Тема: Теоретические основы финансовых вычислений

"время – деньги"

ОБЩАЯ МЕТОДИКА ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Важность учета фактора времени обусловлена **принципом неравноценности денег, относящихся к различным моментам времени**: равные по абсолютной величине денежные суммы "сегодня" и "завтра" оцениваются по разному, – **сегодняшние деньги ценнее будущих**.

Зависимость ценности денег от времени обусловлена влиянием фактора времени:

- во-первых, деньги можно продуктивно использовать во времени как приносящий доход финансовый актив, т.е. деньги могут быть инвестированы и тем самым принести доход;
- во-вторых, инфляционные процессы ведут к обесцениванию денег во времени. Сегодня на рубль можно купить товара больше, чем завтра на этот же рубль, т.к. цены на товар повысятся;
- в-третьих, неопределенность будущего и связанный с этим риск повышает ценность имеющихся денег. Сегодня рубль в руке уже есть и его можно израсходовать на потребление, а будет ли он завтра в руке, – еще вопрос.

Финансовая математика – раздел количественного анализа финансовых операций, который решает следующие задачи:

- исчисление будущей суммы денежных средств, находящихся во вкладах, займах или ценных бумагах путем начисления процентов;
- учет векселей;
- определение параметров сделки исходя из заданных условий;
- определение эквивалентности параметров сделки;
- анализ последствий изменения условий финансовой операции;
- исчисление обобщающих показателей финансовых потоков;
- определение параметров финансовой ренты;
- разработка планов выполнения финансовых операций;
- расчет показателей доходности финансовых операций.

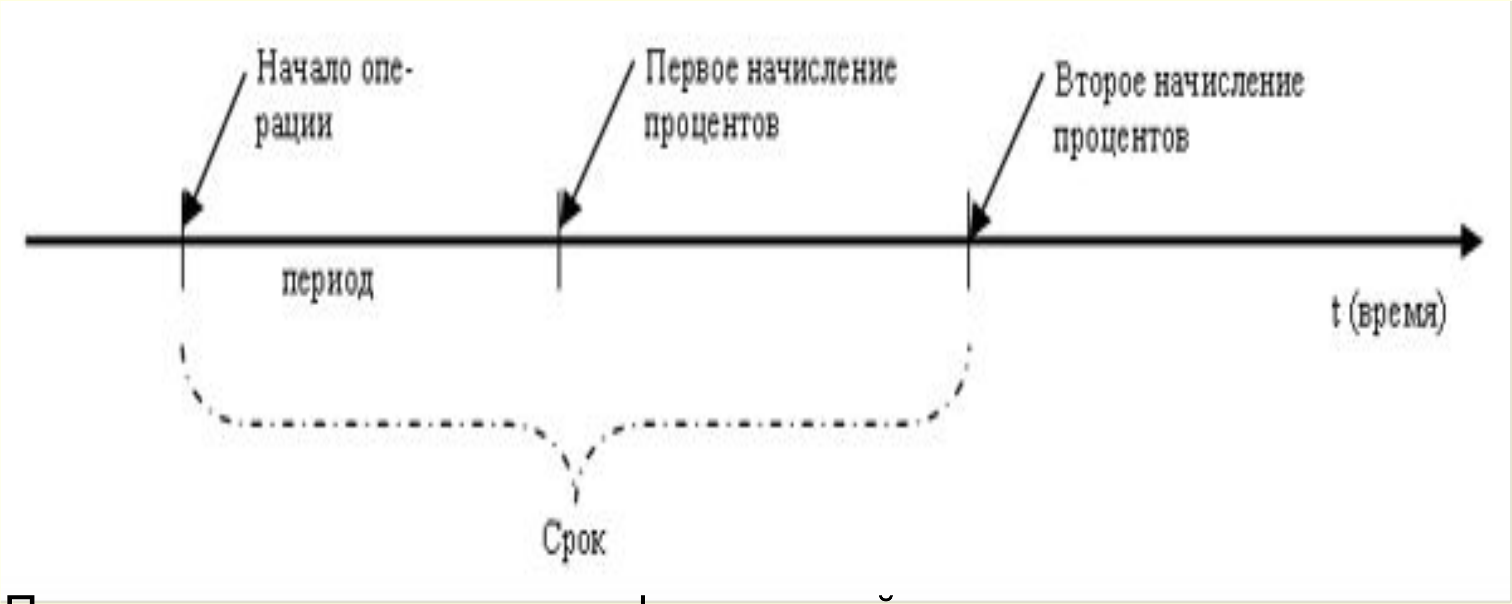
Процентная ставка

- **Относительный** показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов за единицу времени, – **процентная ставка**.
- **Методика расчета проста**: отношение суммы процентных денег, выплачивающихся за определенный период времени, к величине ссуды. Этот показатель выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Таким образом, процентная ставка показывает, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единицами первоначальной суммы долга.

Период начисления процентов

- "**период начисления**", – это отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами взимания процентов. Обычные или декурсивные (*postnumerando*) проценты начисляются в конце периода.
- **В качестве единицы периода времени** в финансовых расчетах принят год, однако это не исключает использования периода менее года: полугодие, квартал, месяц, день, час.

Период начисления процентов



Период времени от начала финансовой операции до ее окончании называется **сроком** финансовой операции.

Условные обозначения в финансовой математике

I – проценты за весь срок ссуды (*interest*);

PV – первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость (*present value*);

i – ставка процентов за период (*interest rate*);

FV – наращенная сумма или будущая стоимость (*future value*), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на нее процентами к концу срока ссуды;

n – срок ссуды в годах.

Коэффициент наращения

Увеличение суммы долга в связи с присоединением к ней процентных денег называется **наращением**, а **увеличенная сумма – наращенной суммой**.

Отсюда можно выделить еще один относительный показатель, который называется **коэффициент наращения** или **множитель наращения**, – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга.

Коэффициент наращения показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы долга, т.е. по существу является базисным темпом роста.

Виды процентных ставок

Простая процентная ставка применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока ссуды, т.е. исходная база (денежная сумма) всегда одна и та же.

Сложная процентная ставка применяется к наращенной сумме долга, т.е. к сумме, увеличенной на величину начисленных за предыдущий период процентов, – таким образом, исходная база постоянно увеличивается.

Фиксированная процентная ставка – ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах.

Постоянная процентная ставка – неизменная на протяжении всего периода ссуды.

Переменная процентная ставка – дискретно изменяющаяся во времени, но имеющая конкретную числовую характеристику.

Плавающая процентная ставка – привязанная к определенной величине, изменяющейся во времени, включая надбавку к ней (маржу), которая определяется целым рядом условий (сроком операции и т.п.).

Основа процентной ставки

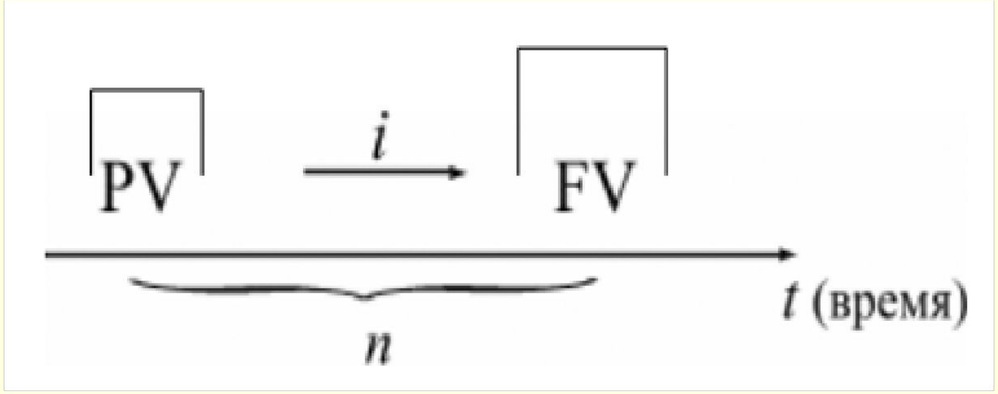
- Основу процентной ставки составляет **базовая ставка,** которая является начальной величиной.
- Примером базовой ставки для зарубежных финансовых рынков могут служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR – London Interbank Offered Rate) или ставка ЛИБИД (LIBID – London Interbank Bid Rate),
- для России это ставка МИБОР (MIBOR – Moscow Interbank Offered Rate) или ставка МИБИД (MIBID – Moscow Interbank Bid Rate), а также ставка МИАКР (MIACR – Moscow Interbank Actual Credit Rate).

Финансовая операция наращения

- *Экономический смысл операции* наращения состоит в определении величины той суммы, которой будет или желает располагать инвестор по окончании этой операции. Здесь идет движение денежного потока от настоящего к будущему.

Логика финансовой операции наращения

- Величина *FV* показывает будущую стоимость "сегодняшней" величины *PV* при заданном уровне интенсивности начисления процентов *i*.



Формула простого процента

Если учесть, что размер ожидаемого дохода зависит от трех факторов: от величины инвестированной суммы, от уровня процентной ставки и от срока финансовой операции, то наращенную сумму по схеме простых процентов можно будет определять следующим образом:

$FV = PV + I = PV + i \cdot PV \cdot n = PV\,(1 + i \cdot n) = PV \cdot k_н$,
где $k_н$ – коэффициент (множитель) наращения простых процентов.

Поскольку коэффициент наращения представляет собой значение функции от числа лет и уровня процентной ставки, то его значения легко табулируются.

Пример

- **Пример 1**. Сумма в размере 2'000 рублей дана в долг на 2 года по схеме простого процента под 10% годовых. Определить проценты и сумму, подлежащую возврату.

  Решение:
  Наращенная сумма:
  $FV = PV\ (1 + n \cdot i\ ) = 2'000\ (1 + 2 \cdot 0'1) = 2'400$ руб.
  или
  $FV = PV \cdot k_н = 2'000 \cdot 1{,}2 = 2'400$ руб.
  Сумма начисленных процентов:
  $I = PV \cdot n \cdot i = 2'000 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 400$ руб.
  или
  $I = FV - PV = 2'400 - 2'000 = 400$ руб.

- Таким образом, через два года необходимо вернуть общую сумму в размере 2'400 рублей, из которой 2'000 рублей составляет долг, а 400 рублей – "цена долга".

Особенности базы расчета

- **Временную базу** (*T*) можно представить по-разному:
  - условно состоящую из 360 дней. В этом случае речь идет об *обыкновенном* (*ordinary interest*), или *коммерческом проценте*;
  - взять действительное число дней в году (365 или 366 дней). В этом случае получают *точный процент* (*exact interest*).
- **Число дней ссуды** (*t*) также можно по-разному определять:
  - условно, исходя из того, что продолжительность любого целого месяца составляет 30 дней, а оставшиеся дни от месяца считают точно, – в результате получают так называемое *приближенное число дней ссуды*;
  - используя прямой счет или специальные таблицы порядковых номеров дней года, рассчитывают фактическое число дней между датами, – в этом случае получают *точное число дней ссуды*.

Если время финансовой операции выражено в днях

Расчет простых процентов может быть произведен одним из трех возможных способов:

- **Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды**, или, как часто называют, "германская практика расчета", когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а целого месяца – за 30 дней. Этот способ обычно используется в Германии, Дании, Швеции.
- **Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды**, или "французская практика расчета", когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а продолжительность ссуды рассчитывается точно по календарю. Этот способ имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии.
- **Точные проценты с точным числом дней ссуды**, или "английская практика расчета", когда продолжительность года и продолжительность ссуды берутся точно по календарю. Этот способ применяется в Португалии, Англии, США.

Примеры определения точного количество дней. Получается путем вычитания номера первого дня финансовой операции из номера последнего дня финансовой операции.

- **Пример 2.**
- Сумма 2 млн руб. положена в банк 18 февраля не високосного года и востребована 25 декабря того же года. Ставка банка составляет 35% годовых. Определить сумму начисленных процентов при различной практике их начисления.

Германская практика начисления простых процентов:

- Временная база принимается за 360 дней, $T = 360$.

  Количество дней ссуды:

  t = 11 (февраль) + 30 (март) + 30 (апрель) + 30 (май) + 30 (июнь) +

  + 30 (июль) + 30 (август) + 30 (сентябрь) + 30 (октябрь) +

  + 30 (ноябрь) + 25 (декабрь) - 1 = 305 дней

  Сумма начисленных процентов:

  $I = P \cdot t \,/\, T \cdot i$ = 2'000'000 • 305/360 • 0,35 = 593'055,55 руб.

Французская практика начисления процентов:

- Временная база принимается за 360 дней, $T = 360$.

  Количество дней ссуды:

  t = 11 (февраль) + 31 (март) + 30 (апрель) + 31 (май) + 30 (июнь) +

  + 31 (июль) + 31 (август) + 30 (сентябрь) + 31 (октябрь) +

  + 30 (ноябрь) + 25 (декабрь) - 1 = 310 дней

  Сумма начисленных процентов:

  $I = P \cdot t / T \cdot i$ = 2'000'000 • 310/360 • 0,35 = 602'777,78 руб.

Английская практика начисления процентов:

- Временная база принимается за 365 дней, $T = 365$.

  Количество дней ссуды берется точным, $t = 310$ дней.

  Сумма начисленных процентов:

  $I = P \cdot t \,/\, T \cdot i = 2'000'000 \cdot 310/365 \cdot 0{,}35 = 594'520{,}55$ руб.

Формула сложных процентов

Применение схемы сложных процентов целесообразно в тех случаях, когда:

- проценты не выплачиваются по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется **капитализацией** процентов;
- срок ссуды более года.

Методика определения формулы сложных процентов

Если процентные деньги не выплачиваются сразу по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга, то долг, таким образом, увеличивается на невыплаченную сумму процентов, и последующее начисление процентов происходит на увеличенную сумму долга:

$\boldsymbol{FV = PV + I = PV + PV \cdot i = PV \cdot (1 + i)}$ – за один период начисления;

$\boldsymbol{FV = (PV + I) \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i)^2}$ – за два периода начисления;

отсюда, за n периодов начисления формула примет вид:

$FV = PV \cdot (1 + i)^n = PV \cdot k_н$,

где FV – наращенная сумма долга;

PV – первоначальная сумма долга;

i – ставка процентов в периоде начисления;

n – количество периодов начисления;

$k_н$ – коэффициент (множитель) наращения сложных процентов.

Пример

- Сумма в размере 2'000 рублей дана в долг на 2 года по ставке процента равной 10% годовых. Определить проценты и сумму, подлежащую возврату.

  Решение:
  Наращенная сумма
  $FV = PV \cdot (1 + i)^n = 2'000 \cdot (1 + 0'1)^2 = 2'420$ рублей
  или
  $FV = PV \cdot k_н = 2'000 \cdot 1,21 = 2'420$ рублей,
  где $k_н = 1,21$ Сумма начисленных процентов

- $I = FV - PV = 2'420 - 2'000 = 420$ рублей.

  Таким образом, через два года необходимо вернуть общую сумму в размере 2'420 рублей, из которой 2'000 рублей составляет долг, а 420 рублей – "цена долга".

Эффективная ставка процентов

- Период начисления по сложным процентам не всегда равен году, однако в условиях финансовой операции указывается не ставка за период, а *годовая ставка с указанием периода начисления – номинальная ставка (j).*

  Номинальная ставка (*nominal rate*) – годовая ставка процентов, исходя из которой определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, при начислении сложных процентов несколько раз в год.

  Эта ставка
- во-первых, не отражает реальной эффективности сделки;
- во-вторых, не может быть использована для сопоставлений.

Учет в расчетах номинальной ставки

- Если начисление процентов будет производиться m раз в год, а срок долга – n лет, то общее количество периодов начисления за весь срок финансовой операции составит
  $\boldsymbol{N = n \cdot m}$
  Отсюда формулу сложных процентов можно записать в следующем виде:
  $\boldsymbol{FV = PV \cdot (1 + j / m)^N = P \cdot (1 + j / m)^{mn}}$,
  где j – номинальная годовая ставка процентов.

Пример

Изменим условия предыдущего примера, введя ежеквартальное начисление процентов.

Решение:
Количество периодов начисления:
$N = m \cdot n = 4 \cdot 2 = 8$
Наращенная сумма составит:
$FV = PV \cdot (1 + j / m)^{mn} = 2'000 \cdot (1 + 0{,}1 / 4)^8 = 2'436{,}81$ **руб.**
Сумма начисленных процентов:
$I = FV - PV = 2'436{,}81 - 2'000 = 436{,}81$ **руб.**

Таким образом, через два года на счете будет находиться сумма в размере 2'436,81 руб., из которой 2'000 руб. является первоначальной суммой, размещенной на счете, а 436,81 руб. – сумма начисленных процентов.

Эффективная ставка (*effective rate*)

- **Эффективная ставка** (*effective rate*), измеряет тот *реальный относительный доход*, который получен в целом за год, с учетом внутригодовой капитализации. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j / m:

- $(1 + i)^n = (1 + j / m)^{m \cdot n}$,
  следовательно,

  $i = (1 + j / m)^m - 1$.

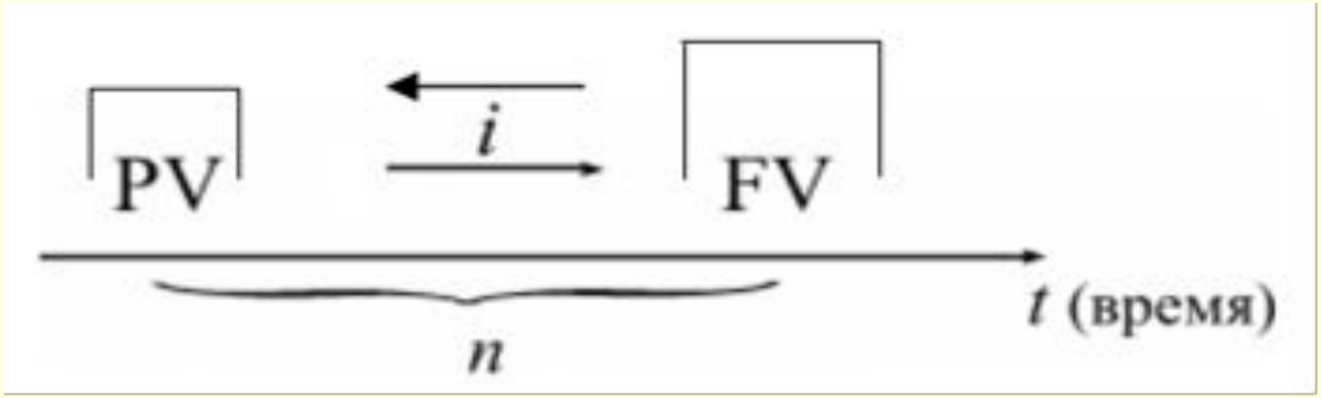
- Из формулы следует, что эффективная ставка зависит от количества внутригодовых начислений.

Сущность дисконтирования

- В финансовой практике часто приходится решать задачи, обратные определению наращенной суммы: по уже известной наращенной сумме (*FV*) следует определить неизвестную первоначальную сумму долга (*PV*).

  Такие ситуации возникают при разработке условий финансовой сделки, или когда проценты с наращенной суммы удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. Процесс начисления и удержания процентов вперед, до наступления срока погашения долга, называют **учетом**, а сами проценты в виде разности наращенной и первоначальной сумм долга **дисконтом** (*discount*):
  D = FV - PV

Логика финансовой операции дисконтировании



Термин **дисконтирование** в широком смысле означает определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину.

Сущность дисконтирования

Не редко такой расчет называют **приведением** стоимостного показателя к заданному моменту времени, а величину *PV* называют ***приведенной***(*современной или текущей) величиной FV*.

Таким образом, дисконтирование – приведение будущих денег к текущему моменту времени, и при этом не имеет значения, имела ли место в действительности данная финансовая операция или нет, а также независимо от того, можно ли считать дисконтируемую сумму буквально наращенной.

Именно дисконтирование позволяет учитывать в стоимостных расчетах фактор времени, поскольку дает сегодняшнюю оценку суммы, которая будет получена в будущем. Привести стоимость денег можно к любому моменту времени, а не обязательно к началу финансовой операции.

Методика дисконтирования

Исходя из методики начисления процентов, применяют два вида дисконтирования:

- **математическое дисконтирование** по процентной ставке;
- **банковский** учет по учетной ставке.

Дисконтирование – определение первоначальной суммы долга, которая при начислении процентов по заданной величине процентной ставки (i) позволит к концу срока получить указанную наращенную сумму.

Дисконтирование для простых процентов

- для простых процентов
  $\boldsymbol{PV = FV : (1 + n \cdot i) = FV \cdot 1 / (1 + n \cdot i) =}$
  $\boldsymbol{= FV \cdot (1 + n \cdot i)^{-1} = FV \cdot k_{\partial}},$
  где k_{∂} – дисконтный множитель (коэффициент приведения) для простых процентов.

Пример: Через 150 дней с момента подписания контракта необходимо уплатить 310 тыс. руб., исходя из 8% годовых и временной базы 360 дней. Определить первоначальную сумму долга.

Решение:
Поскольку срок ссуды менее года, то используем формулу простых процентов:
$PV = FV \cdot 1 / (1 + t / T \cdot i) = 310'000 \cdot 1 / (1 + 150 / 360 \cdot 0,08) = 300'000$ руб.

$PV = FV \cdot k_{\partial} = 310'000 \cdot 0,9677419 = 300'000$ руб.

Таким образом, первоначальная сумма долга составила 300 тыс. руб., а проценты за 150 дней – 10 тыс. руб.

Дисконтирование для сложных процентов

$\boldsymbol{PV = FV \cdot (1 + i)^{-n} = FV \cdot k_{\partial}}$,

где k_{∂} – дисконтный множитель для сложных процентов.

Если начисление процентов производится m раз в год, то формула примет вид:

$\boldsymbol{PV = FV \cdot (1 + j / m)^{-m \cdot n}}$.

Пример. Через два года фирме потребуется деньги в размере 30 млн руб., какую сумму необходимо сегодня поместить в банк, начисляющий 25% годовых, чтобы через 2 года получить требуемую сумму?

Решение:

Поскольку срок финансовой операции составляет более года, что используем формулу приведения для сложных процентов:

$PV = FV \cdot 1 / (1 + i)^{n} = 30'000'000 \cdot 1 / (1 + 0,25)^2 = 19'200'000$ руб.

или

$PV = FV \cdot k_{\partial} = 30'000'000 \cdot 0,6400000 = 19'200'000$ руб.

Таким образом, фирме следует разместить на счете 19'200'000 руб. под 25% годовых, чтобы через два года получить желаемые 30'000'000 руб.

Сущность потока платежей - аннуитета

- Поток платежей, все члены которого имеют одинаковое направление (знак), а временные интервалы между последовательными платежами постоянны, называется **финансовой рентой** или **аннуитетом**.

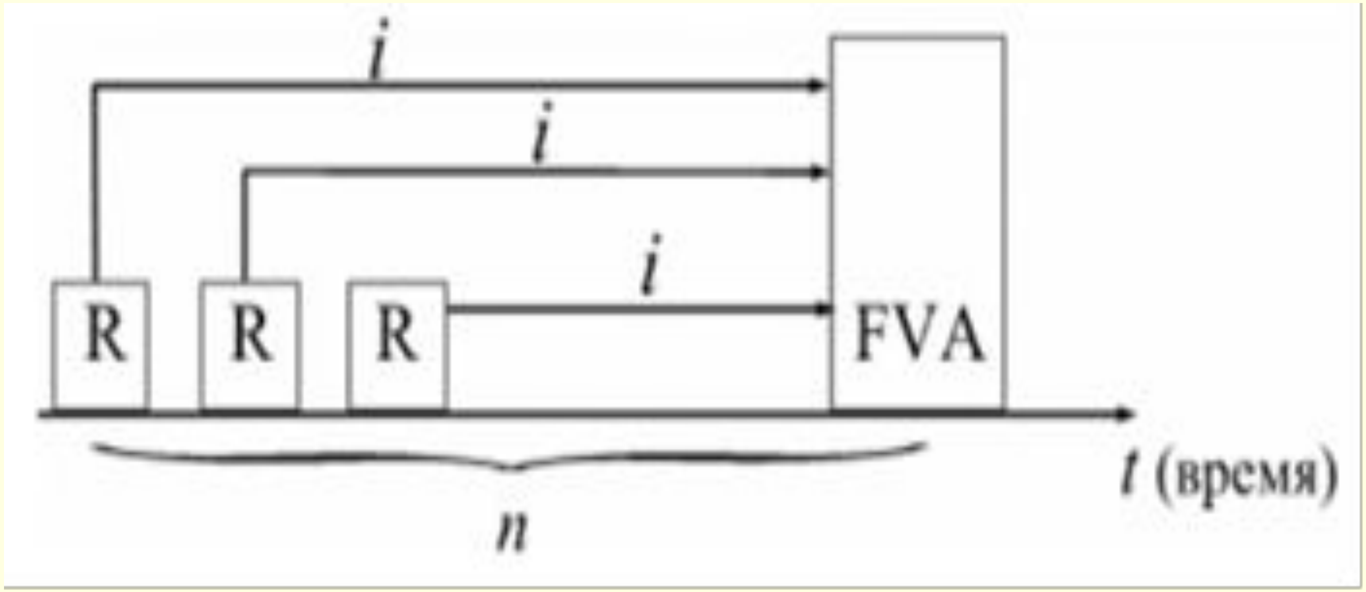
  При рассмотрении финансовой ренты используются основные категории:

- **член ренты** (*PMT*) – величина каждого отдельного платежа;
- **срок ренты** (*n*) – время от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода;
- **процентная ставка** (*i*) – ставка, используемая при наращении платежей, из которых состоит рента.

Наращенная величина аннуитета

- **Наращенная сумма** – сумма всех платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Это может быть обобщенная сумма задолженности, итоговый объем инвестиций и т.п.
- *Наращенные отдельные платежи представляют собой* члены геометрической прогрессии с первым членом равным R и множителем равным $(1+i)$.

Логика финансовой операции наращения финансовой ренты



Годовая постоянная обычная рента

$$FVA = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{n;i},$$

где *FVA* – наращенная сумма ренты;

R (PMT) – размер члена ренты, т.е. размер очередного платежа;

i – годовая процентная ставка, по которой на платежи начисляются сложные проценты;

n – срок ренты в годах,

$s_{n;i}$ – коэффициент наращения ренты

Пример

На счет в банке в течении пяти лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 500 руб., на которые будут начисляться проценты по ставке 30%. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Решение:

Период ренты равен одному году- это **годовая** рента;

Взносы будут в конце периода ренты, постнумерандо-это **обычная** рента;

Число членов ренты пять

Сумма всех взносов с начисленными процентами будет равна:

Можно определить наращенную сумму постоянной ренты, воспользовавшись финансовыми таблицами, содержащими коэффициенты наращения ренты:

$\boldsymbol{FVA = R \cdot s_{5\,;\,30} = 500 \cdot 9{,}0431 = 4'521{,}55}$ **руб.**

Сумма взносов в течение 5 лет составит:

$\boldsymbol{P = n \cdot R = 5 \cdot 500 = 2'500}$ **руб.**

Следовательно, сумма начисленных процентов будет равна:

$\boldsymbol{I = FVA - P = 4'521{,}55 - 2'500 = 2'021{,}55}$ **руб.**

Таким образом, доход владельца счета за 5 лет составит 2'021,55 руб.

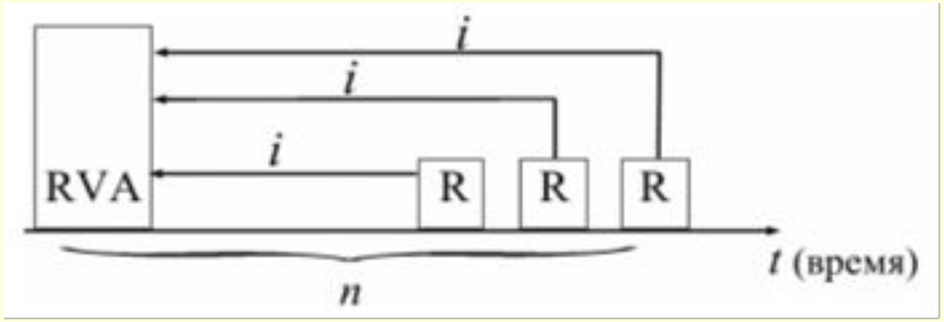
Современная (текущая) величина аннуитета

1. Современная (текущая) величина потока платежей (капитализированная или приведенная величина) – это сумма платежей, дисконтированных на момент начала ренты по ставке начисляемых сложных процентов.

2. Это важнейшая характеристика финансового анализа, т.к. является основой для измерения эффективности различных финансово-кредитных операций, сравнения условий контрактов и т.п.

3. Данная характеристика показывает, какую сумму следовало бы иметь первоначально, чтобы, разбив ее на равные взносы, на которые начислялись бы установленные проценты в течение всего срока, можно было бы получить указанную наращенную сумму.

Логика финансовой операции определения современной величины потока платежей



$$PVA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{n;i}\,.$$

Дробь в формуле – **коэффициент приведения ренты** ($a_{n;i}$), значения которого табулированы для широкого круга значений, поскольку зависят от ставки процентов (i) и от числа лет (n)

Пример

- Определить по данным примера современную величину ренты.

  Решение:
  Современная величина ренты составит:

$$PVA = 500 \cdot \frac{1-(1+0,3)^{-5}}{0,3} = 1'217,78 \text{ руб.}$$

Таким образом, все производимые в будущем платежи оцениваются в настоящий момент в размере 1'217,78 руб.

Определение параметров аннуитета

- Последовательные платежи в виде постоянной обычной годовой ренты определяются основными параметрами:

  R (PMT)– размер платежа;

  n – срок ренты в годах;

  i – годовая ставка процентов.

- При разработке условий финансовой операции могут возникать ситуации, когда заданной величиной является одна из двух обобщающих характеристик и неполный набор параметров ренты. В таких случаях находят **недостающий параметр.**

При определении **члена ренты** возможны два варианта

- 1 вариант - *наращенная сумма*. Если сумма долга определена на какой-либо момент в будущем (*FVA*), тогда величину последующих взносов в течение *n* лет при начислении на них процентов по ставке i можно определить по формуле:

$$R = \frac{FVA \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{FVA}{s_{n;i}},$$

Пример

- Для покупки автомобиля через 5 лет потребуется 50 тыс. руб. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года в банк, который начисляет проценты по ставке 40%.

  Решение:
  В данном случае известна наращенная величина постоянной финансовой ренты, поэтому размер ежегодных взносов будет равен:

$$R = \frac{50'000 \cdot 0,4}{(1+0,4)^5 - 1} = 4'568 \text{ руб.}$$

- Таким образом, чтобы накопить на счете необходимую сумму для покупки автомобиля следует в конце каждого года в течении пяти лет откладывать 4'568 руб.

При определении **члена ренты** возможны два варианта

- 2 вариант - *современная величина финансовой ренты*, тогда, исходя из ставки процента и срока ренты, разовый платеж находится по формуле:

$$R = \frac{PVA \cdot i}{1-(1+i)^{n}} = \frac{PVA}{a_{n;i}}.$$

Пример

- Сумма 10 тыс. рублей предоставлена в долг на 5 лет под 8% годовых. Определить ежегодную сумму погашения долга.
  Решение:
  Известна современная величина долга, отсюда:

$$R = \frac{10'000 \cdot 0{,}08}{1-(1+0{,}08)^{-5}} = 2'504{,}56 \text{ руб.}$$

- Таким образом, ежегодно необходимо будет возвращать сумму 2'504,56 руб.