

Тема: Теоретические основы финансовых вычислений



"время – деньги"

ОБЩАЯ МЕТОДИКА ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Важность учета фактора времени обусловлена **принципом неравноценности денег, относящихся к различным моментам времени**: равные по абсолютной величине денежные суммы "сегодня" и "завтра" оцениваются по разному, – **сегодняшние деньги ценнее будущих.**

Зависимость ценности денег от времени обусловлена влиянием фактора времени:

- во-первых, деньги можно продуктивно использовать во времени как приносящий доход финансовый актив, т.е. деньги могут быть инвестированы и тем самым принести доход;
- во-вторых, инфляционные процессы ведут к обесцениванию денег во времени. Сегодня на рубль можно купить товара больше, чем завтра на этот же рубль, т.к. цены на товар повысятся;
- в-третьих, неопределенность будущего и связанный с этим риск повышает ценность имеющихся денег. Сегодня рубль в руке уже есть и его можно израсходовать на потребление, а будет ли он завтра в руке, – еще вопрос.

Финансовая математика – раздел количественного анализа финансовых операций, который решает следующие задачи:

- исчисление будущей суммы денежных средств, находящихся во вкладах, займах или ценных бумагах путем начисления процентов;
- учет векселей;
- определение параметров сделки исходя из заданных условий;
- определение эквивалентности параметров сделки;
- анализ последствий изменения условий финансовой операции;
- исчисление обобщающих показателей финансовых потоков;
- определение параметров финансовой ренты;
- разработка планов выполнения финансовых операций;
- расчет показателей доходности финансовых операций.

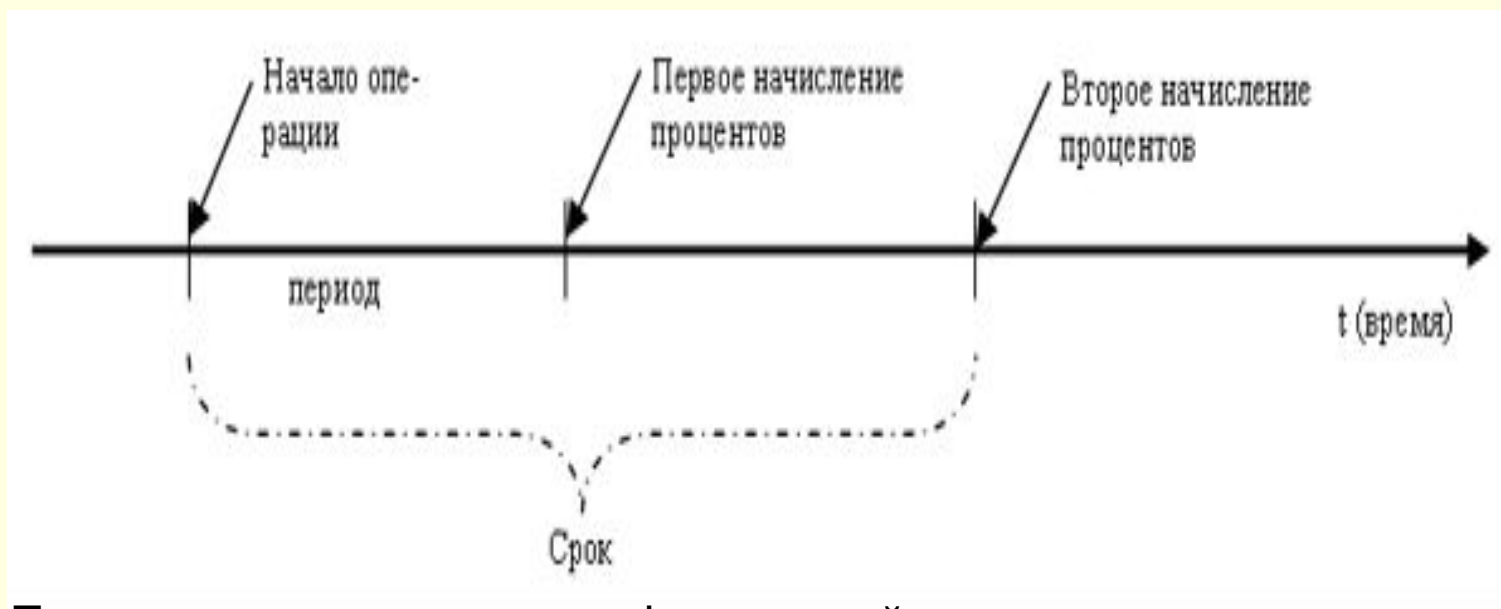
Процентная ставка

- **Относительный** показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов за единицу времени, – **процентная ставка**.
- **Методика расчета проста**: отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за определенный период времени, к величине ссуды. Этот показатель выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Таким образом, процентная ставка показывает, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единицами первоначальной суммы долга.

Период начисления процентов

- **"период начисления"**, – это отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами взимания процентов. Обычные или декурсивные (*postnumerando*) проценты начисляются в конце периода.
- **В качестве единицы периода времени** в финансовых расчетах принят год, однако это не исключает использования периода менее года: полугодие, квартал, месяц, день, час.

Период начисления процентов



Период времени от начала финансовой операции до ее окончания называется **сроком** финансовой операции.

Условные обозначения в финансовой математике

I – проценты за весь срок ссуды (*interest*);

PV – первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость (*present value*);

i – ставка процентов за период (*interest rate*);

FV – наращенная сумма или будущая стоимость (*future value*), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на нее процентами к концу срока ссуды;

n – срок ссуды в годах.

Коэффициент наращенния

Увеличение суммы долга в связи с присоединением к ней процентных денег называется **наращением**, а **увеличенная сумма – наращенной суммой**.

Отсюда можно выделить еще один относительный показатель, который называется **коэффициент наращенния** или **множитель наращенния**, – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга.

Коэффициент наращенния показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы долга, т.е. по существу является базисным темпом роста.

Виды процентных ставок

Простая процентная ставка применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока ссуды, т.е. исходная база (денежная сумма) всегда одна и та же.

Сложная процентная ставка применяется к наращенной сумме долга, т.е. к сумме, увеличенной на величину начисленных за предыдущий период процентов, – таким образом, исходная база постоянно увеличивается.

Фиксированная процентная ставка – ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах.

Постоянная процентная ставка – неизменная на протяжении всего периода ссуды.

Переменная процентная ставка – дискретно изменяющаяся во времени, но имеющая конкретную числовую характеристику.

Плавающая процентная ставка – привязанная к определенной величине, изменяющейся во времени, включая надбавку к ней (маржу), которая определяется целым рядом условий (сроком операции и т.п.).

Основа процентной ставки

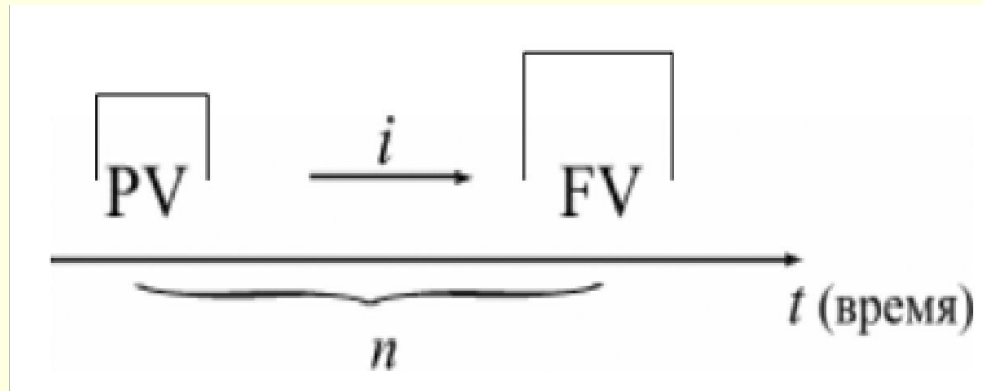
- Основу процентной ставки составляет **базовая ставка**, которая является начальной величиной.
- Примером базовой ставки для зарубежных финансовых рынков могут служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR – London Interbank Offered Rate) или ставка ЛИБИД (LIBID – London Interbank Bid Rate),
- для России это ставка МИБОР (MIBOR – Moscow Interbank Offered Rate) или ставка МИБИД (MIBID – Moscow Interbank Bid Rate), а также ставка МИАКР (MIACR – Moscow Interbank Actual Credit Rate).

Финансовая операция наращенния

- *Экономический смысл операции* наращенния состоит в определении величины той суммы, которой будет или желает располагать инвестор по окончании этой операции. Здесь идет движение денежного потока от настоящего к будущему.

Логика финансовой операции наращенния

- Величина FV показывает будущую стоимость "сегодняшней" величины PV при заданном уровне интенсивности начисления процентов i .



Формула простого процента

Если учесть, что размер ожидаемого дохода зависит от трех факторов: от величины инвестированной суммы, от уровня процентной ставки и от срока финансовой операции, то наращенную сумму по схеме простых процентов можно будет определять следующим образом:

$$FV = PV + I = PV + i \cdot PV \cdot n = PV (1 + i \cdot n) = PV \cdot k_n,$$

где k_n – коэффициент (множитель) наращенной суммы простых процентов.

Поскольку коэффициент наращенной суммы представляет собой значение функции от числа лет и уровня процентной ставки, то его значения легко табулируются.

Пример

- **Пример 1.** Сумма в размере 2'000 рублей дана в долг на 2 года по схеме простого процента под 10% годовых. Определить проценты и сумму, подлежащую возврату.

Решение:

Наращенная сумма:

$$FV = PV(1 + n \cdot i) = 2'000(1 + 2 \cdot 0'1) = 2'400 \text{ руб.}$$

или

$$FV = PV \cdot k_n = 2'000 \cdot 1,2 = 2'400 \text{ руб.}$$

Сумма начисленных процентов:

$$I = PV \cdot n \cdot i = 2'000 \cdot 2 \cdot 0,1 = 400 \text{ руб.}$$

или

$$I = FV - PV = 2'400 - 2'000 = 400 \text{ руб.}$$

- Таким образом, через два года необходимо вернуть общую сумму в размере 2'400 рублей, из которой 2'000 рублей составляет долг, а 400 рублей – "цена долга".

Особенности базы расчета

- **Временную базу (T)** можно представить по-разному:
 - условно состоящую из 360 дней. В этом случае речь идет об *обыкновенном (ordinary interest)*, или *коммерческом проценте*;
 - взять действительное число дней в году (365 или 366 дней). В этом случае получают *точный процент (exact interest)*.
- **Число дней ссуды (t)** также можно по-разному определять:
 - условно, исходя из того, что продолжительность любого целого месяца составляет 30 дней, а оставшиеся дни от месяца считают точно, – в результате получают так называемое *приближенное число дней ссуды*;
 - используя прямой счет или специальные таблицы порядковых номеров дней года, рассчитывают фактическое число дней между датами, – в этом случае получают *точное число дней ссуды*.

Если время финансовой операции выражено в днях

Расчет простых процентов может быть произведен одним из трех возможных способов:

- **Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды**, или, как часто называют, "германская практика расчета", когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а целого месяца – за 30 дней. Этот способ обычно используется в Германии, Дании, Швеции.
- **Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды**, или "французская практика расчета", когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а продолжительность ссуды рассчитывается точно по календарю. Этот способ имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии.
- **Точные проценты с точным числом дней ссуды**, или "английская практика расчета", когда продолжительность года и продолжительность ссуды берутся точно по календарю. Этот способ применяется в Португалии, Англии, США.

Примеры определения точного количество дней.
Получается путем вычитания номера первого дня финансовой операции из номера последнего дня финансовой операции.

- **Пример 2.**
- Сумма 2 млн руб. положена в банк 18 февраля не високосного года и востребована 25 декабря того же года. Ставка банка составляет 35% годовых. Определить сумму начисленных процентов при различной практике их начисления.

Германская практика начисления простых процентов:

- Временная база принимается за 360 дней, $T = 360$.

Количество дней ссуды:

$$\begin{aligned} t = & 11 \text{ (февраль)} + 30 \text{ (март)} + 30 \text{ (апрель)} + 30 \text{ (май)} + 30 \text{ (июнь)} + \\ & + 30 \text{ (июль)} + 30 \text{ (август)} + 30 \text{ (сентябрь)} + 30 \text{ (октябрь)} + \\ & + 30 \text{ (ноябрь)} + 25 \text{ (декабрь)} - 1 = 305 \text{ дней} \end{aligned}$$

Сумма начисленных процентов:

$$I = P \cdot t / T \cdot i = 2'000'000 \cdot 305/360 \cdot 0,35 = 593'055,55 \text{ руб.}$$

Французская практика начисления процентов:

- Временная база принимается за 360 дней, $T = 360$.

Количество дней ссуды:

$$\begin{aligned} t = & 11 \text{ (февраль)} + 31 \text{ (март)} + 30 \text{ (апрель)} + 31 \text{ (май)} + 30 \text{ (июнь)} + \\ & + 31 \text{ (июль)} + 31 \text{ (август)} + 30 \text{ (сентябрь)} + 31 \text{ (октябрь)} + \\ & + 30 \text{ (ноябрь)} + 25 \text{ (декабрь)} - 1 = 310 \text{ дней} \end{aligned}$$

Сумма начисленных процентов:

$$I = P \cdot t / T \cdot i = 2'000'000 \cdot 310/360 \cdot 0,35 = 602'777,78 \text{ руб.}$$

Английская практика начисления процентов:

- Временная база принимается за 365 дней, $T = 365$.

Количество дней ссуды берется точным, $t = 310$ дней.

Сумма начисленных процентов:

$$I = P \cdot t / T \cdot i = 2'000'000 \cdot 310/365 \cdot 0,35 = 594'520,55 \text{ руб.}$$

Формула сложных процентов

Применение схемы сложных процентов целесообразно в тех случаях, когда:

- проценты не выплачиваются по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется **капитализацией** процентов;
- срок ссуды более года.

Методика определения формулы сложных процентов

Если процентные деньги не выплачиваются сразу по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга, то долг, таким образом, увеличивается на невыплаченную сумму процентов, и последующее начисление процентов происходит на увеличенную сумму долга:

$FV = PV + I = PV + PV \cdot i = PV \cdot (1 + i)$ – за один период начисления;

$FV = (PV + I) \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i)^2$ – за два периода начисления;

отсюда, за n периодов начисления формула примет вид:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n = PV \cdot k_n,$$

где FV – наращенная сумма долга;

PV – первоначальная сумма долга;

i – ставка процентов в периоде начисления;

n – количество периодов начисления;

k_n – коэффициент (множитель) наращенной суммы сложных процентов.

Пример

- Сумма в размере 2'000 рублей дана в долг на 2 года по ставке процента равной 10% годовых. Определить проценты и сумму, подлежащую возврату.

Решение:

Наращенная сумма

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n = 2'000 \cdot (1 + 0'1)^2 = 2'420 \text{ рублей}$$

или

$$FV = PV \cdot k_n = 2'000 \cdot 1,21 = 2'420 \text{ рублей,}$$

где $k_n = 1,21$ Сумма начисленных процентов

- $I = FV - PV = 2'420 - 2'000 = 420$ рублей.

Таким образом, через два года необходимо вернуть общую сумму в размере 2'420 рублей, из которой 2'000 рублей составляет долг, а 420 рублей – "цена долга".

Эффективная ставка процентов

- Период начисления по сложным процентам не всегда равен году, однако в условиях финансовой операции указывается не ставка за период, а *годовая ставка с указанием периода начисления* – *номинальная ставка* (j).

Номинальная ставка (*nominal rate*) – годовая ставка процентов, исходя из которой определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, при начислении сложных процентов несколько раз в год.

Эта ставка

- во-первых, не отражает реальной эффективности сделки;
- во-вторых, не может быть использована для сопоставлений.

Учет в расчетах номинальной ставки

- Если начисление процентов будет производиться m раз в год, а срок долга – n лет, то общее количество периодов начисления за весь срок финансовой операции составит

$$N = n \cdot m$$

Отсюда формулу сложных процентов можно записать в следующем виде:

$$FV = PV \cdot (1 + j / m)^N = P \cdot (1 + j / m)^{mn} ,$$

где j – номинальная годовая ставка процентов.

Пример

Изменим условия предыдущего примера, введя ежеквартальное начисление процентов.

Решение:

Количество периодов начисления:

$$N = m \cdot n = 4 \cdot 2 = 8$$

Наращенная сумма составит:

$$FV = PV \cdot (1 + j / m)^{mn} = 2'000 \cdot (1 + 0,1 / 4)^8 = 2'436,81 \text{ руб.}$$

Сумма начисленных процентов:

$$I = FV - PV = 2'436,81 - 2'000 = 436,81 \text{ руб.}$$

Таким образом, через два года на счете будет находиться сумма в размере 2'436,81 руб., из которой 2'000 руб. является первоначальной суммой, размещенной на счете, а 436,81 руб. – сумма начисленных процентов.

Эффективная ставка (*effective rate*)

- **Эффективная ставка** (*effective rate*), измеряет тот *реальный относительный доход*, который получен в целом за год, с учетом внутригодовой капитализации. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке j / m :

- $(1 + i)^n = (1 + j / m)^{m \cdot n}$,
следовательно,

$$i = (1 + j / m)^m - 1.$$

- Из формулы следует, что эффективная ставка зависит от количества внутригодовых начислений.

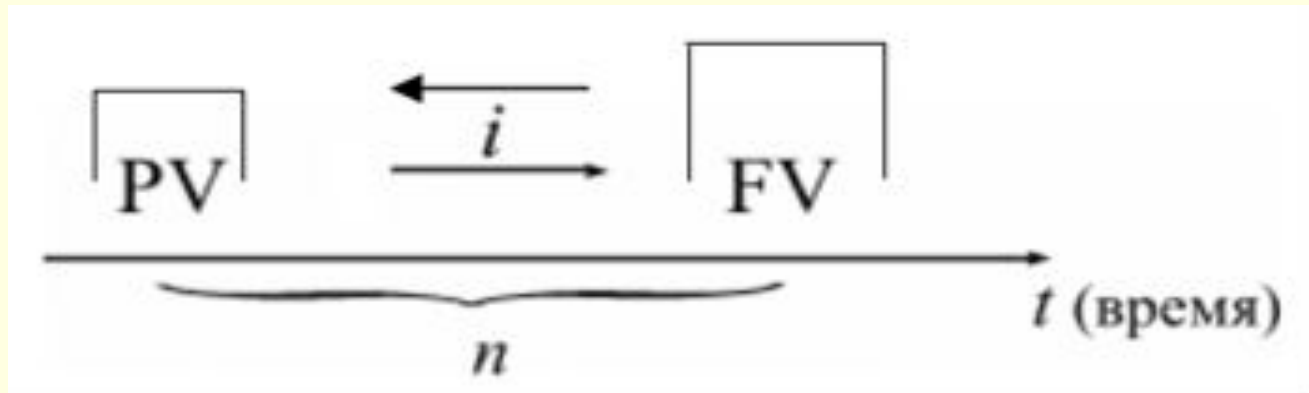
Сущность дисконтирования

- В финансовой практике часто приходится решать задачи, обратные определению наращенной суммы: по уже известной наращенной сумме (FV) следует определить неизвестную первоначальную сумму долга (PV).

Такие ситуации возникают при разработке условий финансовой сделки, или когда проценты с наращенной суммы удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. Процесс начисления и удержания процентов вперед, до наступления срока погашения долга, называют **учетом**, а сами проценты в виде разности наращенной и первоначальной сумм долга **дисконтом** (*discount*):

$$D = FV - PV$$

Логика финансовой операции дисконтирования



Термин **дисконтирование** в широком смысле означает определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину.

Сущность дисконтирования

Не редко такой расчет называют **приведением** стоимостного показателя к заданному моменту времени, а величину PV называют **приведенной** (современной или текущей) величиной FV .

Таким образом, дисконтирование – приведение будущих денег к текущему моменту времени, и при этом не имеет значения, имела ли место в действительности данная финансовая операция или нет, а также независимо от того, можно ли считать дисконтируемую сумму буквально наращенной.

Именно дисконтирование позволяет учитывать в стоимостных расчетах фактор времени, поскольку дает сегодняшнюю оценку суммы, которая будет получена в будущем. Привести стоимость денег можно к любому моменту времени, а не обязательно к началу финансовой операции.

Методика дисконтирования

Исходя из методики начисления процентов, применяют два вида дисконтирования:

- **математическое дисконтирование** по процентной ставке;
- **банковский учет** по учетной ставке.

Дисконтирование – определение первоначальной суммы долга, которая при начислении процентов по заданной величине процентной ставки (i) позволит к концу срока получить указанную наращенную сумму.

Дисконтирование для простых процентов

- для простых процентов

$$PV = FV : (1 + n \cdot i) = FV \cdot 1 / (1 + n \cdot i) = \\ = FV \cdot (1 + n \cdot i)^{-1} = FV \cdot k_{\partial},$$

где k_{∂} – дисконтный множитель (коэффициент приведения) для простых процентов.

Пример: Через 150 дней с момента подписания контракта необходимо уплатить 310 тыс. руб., исходя из 8% годовых и временной базы 360 дней. Определить первоначальную сумму долга.

Решение:

Поскольку срок ссуды менее года, то используем формулу простых процентов:

$$PV = FV \cdot 1 / (1 + t / T \cdot i) = 310'000 \cdot 1 / (1 + 150 / 360 \cdot 0,08) = 300'000 \text{ руб.}$$

$$PV = FV \cdot k_{\partial} = 310'000 \cdot 0,9677419 = 300'000 \text{ руб.}$$

Таким образом, первоначальная сумма долга составила 300 тыс. руб., а проценты за 150 дней – 10 тыс. руб.

Дисконтирование для сложных процентов

$$PV = FV \cdot (1 + i)^{-n} = FV \cdot k_{\partial},$$

где k_{∂} – дисконтный множитель для сложных процентов.

Если начисление процентов производится m раз в год, то формула примет вид:

$$PV = FV \cdot (1 + j / m)^{-m \cdot n}.$$

Пример. Через два года фирме потребуется деньги в размере 30 млн руб., какую сумму необходимо сегодня поместить в банк, начисляющий 25% годовых, чтобы через 2 года получить требуемую сумму?

Решение:

Поскольку срок финансовой операции составляет более года, что используем формулу приведения для сложных процентов:

$$PV = FV \cdot 1 / (1 + i)^n = 30'000'000 \cdot 1 / (1 + 0,25)^2 = 19'200'000 \text{ руб.}$$

или

$$PV = FV \cdot k_{\partial} = 30'000'000 \cdot 0,6400000 = 19'200'000 \text{ руб.}$$

Таким образом, фирме следует разместить на счете 19'200'000 руб. под 25% годовых, чтобы через два года получить желаемые 30'000'000 руб.

Сущность потока платежей - аннуитета

- Поток платежей, все члены которого имеют одинаковое направление (знак), а временные интервалы между последовательными платежами постоянны, называется **финансовой рентой** или **аннуитетом**.

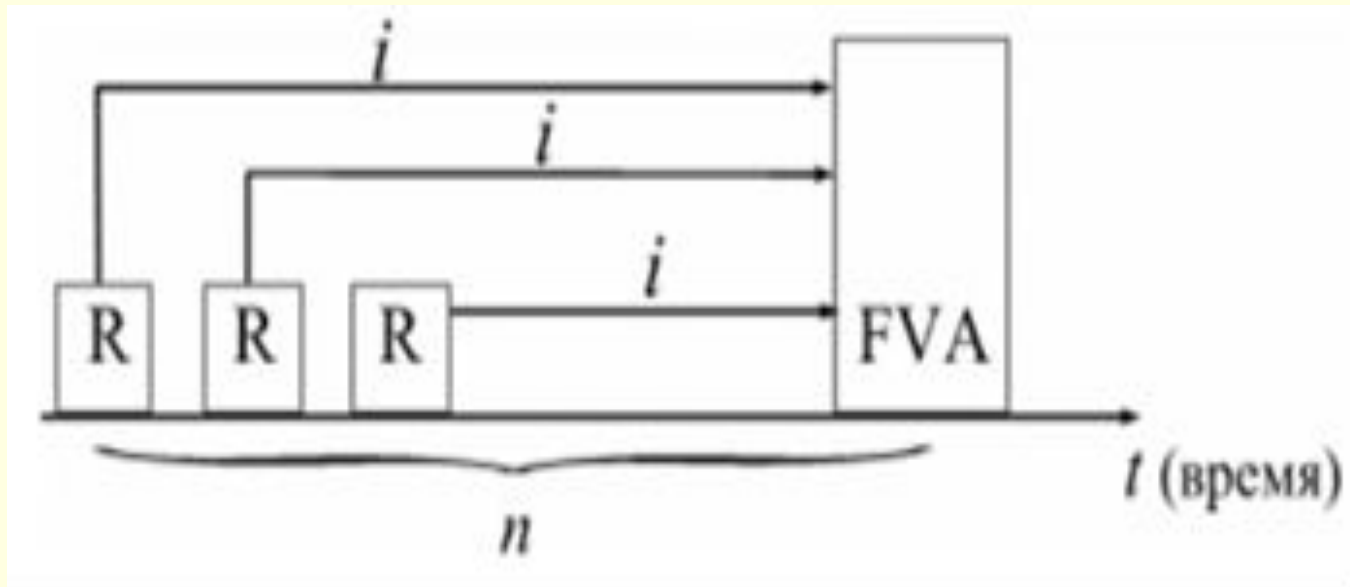
При рассмотрении финансовой ренты используются основные категории:

- **член ренты** (PMT) – величина каждого отдельного платежа;
- **срок ренты** (n) – время от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода;
- **процентная ставка** (i) – ставка, используемая при наращении платежей, из которых состоит рента.

Наращенная величина аннуитета

- **Наращенная сумма** – сумма всех платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Это может быть обобщенная сумма задолженности, итоговый объем инвестиций и т.п.
- *Наращенные отдельные платежи представляют собой члены геометрической прогрессии с первым членом равным R и множителем равным $(1 + i)$.*

Логика финансовой операции наращения финансовой ренты



Годовая постоянная обычная рента

$$FVA = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{n,i},$$

где FVA – наращенная сумма ренты;

R (PMT) – размер члена ренты, т.е. размер очередного платежа;

i – годовая процентная ставка, по которой на платежи начисляются сложные проценты;

n – срок ренты в годах,

$s_{n,i}$ – коэффициент наращения ренты

Пример

На счет в банке в течении пяти лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 500 руб., на которые будут начисляться проценты по ставке 30%. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Решение:

Период ренты равен одному году- это **годовая** рента;

Взносы будут в конце периода ренты, постнумерандо-это **обычная** рента;

Число членов ренты пять

Сумма всех взносов с начисленными процентами будет равна:

Можно определить наращенную сумму постоянной ренты, воспользовавшись финансовыми таблицами, содержащими коэффициенты наращенной ренты:

$$FVA = R \cdot s_{5; 30} = 500 \cdot 9,0431 = 4'521,55 \text{ руб.}$$

Сумма взносов в течение 5 лет составит:

$$P = n \cdot R = 5 \cdot 500 = 2'500 \text{ руб.}$$

Следовательно, сумма начисленных процентов будет равна:

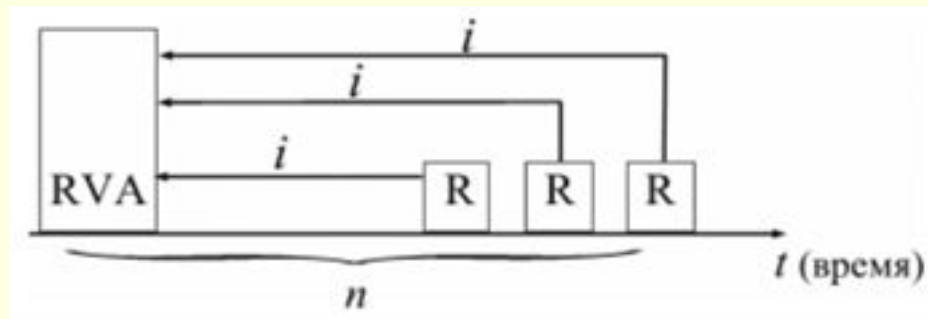
$$I = FVA - P = 4'521,55 - 2'500 = 2'021,55 \text{ руб.}$$

Таким образом, доход владельца счета за 5 лет составит 2'021,55 руб.

Современная (текущая) величина аннуитета

- 1. Современная (текущая) величина потока платежей** (капитализированная или приведенная величина) – это сумма платежей, дисконтированных на момент начала ренты по ставке начисляемых сложных процентов.
2. Это важнейшая характеристика финансового анализа, т.к. является основой для измерения эффективности различных финансово-кредитных операций, сравнения условий контрактов и т.п.
3. Данная характеристика показывает, какую сумму следовало бы иметь первоначально, чтобы, разбив ее на равные взносы, на которые начислялись бы установленные проценты в течение всего срока, можно было бы получить указанную наращенную сумму.

Логика финансовой операции определения современной величины потока платежей



$$PVA = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{n,i}$$

Дробь в формуле – коэффициент приведения ренты ($a_{n,i}$), значения которого табулированы для широкого круга значений, поскольку зависят от ставки процентов (i) и от числа лет (n)

Пример

- Определить по данным примера современную величину ренты.

Решение:

Современная величина ренты составит:

$$PVA = 500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,3)^{-5}}{0,3} = 1'217,78 \text{ руб.}$$

Таким образом, все производимые в будущем платежи оцениваются в настоящий момент в размере 1'217,78 руб.

Определение параметров аннуитета

- Последовательные платежи в виде постоянной обычной годовой ренты определяются основными параметрами:

R (PMT) – размер платежа;

n – срок ренты в годах;

i – годовая ставка процентов.

- При разработке условий финансовой операции могут возникать ситуации, когда заданной величиной является одна из двух обобщающих характеристик и неполный набор параметров ренты. В таких случаях находят **недостающий параметр**.

При определении **члена ренты** возможны два варианта

- 1 вариант - *наращенная сумма*. Если сумма долга определена на какой-либо момент в будущем (FVA), тогда величину последующих взносов в течение n лет при начислении на них процентов по ставке i можно определить по формуле:

$$R = \frac{FVA \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{FVA}{s_{n,i}},$$

Пример

- Для покупки автомобиля через 5 лет потребуется 50 тыс. руб. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года в банк, который начисляет проценты по ставке 40%.

Решение:

В данном случае известна наращенная величина постоянной финансовой ренты, поэтому размер ежегодных взносов будет равен:

$$R = \frac{50'000 \cdot 0,4}{(1 + 0,4)^5 - 1} = 4'568 \text{ руб.}$$

- Таким образом, чтобы накопить на счете необходимую сумму для покупки автомобиля следует в конце каждого года в течении пяти лет откладывать 4'568 руб.

При определении **члена ренты** возможны два варианта

- 2 вариант - *современная величина финансовой ренты*, тогда, исходя из ставки процента и срока ренты, разовый платеж находится по формуле:

$$R = \frac{PVA \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{PVA}{a_{n,i}}$$

Пример

- Сумма 10 тыс. рублей предоставлена в долг на 5 лет под 8% годовых. Определить ежегодную сумму погашения долга.

Решение:

Известна современная величина долга, отсюда:

$$R = \frac{10'000 \cdot 0,08}{1 - (1 + 0,08)^{-5}} = 2'504,56 \text{ руб.}$$

- Таким образом, ежегодно необходимо будет возвращать сумму 2'504,56 руб.