Основы теории вероятностей

Чикрин Евгений Александрович

КАЗАНЬ-2016

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Теория вероятностей объясняет и исследует различные закономерности, которым подчинены случайные события и случайные величины.

Событием является любой факт, который можно констатировать в результате наблюдения или опыта.

Наблюдением *или* ***опытом*** называют реализацию определенных условий, в которых событие может состояться.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Все ***события***, за которыми люди наблюдают
или сами создают их, делятся на:
достоверные
(в результате опыта происходят всегда),
невозможные
(в результате опыта никогда не произойдут),
и случайные
(в результате опыта событие
может произойти или не произойти).

***Теория вероятностей рассматривает
именно случайные события.***

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Случайные события называют ***несовместными***,
если в результате одного испытания может наступить одно из этих событий, но ***невозможно*** наступление двух или более событий.

Если наступление одного случайного события ***не исключает*** наступление другого события, то такие события называют ***совместными.***

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Если в каждом испытании должно произойти одно и только одно из несовместных случайных событий, то эти события составляют ***полное множество (систему) событий.***

В случае, когда полную систему образуют только два события, они называются ***противоположными.***

Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна ***1***.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Суммой (объединением) событий А и В называют сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А и В.

Произведением (пересечением) событий А и В называется их совместное появление.

Если наступление одного события не влияет на возможность появления другого, то такие события называются ***независимыми.***

Классическое определение вероятности

Вероятностью события *А* называют отношение числа благоприятных этому событию возможностей ***m*** к числу всех равновозможных несовместных событий ***n***,
которые могут произойти в результате одного испытания или наблюдения, т.е.

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

Примеры непосредственного определения вероятностей

- *ЗАДАЧА 1.* **На семинар приехали 3 ученых из Норвегии, 3 из России и 4 из Испании. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из России.**

Решение.

Число благоприятных исходов m=3,
общее число возможных исходов n=10,
вероятность $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$

ОТВЕТ: 0,3

Примеры непосредственного определения вероятностей

- ЗАДАЧА 2. **Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.**

Решение.

Число благоприятных исходов m=100,

общее число возможных исходов n=108,

вероятность $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{100}{108}\approx 0{,}93$

ОТВЕТ: 0,93

Примеры непосредственного определения вероятностей

- ЗАДАЧА 3. **Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на три?**

Решение.

Число благоприятных исходов m=3 (числа 12,15,18), общее число возможных исходов n=10,

вероятность $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0,3$

ОТВЕТ: 0,3

Основные правила вычисления вероятностей сложных событий

Вероятность суммы <u>несовместных</u> событий равна сумме их вероятностей.

Вероятность суммы <u>произвольных</u> событий
равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения этих событий.

ЗАДАЧА 4. **Вероятность того, что чайник прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.**

Решение.

- Обозначим А={чайник прослужит больше года};

В={чайник прослужит больше двух лет};

С={чайник прослужит меньше двух лет, но больше года.

А=В+С; события несовместны

р(А)=р(В)+р(С); 0,96=0,87+р(С);

р(С)=0,96-0,87=**0,09**

ОТВЕТ: 0,09

ЗАДАЧА 5. **В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.**

Решение.

- Обозначим A={кофе закончится в 1 автомате};
  B={кофе закончится во 2 автомате};
  A+B={кофе закончится хотя бы в одном автомате}
  A*B={кофе закончится в каждом из автоматов}

  p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A*B),

  где p(A)=p(B)=0,3 и p(A*B)=0,12

  p(A+B)=0,3+0,3-0,12=0,6-0,12=0,48

Тогда искомая вероятность p=1-0,48=0,52

ОТВЕТ: 0,52

Основные правила вычисления вероятностей сложных событий

Теорема умножения для независимых событий

Вероятность произведения двух

*независимых событий **А** и **В** равна*

произведению их

вероятностей.

ЗАДАЧА 6. **Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.**

Решение.

Обозначим C={A выиграет белыми};

D={A выиграет черными};

p(C)=0,52; p(D)=0,3; события независимы;

$$p(C\cdot D)=p\left(C\right)\cdot p(D)=0{,}52\cdot 0{,}3=0{,}156$$

ОТВЕТ: 0,156

ЗАДАЧА 7. **Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.**

Решение.

События равновероятны, независимы и должны произойти «одновременно», следовательно

$$p(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = 0,5 \cdot (1 - 0,5) \cdot 0,5 = 0,125$$

ОТВЕТ: 0,125

ЗАДАЧА 8. **Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, второй – с вероятностью 0,7, а третий – с вероятностью 0,75. Найдите вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.**

Решение:

$$\text{Обозначим } A_i = \{\text{Стрелок под номером } i \text{ попал в цель}\}$$

$$p(A_1) = 0,6;\ p(A_2) = 0,7;\ p(A_3) = 0,75$$

События независимы, следовательно вероятность того, что все стрелки промахнулись равна

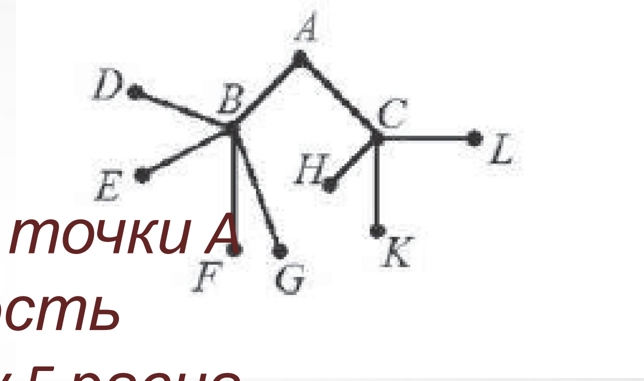
$$p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,25 = 0,03$$

Значит вероятность хотя бы одного попадания в цель

p=1-0,03=0,97

ОТВЕТ: 0,97

ЗАДАЧА 9. **Пенсионер гуляет по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Пенсионер начинает прогулку в точке *A*. Найдите вероятность того, что он придет в точку *F*.**



Решени е

Вероятность попадания из точки А в точку В равна 0,5; вероятность попадания из точки В в точку F равна 0,25.

p(A)*p(B)=1/2*1/4=1/8=0,125

ОТВЕТ: 0,125

Основные правила вычисления вероятностей сложных событий

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность
события ***B***, вычисленную в предположении, что событие ***A***
уже наступило.

Теорема умножения для зависимых событий

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)*P_A(B)$$

ЗАДАЧА 10. **Слово "МАТЕМАТИКА" разделено на отдельные буквы, из них произвольным образом отбираются и выкладываются по порядку четыре буквы. Какова вероятность получения слова "МАМА"?**

Решени
е.

Вероятность события, что первой будет выбрана буква М равна 0,2; вероятность того, что далее будет выбрана буква А составляет 3/9=1/3. Следующая
вероятность выбора буквы М равна 0,125, и, наконец,
что последней будет выбрана буква А составляет 2/7.
*В итоге получаем, что вероятность получения слова «МАМА» равна p=0,2*1/3*0,125*2/7=1/420*

ОТВЕТ: 1/420

Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события **A**, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события **A**:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

ЗАДАЧА 11. **Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.**

Решение

Обозначим A={Джон промахнется};

B={Джон схватил пристрелянный револьвер}; $p_B A = 1 - 0,8 = 0,2$

C={Джон схватил не пристрелянный револьвер}; $p_C A = 1 - 0,2 = 0,8$

$$p(A) = p(B) \cdot p_B(A) + p(C) \cdot p_C(A)$$

$$p(A) = 0,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,68$$

ОТВЕТ: 0,68

ЗАДАЧА 12. **Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.**

Решение.

$$\text{Обозначим } A = \left\{ \text{Проба дала положительный анализ} \right\}$$

$$P(A) = 0,05 \cdot 0,9 + 0,95 \cdot 0,01 = 0,045 + 0,0095 = 0,0545$$

ОТВЕТ: 0,0545

Повторение испытаний. Формула Бернулли

- Рассматривают независимые повторения одного и того же испытания с двумя возможными исходами,

которые условно называют «успех» и «неудача». Вероятность $P_n(k)$ того, что при *n* таких повторениях произойдет ровно *k* «успехов» можно найти по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n{}^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где вероятность появления события *A* в одном опыте равна *p* , а его непоявления равна *q* = 1- *p* .

ЗАДАЧА 13. **Какова вероятность того, что при 5 бросаниях игрального кубика «пятерка» выпадет ровно 2 раза? Ответ округлите до сотых.**

Решение

$Обозначим\ A = \{\text{Выпало 5}\quad очков\}$

$$p = p(A) = \frac{1}{6};\ q = p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6};\ C_5^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$$

$$P_5(2) = 10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{10\cdot 125}{7776} \approx 0{,}16$$

ОТВЕТ: 0,16

ЗАДАЧА 14. **За один выстрел стрелок поражает мишень с вероятностью 0,1. Найдите вероятность того, что при пяти выстрелах он хотя бы раз попадет в мишень.**

Решение.

Обозначим $A = \{Стрелок\ поразил\ мишень\}$

$p(A)=p=0,1;\ q=1-0,1=0,9$

Вероятность того, что стрелок не попадет ни разу, т.е. совершит 5 промахов вычисляется по формуле $Q = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 0,9^5 = 0,59049$

Тогда вероятность хотя бы одного попадания будет равна $P = 1 - Q = 1 - 0,59049 = 0,40951$

ОТВЕТ: 0,40951

ЗАДАЧА 15. **На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.**

Решение:

Пусть всего произведено **х** тарелок. Качественных тарелок 0,9**х**, они поступают в продажу. Дефектных тарелок 0,1**х**, из них в продажу поступает 0,2·0,1**х**=0,02**х**. Всего в продажу поступило 0,9**х**+0,02**х**=0,92**х** тарелок. Вероятность купить тарелку без дефектов равна 0,9**х**/0,92**х**=45/46≈0,98.

ОТВЕТ: 0,98

ЗАДАЧА 16. **Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства**

Решение. **1 способ.**

$$\textit{Обозначим } A = \{\textit{Яйцо имеет высшую категорию}\}$$

$$B_1 = \{\textit{яйцо из 1 хозяйства}\};\ B_2 = \{\textit{яйцо из 2 хозяйства}\}$$

$$p(B_1) = p$$

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) =$$

$$= p\cdot 0,4 + (1-p)\cdot 0,2 = 0,2p + 0,2 = 0,35$$

$$\textit{Отсюда } 0,2p = 0,15 \textit{ или } p = 0,75$$

ОТВЕТ: 0,75

2 способ.

Пусть X яиц произведено в первом хозяйстве,
а Y яиц – во втором.
Тогда $0,4X+0,2Y=0,35(X+Y)$ или
$0,05X=0,15Y$

Окончательно
$X=3Y=0,75(X+Y)$

ОТВЕТ: 0,75