Лекция 4

Технический прогресс в модели Солоу

План лекции

1. Экзогенный технический прогресс. 3 типа нейтрального технического прогресса
2. Решение модели с трудоинтенсивным техническим прогрессом
3. Иллюстрации к динамике в моделях с другими типами нейтрального технического прогресса
4. Конвергенция и модель Солоу
5. Эмпирическая проверка модели Солоу.

- Обсуждение модели Солоу на минувшей лекции мы завершили выводом о том, что основная часть роста производительности труда не может быть объяснена накоплением капитала. В чем здесь дело? Можно предложить два объяснения:
- 1) не учитывается какой-то производственный фактор, который, по-видимому, может накапливаться в значительных масштабах;
- 2) со временем изменяется сама производственная функция.

Технический прогресс (1)

- Аргумент об упущенном факторе повесим как ружье на стенку, а вместо этого займемся изменениями производственной функции.
- Из микроэкономики мы помним производственная функция определяется имеющимися технологиями. Это означает, что изменение производственной функции осуществляется за счет технологических изменений. Эти изменения, в общем, однонаправлены. Как правило, нам остаются доступны все более старые технологии; хотя исключения из этого правила хорошо известны, например, греческий огонь. Поэтому изменения технологии принято называть техническим прогрессом. Который лишь изредка оборачивается регрессом.

Технический прогресс (2)

- Технологические изменения могут касаться производительности труда и капитала в неодинаковой степени. Поэтому выделяют технический прогресс:
  - Капиталосберегающий;
  - Трудосберегающий;
  - Нейтральный.
- Проблема, однако, в том, что существует ТРИ основных концепции нейтральности технического прогресса (и, соответственно, три понимания капитало- и трудо-сберегающего прогресса.
- Еще несколько концепций распространены в меньшей степени (См. Sato R., Beckman M.J. Neutral Inventions and Production Functions // Review of Economic Studies, 1968, vol. 35, no 1, pp. 57-66 и резюме этой лекции)

Нейтральный технический прогресс по Хиксу (1)

Hicks J.R. Theory of wages. 1932.

Определение: технический прогресс является нейтральным по Хиксу, если соотношение предельных продуктов (иными словами, предельная норма технической замены) факторов является независимым от технического прогресса.

В каком случае технический прогресс будет нейтральным по Хиксу?

Вывод приведен по:

Sato, Beckmann, Op. cit.

Нейтральный технический прогресс по Хиксу (2)

Пусть A(t) является показателем развития технологии, и в экономике наблюдается единичная отдача от масштаба. Тогда производственную функцию можно будет записать в интенсивной форме

$$y = y(A, k)$$

Определим отношение предельных продуктов как

$$R(k,t) = r(k,t) / w(k,t)$$

Тогда нейтральность по Хиксу подразумевает

$$R(k,t) = \overline{R}(k) \quad \text{и, значит,}$$

$$\partial R(k,t) / \partial t = 0.$$

Нейтральный технический прогресс по Хиксу (3)

Поскольку $\bar{R}(k) = \dfrac{y - ky'_k}{y'_k} = \dfrac{y}{y'_k} - k,$

$$\left(\ln y(k,t)\right)' = \frac{y'_k}{y} = \frac{1}{\bar{R}(k) + k}.$$

Интегрируем по t *и* k.

$$\ln y(k,t) - \ln A(t) = \int \frac{\partial k}{\bar{R}(k) + k},$$

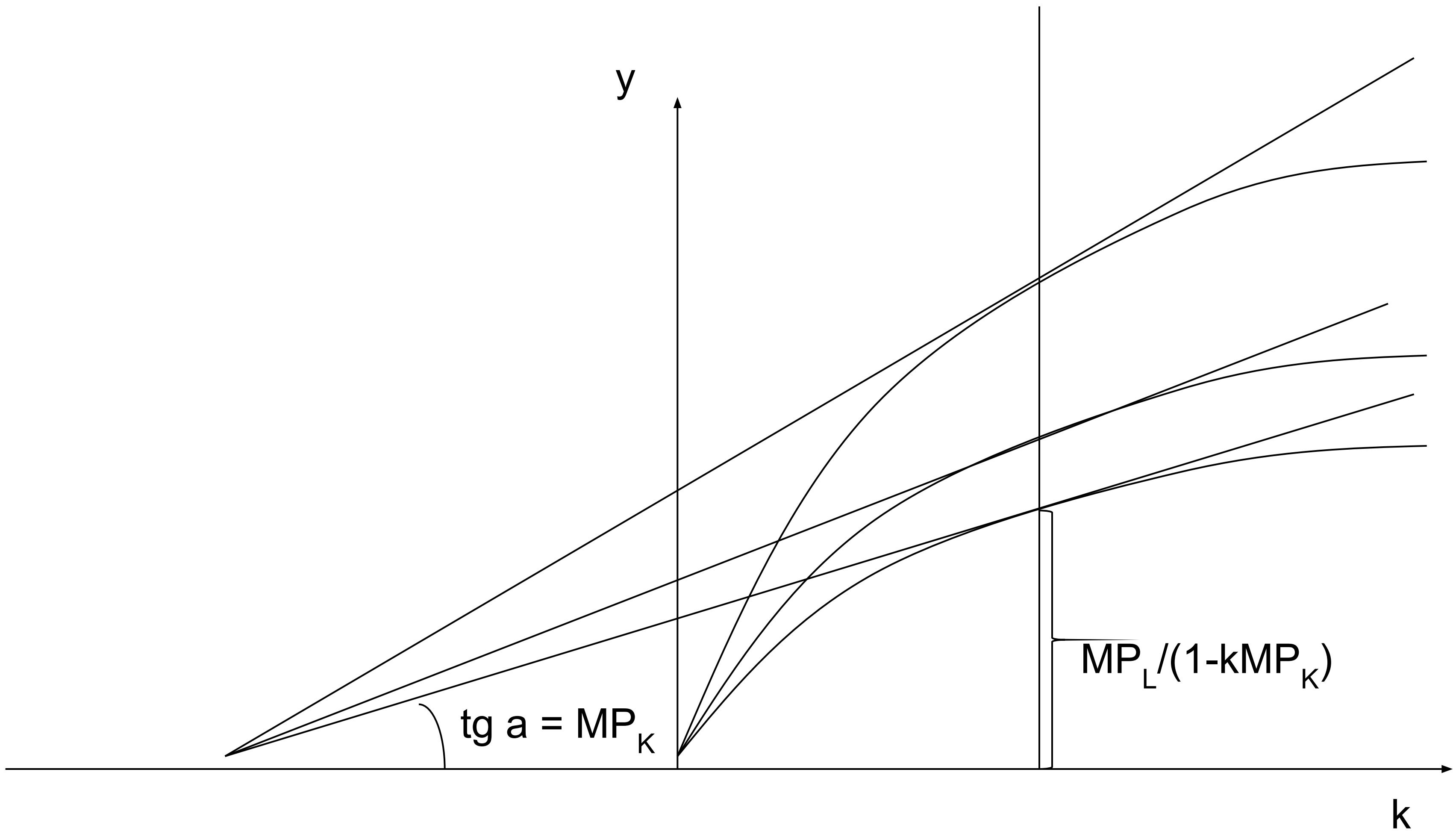
где $A(t)$ – *константа, возникающая при интегрировании, отражающая уровень технологии.*

Обозначим $y(k) = \exp\left[\int \dfrac{\partial k}{\bar{R}(k) + k}\right],$ *тогда*

$$y(k,t) = A(t)\,y(k).$$

Нейтральный технический прогресс по Хиксу (4)

ТГЛ, с.536



Нейтральный технический прогресс по Харроду (1)

Харрод Р. К теории экономической динамики. 1959, 1997 и др. [Harrod R. Towards a Dynamics Economics, 1942]

Определение: технический прогресс является нейтральным по Харроду, если предельный продукт капитала остается неизменным при постоянном уровне капиталоемкости выпуска..

В каком случае технический прогресс будет нейтральным по Харроду?

Теорема Джоан Робинсон о нейтральности инноваций:

Технические инновации, отражаемые производственной функцией $F(K,L,t)$, являются нейтральными по Харроду тогда и только тогда, когда производственная функция принимает вид $F(K,L,t) = G(K,A(t)L)$).

Доказательство приведено по Uzawa H. Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium // Review of Economic Studies, 1961, vol. 28, no 2, pp. 119-120.

Нейтральный технический прогресс по Харроду (2)

Пусть A(t) является показателем развития технологии, и в экономике наблюдается единичная отдача от масштаба. Тогда производственную функцию можно будет записать в интенсивной форме

$$y = y(A,k)$$

Поскольку $y_k < 0, y_{kk} < 0$ *производственную функцию*

можно представить в виде

$$y = \varphi(x,t), \quad \text{где} \quad x = k/y$$

Тогда

$$dy = \varphi_x dx;$$

$$dk = xdy + ydx.$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{\varphi_x dx}{x\varphi_x dx + \varphi dx}$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{\varphi_x}{x\varphi_x + \varphi}$$

Нейтральный технический прогресс по Харроду (3)

Тогда нейтральность по Харроду подразумевает,

что $\partial y / \partial k$ *не зависит от технического прогресса*:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \overline{C}(x),$$

$$\partial C(x,t) / \partial t = 0.$$

$$\frac{x\varphi_x + \varphi}{\varphi_x} = \frac{1}{\overline{C}(x)}$$

$$x + \frac{\varphi}{\varphi_x} = \frac{1}{\overline{C}(x)}$$

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{1}{1/\overline{C}(x) - x}$$

Теперь мы попадаем в уже знакомую ситуацию с той разницей,

что функция у нас не капиталовооруженности, а капиталоемкости

Нейтральный технический прогресс по Харроду (4)

$$\left(\ln \varphi(x,t)\right)' = \frac{\varphi_k}{\varphi} = \frac{1}{1/\overline{C}(x) - x}.$$

Интегрируем по t *и* x:

$$\ln \varphi(x,t) - \ln A(t) = \int \frac{\partial x}{1/\overline{C}(x) - x},$$

где $A(t)$ – *константа, возникающая при интегрировании, отражающая уровень технологии.*

Обозначим $\psi(x) = \exp\left[\int \frac{\partial x}{1/\overline{C}(x) - x}\right]$, *тогда*

$$\varphi(x,t) = A(t)\psi(x).$$

Нейтральный технический прогресс по Харроду (5)

$\psi(x)$ *монотонно возрастающая.*

В самом деле, логарифмирование является монотонным преобразованием.

$$\ln(\psi(x))'_x = \frac{1}{1/\overline{C}(x) - x}.$$

$$\frac{1}{1/\overline{C}(x) - x} > 0, \quad \text{при} \quad \frac{1}{\overline{C}(x)x} > 1.$$

$$\frac{x\varphi_x + \varphi}{x\varphi_x} = 1 + \frac{\varphi}{x\varphi_x}.$$

Однако, $\varphi = y(x,t) > 0; x = k/y > 0$

Остается определить знак φ_x.

$$\varphi_x = \frac{\partial y}{\partial(k/y)} = \frac{y}{\frac{\partial k}{\partial y} - \frac{k}{y}} = \frac{y}{1/MP_K - 1/AP_K}.$$

Условия Инады предполагают $MP_K < AP_K$ *и, значит,* $\varphi_x > 0$

Нейтральный технический прогресс по Харроду (6)

Поскольку $\psi(x)$ *монотонно возрастающая,*

мы можем построить обратную ей функцию ξ:

$$x = \xi\left[y / A(t)\right]$$

Поскольку $x = k / y$, *домножив на* $y / A(t)$, *получим*

$$\frac{k}{A(t)} = \frac{y}{A(t)}\xi\left[y / A(t)\right]$$

Запишем это:

$$\frac{y}{A(t)} = g\left[k / A(t)\right]$$

$y = A(t)g\left[k / A(t)\right]$ – *наша производственная функция в интенсивной форме*

Пусть $G(K, L) = g(k)L$.

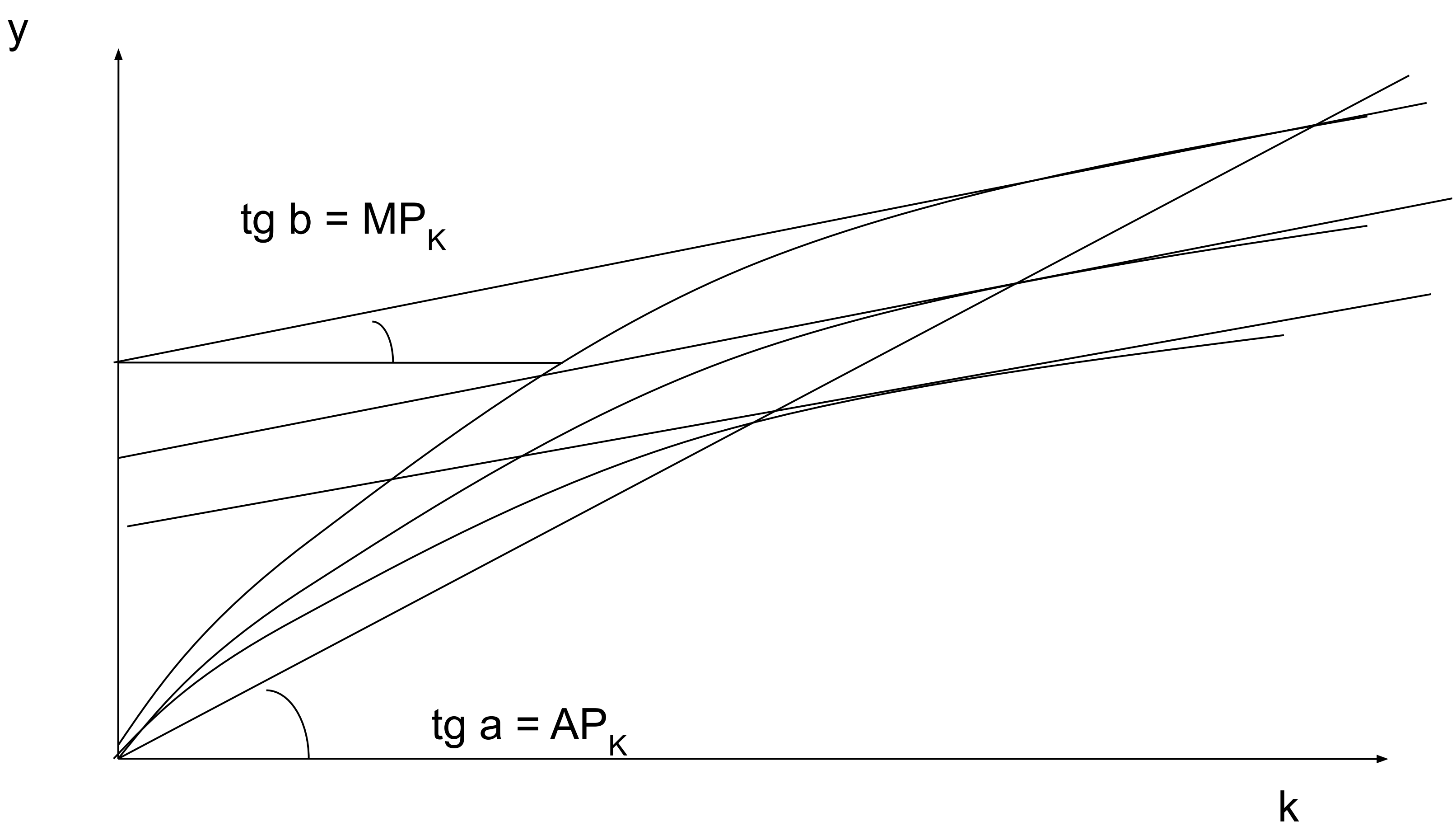
Тогда, учитывая постоянную отдачу от масштаба, получаем:

$$Y = G(K, A(t)L)$$

Ч.Т.Д.

Нейтральный технический прогресс по Харроду (7)

ТГЛ, с. 537



Нейтральный технический прогресс по Солоу (1)

Solow R. Thechnical Progress, Capital Formation, and Economic Growth // Amercan Economic Review, 1962, Proceedings, pp. 76-86.

Определение: технический прогресс является нейтральным по Солоу, если предельный продукт труда остается неизменным при сохранении средней производительности труда.

Легко видно, что Солоу предлагает в точности то же самое, что и Харрод, только для капитала, а не для труда. Поэтому-то

$F(K,L,t) = G(A(t)K, L))$.

Нейтральный технический прогресс по Солоу (2)

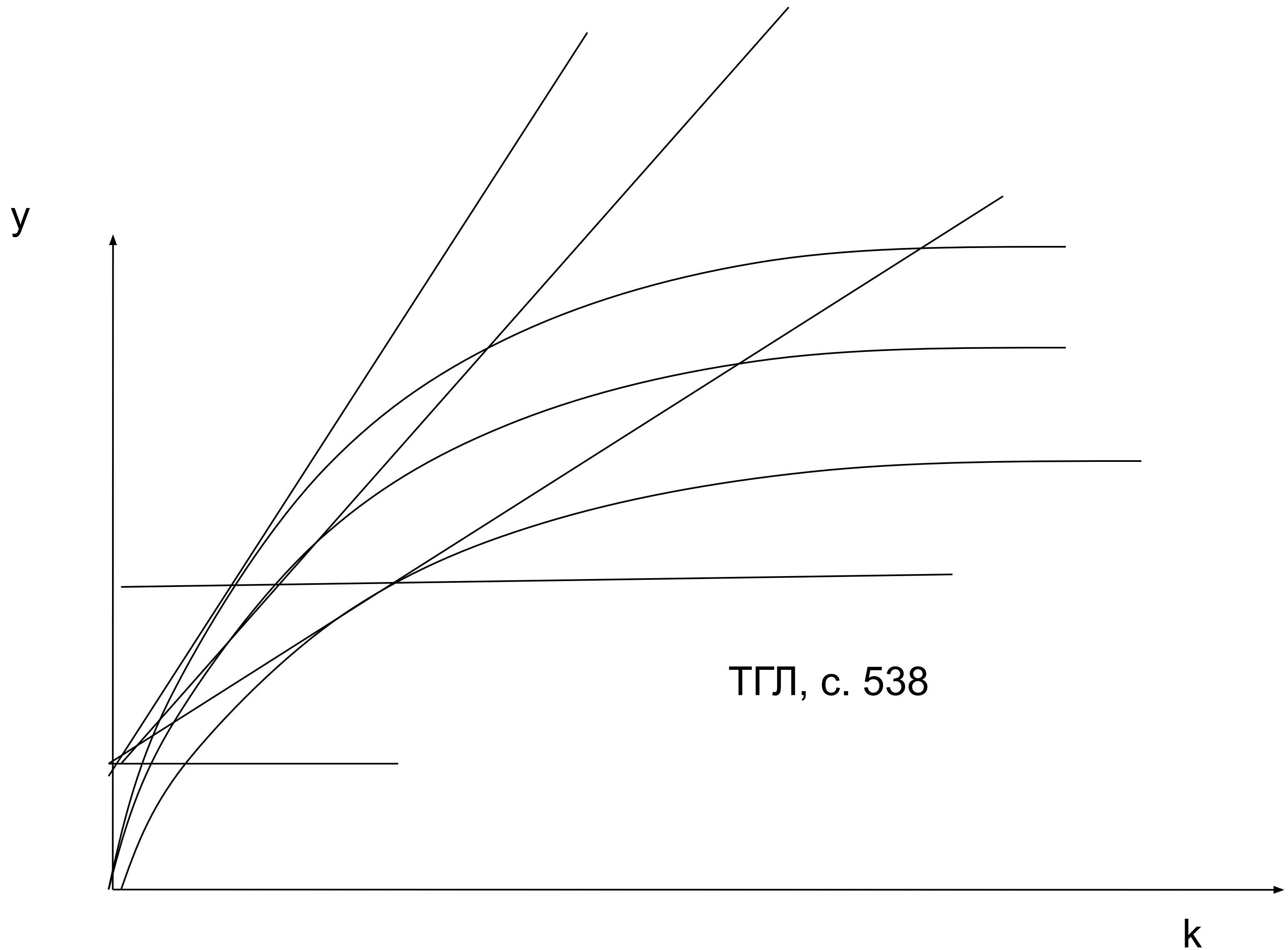


Таблица типов нейтрального технического прогресса

Sato & Beckmann (1968) привели классификацию видов нейтральных техпрогрессов.

SUMMARY OF CLASSIFICATIONS

is invariant with respect to		1 L/K	2 Y/K	3 Y/L	4 R	5 r	6 w	7 β
1	$\frac{L}{K}$							
2	$\frac{Y}{K}$	No						
3	$\frac{Y}{L}$	technical	progress					
4	R	I Hicks	VI	VII				
5	r	IX	II Harrod	V	XV			
6	w	VIII	IV	III Solow	No technical	progress		
7	β	I	II	III	I	II	III	
8	σ	X	XI	XII	XIII	not integrable by quadrature		Factor Augmenting XIV

Три вида нейтральности – Резюме (1)

Нейтральность по…	Общая форма	Примеры
Хиксу	$Y=A(t)F(K,L)$	$Y=e^{\lambda t}(K^{a}L^{1-a})$ $Y=e^{\lambda t}(K^{1/2}L^{1/2})^{2}$
Харроду	$Y=G(K,A(t)L)$	$Y= (K^{a(}e^{\mu t}L)^{1-a})$ $Y= (K^{\theta(}e^{\mu t}L)^{\theta})^{1/ \theta}$
Солоу	$Y=G(A(t)K,L)$	$Y= ((e^{\nu t}K)^{a}L)^{1-a})$

Назад к модели Солоу

- Сначала мы обсудим поведение модели Солоу в предположении о том, что в экономике наличествует нейтральный по Харроду технический прогресс.
- Итак, производственная функция выглядит следующим образом: $Y = G(K, e^{gt}L)$. При этом скорость населения растет в экономике n: $L(t)=L(0)\ e^{nt}$
- Совершим следующий трюк: будем учитывать число рабочих не в реальных, а в «эффективных рабочих»
- Например, в экономике работало 5 рабочих. В результате технического прогресса их производительность выросла на 20%. Новых рабочих не появилось. Тогда будем считать, что эффективных рабочих стало 6 (эти пять работают за шестерых).

Назад к модели Солоу (2)

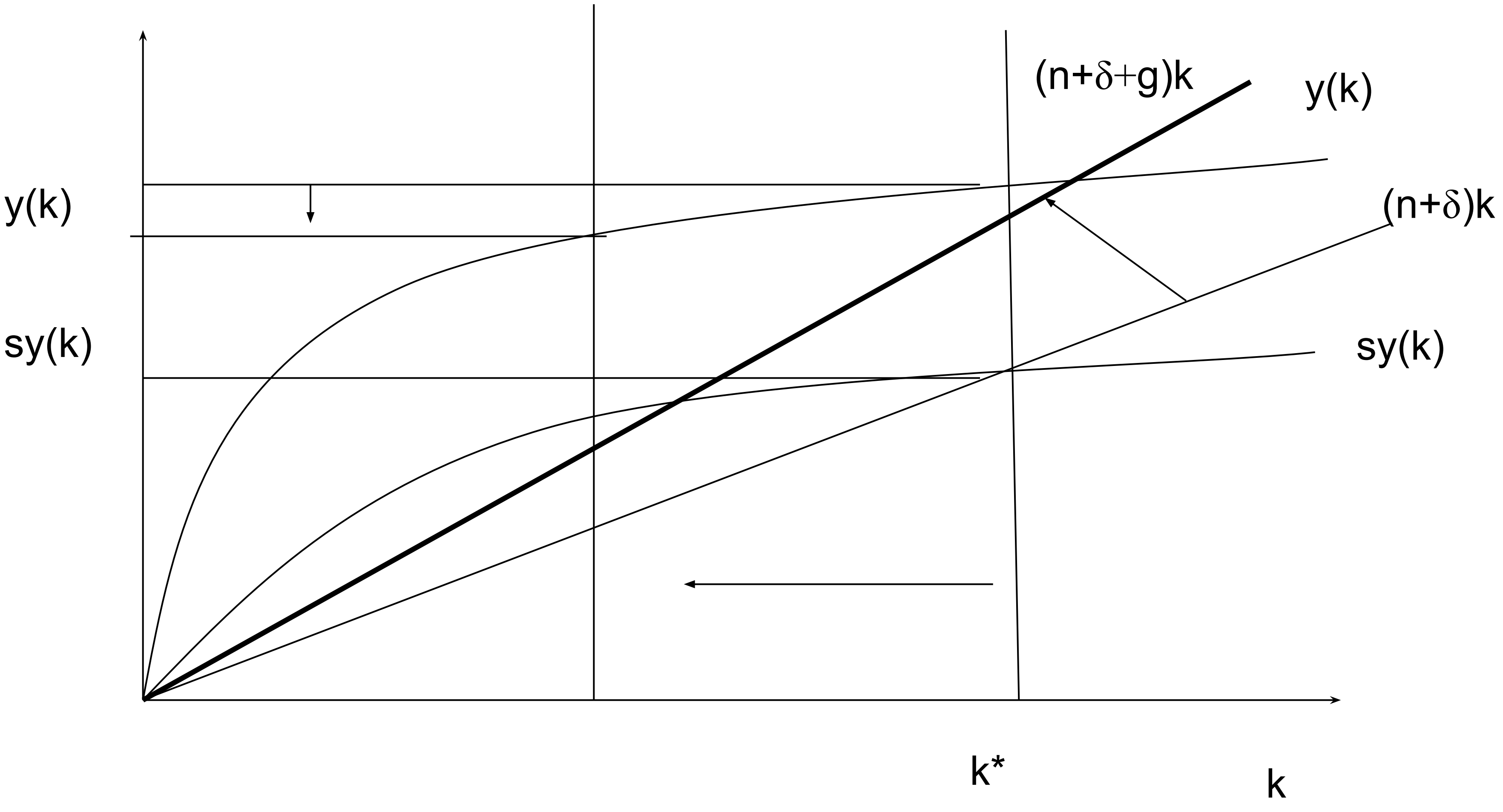
Тогда $N(t) = L(0)e^{nt}e^{gt}$,

а $\hat{N} = n + g$.

Получается,что технический прогресс выражается

как бы ускорением темпов роста численности таселения

Ускорение технического прогресса (по Харроду) снижает капиталовооруженность, выпуск и объем сбережений в расчете на 1 эффективного рабочего



Модель Солоу с техническим прогрессом (1)

- Однако с точки зрения настоящего рабочего стационарное состояние характеризуется постоянным ростом капиталовооруженности, выпуска и заработной платы. То есть в данном случае стационарное состояние подразумевает постоянный рост.

- Но каковы характеристики этого роста?

Модель Солоу с техническим прогрессом (2)

$$k^* = \frac{K}{N} = \frac{sy(k)}{n+\delta+g};$$

$$\hat{k}^* = \dot{k}^* / k^* = 0;$$

$$\hat{N} = n + g;$$

$$\hat{K} = \hat{k}^* + \hat{N} = n + g$$

$$K \hat{/} L = n + g - n = g.$$

- Как мы помним, капиталовооруженность рассчитывалась на одного эффективного рабочего
- Поэтому темпы роста капиталовооруженности на одного настоящего рабочего будут равны g.