Задачи поддержки принятия решений (ЗПР)

Теоретико-игровые модели

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max_{x_1 \in X_1},$$

$$\dots$$

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max_{x_n \in X_n}.$$

Задачи поддержки принятия решений

ЗПР в условиях определенности

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max_{x_1 \in X_1}, \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max_{x_n \in X_n}. \end{gathered} \quad (1)$$

ЗПР при неконтролируемых параметрах

$$f_i(x, w) \to \max_{x_i \in X_i}, \forall i \in I_n, w \in W \subseteq R^m \quad (2)$$

$$w = (w_1, \ldots, w_m), I_n = \{1, \ldots, n\}, x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Задачи поддержки принятия решений

Принцип осреднения параметров

$$f_i^1\left(x_1,\dots,x_n\right)=M_w\left[f_i\left(x,w\right)\right]\rightarrow\max_{x_i\in X_i},\forall i\in I_n \qquad (3)$$

Принцип гарантированного результата

$$f_i^2\left(x_1,\dots,x_n\right)=\left[\min_{w\in W}f_i\left(x,w\right)\right]\rightarrow\max_{x_i\in X_i},\forall i\in I_n \qquad (4)$$

<u>Определение 1.</u> Пусть $\tilde{X}_i=\left\{\tilde{x}_i\left(w\right),\tilde{x}:W\rightarrow X_i\right\}$, тогда вариационным расширением (ВР) задачи (2) будем называть следующую задачу

$$f_i\left(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n\right)=M_w\left[f_i\left(\tilde{x}\left(w\right),w\right)\right]\rightarrow\max_{\tilde{x}_i\in\tilde{X}_i},\forall i\in I_n \qquad (5)$$

Пример

Игра «Государство-Предприниматели»

Целевая функция центра:

$$f_ц(k,x) = x \cdot k \to \max_{0 \le k \le 1}$$

Целевая функция предпринимателей:

$$f_a(k,x) = (1-k)\cdot x - \varphi(x,\delta) \to \max_{0 \le x \le x_{\max}}$$

x – предпринимательская прибыль ($0 \le x \le x_{\max}$);

k – доля прибыли, отчисляемая в качестве налогов ($0 \le k \le 1$);

$\varphi(x,\delta)$ – предпринимательские риски.

Пример

Вариационное расширение:

$$\hat{f}_{ц}\left(k, x(\delta)\right) = M_{\delta}\left[x(\delta)\cdot k\right] \rightarrow \max_{0\le k\le 1}$$

$$\hat{f}_{a}\left(k, x(\delta)\right) = M_{\delta}\left[(1-k)\cdot x(\delta) - \varphi\left(x(\delta),\delta\right)\right] \rightarrow \max_{0\le x(\delta)\le \bar{x}}$$

$$\varphi\left(x(\delta),\delta\right) = -\delta \ln\left(1 - \frac{x(\delta)}{x_{\max}}\right),$$

$$0 < \delta < x_{\max},\ \delta_{н} \le \delta \le \delta_{в},$$

$$\varphi(0) = 0; \varphi(x) \ge 0;$$

$$\varphi_{x}^{'} \ge 0; \varphi_{x=0}^{'} < 1.$$

Пример игры 2-х лиц с совпадающими интересами при асимметрии информированности

Целевая функция

$$J\left(x(\cdot)\right)=\int_W F\left(w,x(w)\right)\Phi(w)\,dw,\quad x=\left(x_1,x_2\right), w=\left(w_1,w_2\right)$$

$$\int_W F\left(w,x(w)\right)\Phi(w)\,dw \to \max_{x_1\in\tilde{X}_1,\, x_2\in\tilde{X}_2},\ \tilde{X}=\tilde{X}_1\times\tilde{X}_2= {}^1\left(\quad ,\mathrm{R}^2\right) \quad (6)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1(w)=x_1(w_2) \\ x_2(w)=x_2(w_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial w_1}=0 \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial w_2}=0 \end{cases} \quad (7)$$

Игры n лиц

<u>Определение 2.</u> Ситуация $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ является равновесной по *Нэшу*, если для всех $x_i \in X_i, i \in I_n$ справедливо неравенство:

$$J_i\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \geq J_i\left(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*\right), \forall i \in I_n.$$

Предположим

$$F = \left\langle A(x,w),(x,w)\right\rangle,\ A = A^T = \left(a_{ij}\right)_{4\times 4}, W = [a,b]\times[a,b].$$

Тогда задача (6), (7) примет вид:

$$J\left(x(\cdot)\right) = \int_a^b\int_a^b \left(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1w_1 + \ldots + a_{44}w_2^2\right)\Phi(w)\,dw \to \max_{x \in W^1\left(\ ,\mathrm{R}^2\right)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = 0, \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = 0.$$

Задачи поддержки принятия решений при асимметрии информированности

$w=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ – случайный вектор с функцией распределения $\Phi(w)$

множество $I_m=\{1,2,\ldots,m\}$ – индексы компонент вектора *w*

множество $S_i \subseteq I_m$ – совокупность индексов, определяющих информационную структуру *i*- ой решающей функции, $i\in I_n=\{1,2,\ldots,n\}$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – вектор управления, где $x_i=x_i(d_i)$, $d_i=(w_j)$, $j\in S_i$.

Таким образом, задача примет вид:

$$J_i(x)=M[F_i(x(w),w)]\underset{x_i\in X_i}{\rightarrow}\max,\ i\in I_n \quad (8)$$

условие разной информированности приводит к отсутствию соответствующей переменной : $\dfrac{\partial x_i}{\partial w_j}=0,\ j\notin S_i.$

Вариационное расширение

Целевая функция центра: $$f_ц(k,x) = x \cdot k$$	Целевая функция предпринимателей: $$f_a(k,x) = (1-k)\cdot x - \varphi(x,\delta)$$
Цели игроков	
Максимизировать целевую функцию путем изменения ставки налога	Максимизировать целевую функцию путем изменения совокупной активности
Информационные гипотезы	
1. Центр знает вероятностное распределение параметра δ, а предприниматели – его точное значение. 2. Компромисс центра и предпринимателей достигается в ситуациях равновесия по Штакельбергу.	
Решение при $\delta_в < \overline{x} = x_{\max}$	
$k^* = 1 - \sqrt{\dfrac{\delta_{ср}}{\overline{x}}}, \delta_{ср} = (\delta_в + \delta)/2$	$x^*(\delta) = \overline{x} - \dfrac{\delta}{1-k^*}$

Задачи поддержки принятия решений при асимметрии информированности

$$J_i\left(x(\cdot)\right) = \int\limits_W F_i\left(x(w), w\right)\Phi(w)\,dw \to \max_{x_i \in X_i}, i \in I_n,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = 0,\ j \notin S_i.$$

$$X = \prod_{i \in I_n} X_i,\ x_i \in X_i,\ X \subset C^1[W, \mathrm{R}^n],\ w \in W \subset \mathrm{R}^m$$

Игра в нормальной форме:

$$\Gamma = \left(I_n, \{X_i\}_{i \in I_n}, \{J_i(x(\cdot))\}_{i \in I_n}\right) \qquad (9)$$

Необходимые условия оптимальности

Функция Лагранжа:

$$L_i = \int\limits_W \left[F_i\left(x\left(w\right), w\right)\Phi\left(w\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\notin S_i}\lambda_{ij}\frac{\partial x\left(d_i\right)}{\partial w_j}\right]dw.$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial F_i\left(x\left(w\right), w\right)}{\partial x_i}\Phi\left(w\right) = \sum_{j\in S_i}\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial w_j}, i\in I_n.$$

Условие трансверсальности: $\Lambda\left(w\right)\Big|_{\partial W} = 0,$

$$\int\limits_W \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\Phi\left(w\right)dp_i = 0, \qquad (10)$$

$$p_i = \left(w_j\right)_{j\in S_i}, i\in I_n.$$

Игра двух лиц при асимметрии информированности

$$M\left[F_1\left(w_1, w_2, x_1(w), x_2(w)\right)\right] \to \max_{x_1},$$

$$M\left[F_2\left(w_1, w_2, x_1(w), x_2(w)\right)\right] \to \max_{x_2},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = 0, \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = 0. \qquad (11)$$

$$F_1 = \left\langle A\left(x_1, x_2, w_1, w_2\right), \left(x_1, x_2, w_1, w_2\right)\right\rangle, \ F_2 = \left\langle B\left(x_1, x_2, w_1, w_2\right), \left(x_1, x_2, w_1, w_2\right)\right\rangle,$$

$$A = A^T = \left(a_{ij}\right)_{4\times4}, \qquad B = B^T = \left(b_{ij}\right)_{4\times4}$$

$$J_1 = \int_W \left(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1w_1 + \ldots + a_{44}w_2^2\right)\Phi(w)\,dw \to \max_{x_1 \in X_1}, \qquad (12)$$

$$J_2 = \int_W \left(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1w_1 + \ldots + b_{44}w_2^2\right)\Phi(w)\,dw \to \max_{x_2 \in X_2}.$$

Игра двух лиц при асимметрии информированности

Утверждение 1

Пусть компоненты случайного вектора w есть независимые случайные величины, тогда равновесие по *Нэшу* задачи (12) при условиях (11), и $a_{11}, b_{22} \leq 0$ достигается на линейных по своим переменным функциях $x_1^*(w_2)$ и $x_2^*(w_1)$, где a_{11} и b_{22} элементы матриц A и B соответственно.

Игра двух лиц при асимметрии информированности

$$\begin{cases} a_{11}x_1(w_2)\int\limits_a^b \Phi(w)\,dw_1 + a_{12}\int\limits_a^b x_2(w_1)\Phi(w)\,dw_1 + a_{13}\int\limits_a^b w_1\Phi(w)\,dw_1 + a_{14}w_2\int\limits_a^b \Phi(w)\,dw_1 = 0, \\ b_{22}x_2(w_1)\int\limits_a^b \Phi(w)\,dw_2 + b_{12}\int\limits_a^b x_1(w_2)\Phi(w)\,dw_2 + b_{23}w_1\int\limits_a^b \Phi(w)\,dw_2 + b_{24}\int\limits_a^b w_2\Phi(w)\,dw_2 = 0. \end{cases}$$

$$x(s) - \lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(t)\,dt = f(s) \qquad (13)$$

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} K_1(t,s) & 0 \\ 0 & K_2(s,t) \end{pmatrix}, K_1(t,s) = \frac{b_{22}\Phi(t,s)}{b_{12}\int\limits_a^b \Phi(t,s)\,dt}, K_2(t,s) = \frac{a_{11}\Phi(t,s)}{a_{12}\int\limits_a^b \Phi(t,s)\,ds}, \lambda = \frac{a_{12}}{a_{11}}\cdot\frac{b_{12}}{b_{22}}$$

$$f(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix}, \; f_1(s) = \frac{-\int\limits_a^b (a_{13}t + a_{14}s)\Phi(t,s)\,dt}{a_{11}\int\limits_a^b \Phi(t,s)\,dt}, f_2(s) = \frac{-\int\limits_a^b (b_{23}t + b_{24}s)\Phi(t,s)\,ds}{b_{22}\int\limits_a^b \Phi(t,s)\,ds}, x(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}$$

Игра двух лиц при асимметрии информированности

Утверждение 2

Решение задачи (12) при условиях (11), в концепции равновесия *Нэша* существует и единственно, если выполняются условия:

$$a_{11}, b_{22} \le 0, (b-a)\max_{(t,s)}\left(\left|\frac{a_{12}\Phi(t,s)}{a_{11}\int_a^b \Phi(t,s)\,dt}\right|, \left|\frac{b_{12}\Phi(t,s)}{b_{22}\int_a^b \Phi(t,s)\,ds}\right|\right) < 1$$

Задача стимулирования в активных системах

- Обозначим $y_i \in A_i$ – действие i-го АЭ, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество активных элементов.
- $z = Q(y)$, где z –результат деятельности АЭ, входящих в систему.
- Пусть индивидуальные затраты i-го АЭ будут $c = c_i(y)$
- Функцию стимулирования для i-го АЭ обозначим

$$\sigma_i : A' \times A_0 \to \Re, \sigma_i = \sigma_i(y, Q(y))$$

тогда, целевая функция i-го АЭ примет вид:

$$f_i(y, \sigma_i) = \sigma_i(y, Q(y)) - c_i(y), i \in I$$

- Целевая функция центра будет выражаться как разность между результатом деятельности системы и суммарными затратами на стимулирование:

$$\Phi(y, \sigma) = H(y, Q(y)) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y, Q(y))$$

Задача стимулирования в активных системах

Ограничения

1. $\forall i \in I \; A_i \in \Re_+$.
2. а) функция $c = c_i(y)$ непрерывна по всем переменным;

   б) $c_i(y)$, не убывает по y_i;

   в) $\forall y \in A' \; c_i(y) \geq 0$;

   г) $\forall y_{-i} \in A_{-i} \; c_i(0; y_{-i}) = 0$.
3. Функции стимулирования кусочно-непрерывные и принимают неотрицательные значения.
4. Целевая функция центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при не нулевых действиях агентов.

Задача стимулирования в активных системах с разной информированностью АЭ

- Обозначим $u_i(x) \in A_i$ – действие i-го АЭ, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество АЭ
- $z = Q(u)$, где z –результат деятельности АЭ, входящих в систему.
- Пусть индивидуальные затраты i-го АЭ будут $c_i(u(x))$

  Для оценки затрат будем использовать усредненное значение:

$$\overline{c}_i = M[c_i(u(x))]$$

  где $M[\cdot]$ – математическое ожидание.
- Функцию стимулирования для i-го АЭ обозначим $\sigma_i(u(x), z)$

$$\overline{\sigma}_i = M[\sigma_i(u(x), z)]$$

  тогда, целевая функция i-го АЭ примет вид:

$$f_i(u, \sigma_i) = \int_X \overline{\sigma}_i(u(x), z(u(x))) - c_i(u(x))\Phi(x)dx$$

- Целевая функция центра будет выражаться как разность между результатом деятельности системы и суммарными затратами на стимулирование:

$$\Phi(u(\cdot), \sigma(\cdot)) = \int_X H(u(x), Q(u(x))) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma}_i(u(\cdot), z(u(x)))\Phi(x)dx$$

Задача стимулирования в активных системах с разной информированностью АЭ

Ограничения

1. $\forall i \in I \quad A_i = [0; A_i^+] \subseteq \Re_+^1 \quad A_0 = [0; A_0^+] \subseteq \Re_+^1$
2. $\dfrac{\partial u_i(d_i)}{\partial x_j} = 0, \forall i \in I$,где $d_i = (x_j)_{j \in I_i}$
3. а) функция $c_i(u(x))$, является неубывающей по $u_i(x)$, если $c_i(u_1(x),...,u_{i-1}(x),u_i(x)+h(x),u_{i+1}(x),...,u_n(x)) \geq c_i(u(x))$ и выполнено неравенство $u_i(x)+h(x) \geq u_i(x)$;

   б) затраты i-го АЭ не убывают по $u_i(x)$ $\forall i \in I$;

   в) $\forall j \in I \; c_i(u_j(x)) \geq 0$;

   г) $\forall y_{-i} \in A_{-i} \; c_i(0; u_{-i}(x)) = 0$;

3. Функционалы стимулирования кусочно-непрерывные и принимают неотрицательные значения.
4. Целевая функция центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при не нулевых действиях агентов.

Пусть ситуация равновесия в игре

$$\begin{cases} f_1(u,v) \to \max\limits_{u \in U \subset R^n}, \\ f_2(u,v) \to \max\limits_{v \in V \subset R^n}. \end{cases}$$

, тогда является ситуацией равновесия для игры

$$\begin{cases} J_1 = \int\limits_X f_1(u(x),v(x))\Phi(x)dx \to \max\limits_{u \in U(x) \subset C^1[X]}, \\ J_2 = \int\limits_X f_2(u(x),v(x))\Phi(x)dx \to \max\limits_{v \in V(x) \subset C^1[X]}, \end{cases}$$

Задача стимулирования в случае квадратичной структуры

- Выпишем функции Лагранжа L_1, L_2:

$$L_1 = \iint \lambda_0^1 (((a_{11} - A)u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2)\Phi(x,y) - P_1 \frac{\partial u}{\partial x})dxdy$$

$$L_2 = \iint \lambda_0^2 ((b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + (b_{22} - B)v^2)\Phi(x,y) - P_2 \frac{\partial v}{\partial y})dxdy$$

где p_1, p_2 – множители Лагранжа. $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 1$

- Уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} F_{1u} - \dfrac{\partial}{\partial x}(p_1) = 0, \\ F_{2v} - \dfrac{\partial}{\partial y}(p_2) = 0. \end{cases}$$

- Условие трансверсальности: $P_1 |_{\partial X} = 0, P_2 |_{\partial Y} = 0$
- Отсюда система уравнений Эйлера путем несложных преобразований сводится к интегральному уравнению Фредгольма:

$$\varphi(y) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(x)dx = 0$$

где $K(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & K_1(x,y) \\ K_2(x,y) & 0 \end{pmatrix}$, $K_1(x,y) = \dfrac{(b_{11} - B)\Phi(x,y)}{b_{12}\int_a^b \Phi(x,y)dy}$, $K_2(x,y) = \dfrac{(a_{22} - A)\Phi(x,y)}{a_{12}\int_a^b \Phi(x,y)dy}$,

$\vec{\phi}(y) = \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix}$, $\lambda = \dfrac{a_{12}}{a_{22} - A} \dfrac{b_{11} - B}{b_{12}}$

Пример задачи стимулирования второго рода

- Рассмотрим задачу стимулирования второго рода в АС с двумя АЭ, имеющими функции затрат:

$$c_1(u,v) = \frac{(u+\alpha v)^2}{2\bar{r}_1},$$

$$c_2(u,v) = \frac{(v+\alpha u)^2}{2\bar{r}_2},$$

где α – некоторый параметр, $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ – оценка квалификации АЭ.

- Пусть функция дохода центра $H(u,v) = u + v$
- Фонд заработной платы ограничен величиной R (глобальное ограничение)
- Центр использует систему стимулирования:

$$\sigma_K(u^*,v^*,u,v) = \begin{cases} c(u^*,v^*), (u^*,v^*) = (u,v), \\ 0, (u^*,v^*) \neq (u,v) \end{cases}$$

- Задача центра сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} \Phi(u,v) = H(u,v) - c_1(u,v) - c_2(u,v) \to \max\limits_{u,v}, \\ c_1(u,v) + c_2(u,v) \le R \end{cases}$$

Пример задачи стимулирования второго рода

Задачу (6) решим с помощью метода множителей Лагранжа.

- Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(u,v,\alpha,\lambda)=\lambda_0\left(u+v-\frac{(u+\alpha v)^2}{2\bar{r}_1}-\frac{(v+\alpha u)^2}{2\bar{r}_2}\right)+\lambda\left(\frac{(u+\alpha v)^2}{2\bar{r}_1}+\frac{(v+\alpha u)^2}{2\bar{r}_2}-R\right)$$

где $\lambda \geq 0$ – множитель Лагранжа, $\lambda_0 = 1$.

- Необходимые условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u}=0, \dfrac{\partial L}{\partial v}=0, \\ \lambda\left(\dfrac{(u+\alpha v)^2}{2\bar{r}_1}+\dfrac{(v+\alpha u)^2}{2\bar{r}_2}-R\right)=0 \end{cases}$$

1. $\lambda = 1$, решения не существует
2. $\lambda = 0$, решение существует и имеет вид:

$$\begin{cases} u_1^* = \dfrac{\bar{r}_1-\alpha\bar{r}_2}{(1+\alpha)^2(1-\alpha)}, \\ v_1^* = \dfrac{\bar{r}_2-\alpha\bar{r}_1}{(1+\alpha)^2(1-\alpha)}. \end{cases}$$

3. $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq 0$,решение будет следующим:

$$\begin{cases} u_2^* = \dfrac{\sqrt{2R}}{\bar{r}_1+\bar{r}_2}\dfrac{\bar{r}_1-\alpha\bar{r}_2}{1-\alpha^2}, \\ v_2^* = \dfrac{\sqrt{2R}}{\bar{r}_1+\bar{r}_2}\dfrac{\bar{r}_2-\alpha\bar{r}_1}{1-\alpha^2}, \\ \lambda = 1-\dfrac{1}{1+\alpha}\sqrt{\dfrac{\bar{r}_1+\bar{r}_2}{2R}}. \end{cases}$$

Пример задачи стимулирования второго рода

- Матрица вторых производных:

$$A = \begin{pmatrix} (\lambda-1)(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{\alpha^2}{\bar{r}_2}) & (\lambda-1)(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{1}{\bar{r}_2}) \\ (\lambda-1)(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{1}{\bar{r}_2}) & (\lambda-1)(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{\alpha^2}{\bar{r}_2}) \end{pmatrix}$$

- Выпишем главные миноры матрицы :

$$M_{11} = (\lambda-1)(\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{\alpha^2}{\bar{r}_2}) < 0$$

$$M_{22} = (\lambda-1)^2 \frac{(\alpha^2-1)^2}{\bar{r}_1 \bar{r}_2} \geq 0$$

- В обоих точках достигается максимум функции, найдем значения данной функции в точках (10) и (11) и сравним их:

$$\Phi(u_1^*, v_1^*) = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2(\alpha+1)^2}$$

$$\Phi(u_2^*, v_2^*) = \frac{\sqrt{2R}}{\alpha+1} - \frac{R}{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}$$

Абсолютный максимум достигается в первой точке.

Пример задачи стимулирования второго рода при разной информированности активных элементов

- Рассмотрим задачу стимулирования второго рода в АС с двумя АЭ, имеющими функции затрат:

$$\bar{c}_1(u,v)=\int_X \frac{\left(u(x)+\alpha v(x)\right)^2}{2r_1(x)}P(x)dx,$$

$$\bar{c}_2(u,v)=\int_X \frac{\left(v(x)+\alpha u(x)\right)^2}{2r_2(x)}P(x)dx$$

, где α – некоторый параметр, $\bar{r}_1(x), \bar{r}_2(x)$ – оценка квалификации АЭ,

$$\bar{r}_1(x)=\int_X r_1(x)P(x)dx,\ \bar{r}_2(x)=\int_X r_2(x)P(x)dx$$

- Пусть функция дохода центра $H(u,v)=u(x)+v(x)$
- Фонд заработной платы ограничен величиной R (глобальное ограничение)
- Центр использует систему стимулирования:

$$\sigma_K(u^*,v^*,u,v)=\begin{cases} c(u^*,v^*),(u^*,v^*)=(u,v),\\ 0,(u^*,v^*)\neq(u,v)\end{cases}$$

- Задача центра сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} \Phi(u,v)=H(u,v)-\bar{c}_1(u,v)-\bar{c}_2(u,v)\to\max\limits_X,\\ \bar{c}_1(u,v)+\bar{c}_2(u,v)\le R\end{cases}$$

- Разная информированность АЭ: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=0, \dfrac{\partial v}{\partial x_2}=0$

Пример задачи стимулирования второго рода при разной информированности активных элементов

- Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$L(u,v,\lambda)=\int_X \Psi(u,v,\lambda)P(x)dx=\int_X(\lambda_0((u(x)+v(x))-\bar{c}_1(u,v)-\bar{c}_2(u,v))+$$

$$+P_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+P_2\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\lambda(\bar{c}_1(u,v)+\bar{c}_2(u,v)-R))P(x)dx,$$

где $\lambda \geq 0$ – множитель Лагранжа, $\lambda_0=1$.

- Необходимые условия:

$$\begin{cases}\int_X \frac{\partial \Psi}{\partial u}dx_1=0,\\ \int_X \frac{\partial \Psi}{\partial v}dx_2=0,\end{cases}$$

- Обозначим:

$$K_1(x_1,x_2)=\left(\frac{\alpha^2}{r_1(x)}+\frac{1}{r_2(x)}\right)P(x) \qquad \varphi_1(x_1,x_2)=\int_X\left(\frac{\alpha}{r_1(x)}+\frac{\alpha}{r_2(x)}\right)P(x)dx_1$$

$$K_2(x_1,x_2)=\left(\frac{\alpha}{r_1(x)}+\frac{\alpha}{r_2(x)}\right)P(x) \qquad \varphi_2(x_1,x_2)=\int_X\left(\frac{\alpha^2}{r_1(x)}+\frac{1}{r_2(x)}\right)P(x)dx_2$$

- Отсюда система () путем несложных преобразований сводится к интегральному уравнению:

$$U(x)-\delta\int_X K(x,y)U(y)dy=f$$

где $U(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\ v(x)\end{pmatrix}$, $U(y)=\begin{pmatrix}u(y)\\ v(y)\end{pmatrix}$, $K(x,y)=\begin{pmatrix}0 & \frac{K_1(x,y)}{\varphi_1(x)}\\ \frac{K_2(x,y)}{\varphi_2(x)} & 0\end{pmatrix}$, $f=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda}\\ \frac{1}{1-\lambda}\end{pmatrix}$

Пример задачи стимулирования второго рода при разной информированности активных элементов

Применим метод моментов для решения интегрального уравнения Фредгольма: $U(x)-\delta\int\limits_X K(x,y)U(y)dy=f$

Пусть в качестве линейно независимой системы возьмем следующую:

$$\vec{\varphi}_i(x)=\begin{pmatrix}\varphi_i^1(x)\\ \varphi_i^2(x)\end{pmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2},\ \cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x\\ 1,\ x,\ x^2\end{Bmatrix}$$

Возьмем $A=2$; $B=1$, $m=n=\alpha=\frac{1}{2}$ и отрезок $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Рассмотрим систему $\sum\limits_{j=1}^{3}c_j(\alpha_{ij}-\delta\beta_{ij})=\delta\gamma_i$ (i=1,2,3),

где $a_{ij}=\int\limits_a^b\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$, $\beta_{ij}=\int\limits_a^b dx\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)ds$, $\gamma_i(x)=\int\limits_a^b dx\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)f(s)ds$.

Откуда решение уравнения () имеет вид:

$$\overline{U}(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\ v(x)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{1-\lambda}+\sum\limits_{i=1}^{3}c_i\varphi_i^1(x)\\ \frac{1}{1-\lambda}+\sum\limits_{i=1}^{3}c_i\varphi_i^2(x)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\overline{U}(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\ v(x)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0.23+4.43\cos(2\pi x_2)-7.29\sin(2\pi x_2)\\ -0.54+4.43x_1-7.29x_1^{2}\end{bmatrix}$$