

Кафедра ИСКТ

Кривошеев В.П.

---

Управляемость и наблюдаемость.  
Критерии управляемости и наблюдаемости  
линейных стационарных многомерных  
объектов

---

# Управляемость и наблюдаемость. Критерии управляемости и наблюдаемости линейных стационарных многомерных объектов

Управляемость и наблюдаемость.

Математическое описание объекта управления представим в параметрах состояния :

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \quad (1)$$

$$Y(t) = C \cdot X(t)$$

где  $X(t)$  – вектор параметров состояния,

$$X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\};$$

$U(t)$  – вектор управляющих воздействий,

$$U(t) = \{U_1(t), U_2(t), \dots, U_r(t)\};$$

$Y(t)$  – вектор выходных переменных,

$$Y(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_l(t)\};$$

$A, B, C$  – матрицы постоянных коэффициентов с размерами соответственно  $n \times n, n \times r, l \times n$ .

# Управляемость и наблюдаемость.

## Критерии управляемости и наблюдаемости линейных стационарных многомерных объектов

Объект (1) называют полностью управляемым, если его можно с помощью некоторого ограниченного управляющего воздействия  $U(t)$  перевести в течение конечного интервала времени  $t_k$  из любого начального состояния  $X(0)$  в заданное конечное состояние  $X(t_k)$ .

Для осуществления такого перевода объекта необходимо, но не достаточно, чтобы каждая из переменных состояния  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) зависела хотя бы от одной из составляющих  $U_j$  ( $j=1, \dots, r$ ) вектора управлений  $U(t)$ .

# Управляемость и наблюдаемость.

## Критерии управляемости и наблюдаемости линейных стационарных многомерных объектов

Без доказательства приведём критерий управляемости линейных стационарных объектов.

Пусть матрицы  $A$  и  $B$  постоянны. Введём так называемую *матрицу управляемости*

$$Q_y = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

которая состоит из столбцов матрицы  $B$  и произведений матриц  $A^2B, \dots, A^{n-1}B$  и имеет размерность  $(n * nr)$ .

Справедлив следующий критерий управляемости: линейный стационарный объект  $X$  вполне управляем тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости (3) равен размерности  $n$  пространства состояний объекта, то есть если

$$\text{rank } Q_y = n$$

# Управляемость и наблюдаемость.

## Критерии управляемости и наблюдаемости линейных стационарных многомерных объектов

Запись в правой части (3) означает матрицу, у которой первые  $r$  столбцов совпадают со столбцами матрицы  $B$ , следующие  $r$  столбцов со столбцами произведения матриц  $AB$  и т.д., а последние  $r$  столбцов образованы столбцами произведения матриц  $A^{n-1}B$ . Ранг матрицы находят как наибольший порядок отличных от нуля квадратных миноров матриц.

Необходимое и достаточное условие (4) означает, что матрица управляемости (3) должна содержать  $n$  линейно независимых столбцов.

# Управляемость и наблюдаемость.

## Критерии управляемости и наблюдаемости линейных стационарных многомерных объектов

В частном случае, когда ранг матрицы  $B$  больше единицы, например равен  $k$ , условие управляемости имеет вид:  $rank[B \ AB \ A^2B \dots A^{n-k}B] = n$

Если управление  $U(t)$  – скалярная функция времени и матрица  $B$  превращается в матрицу–столбец, то для полной управляемости необходимо и достаточно, чтобы квадратная матрица управляемости  $Q_y$  не была вырожденной, то есть чтобы её определитель  $\det Q_y \neq 0$ .

В другом частном случае, когда  $A$  – диагональная матрица и все её элементы различны, для управляемости необходимо и достаточно, чтобы матрица  $B$  не содержала нулевых строк.

# Управляемость и наблюдаемость. Критерии управляемости и наблюдаемости линейных стационарных многомерных объектов

Если ранг матрицы  $Q_y$  меньше  $n$ , то система будет не полностью управляемой.

Наряду с управляемостью состояния  $X(t)$  можно рассматривать управляемость выхода  $Y(t)$  объекта [3].

Условие управляемости выхода объекта

$$\text{rank} Q_y = \text{rank} [CB \quad CAB \quad CA^2B \dots CA^{n-1}B] = l$$

где  $l$  — размерность вектора выхода  $Y(t)$ .

## Контрольные вопросы

---

- Каков физический смысл управляемости?
- Какова математическая интерпретация управляемости?
- Каков физический смысл наблюдаемости?
- При каких условиях объект полностью управляем?
- При каких условиях объект полностью наблюдаем?



# Рекомендуемая литература

---

1. Кривошеев В.П. Основы теории управления: Конспект лекций. Часть 2. – Владивосток: Изд-во ВГУЭиС, 1999. – 83 с.
2. Лукас В.А. Теория автоматического управления. – М.: Недра, 1990. – 416 с.

---

## Использование материалов презентации

Использование данной презентации, может осуществляться только при условии соблюдения требований законов РФ об авторском праве и интеллектуальной собственности, а также с учетом требований настоящего Заявления.

Презентация является собственностью авторов. Разрешается распечатывать копию любой части презентации для личного некоммерческого использования, однако не допускается распечатывать какую-либо часть презентации с любой иной целью или по каким-либо причинам вносить изменения в любую часть презентации. Использование любой части презентации в другом произведении, как в печатной, электронной, так и иной форме, а также использование любой части презентации в другой презентации посредством ссылки или иным образом допускается только после получения письменного согласия авторов.