0,65	4,07	4,15	4,36	4,76	5,16	5,56	5,96



$$y = 0,85x + 8,364 \quad y = 0,5979x + 5,8835$$

$$y = 0,7159x + 7,0442 \quad y = 0,4018x + 3,9533$$

- ◆ Вместимость ковша 1,6 куб.м
- Вместимость ковша 1,25 куб.м
- ▲ Вместимость ковша 1,0 куб.м
- × Вместимость ковша 0,65 куб.м
- * Предельная концентрация машин по дальности перевозки грунта