

# Закон сохранения импульса

Сумма импульсов **MT**, образующих систему, называется импульсом системы  $p$ :

$$p = \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N m_i v_i$$

**Полный импульс замкнутой системы не меняется с течением времени ни по величине, ни по направлению:**

$$p = \sum_i p_i = \text{const}$$

- Чтобы изменить полный импульс нам надо, например, при постоянной массе изменить скорость – т.е. создать ускорение. А для это нужна внешняя сила (или не нулевая сумма сил)!
- Данный закон сохранения импульса обусловлен **однородностью пространства**, то есть одинаковостью свойств пространства во всех точках

# Изменение импульса

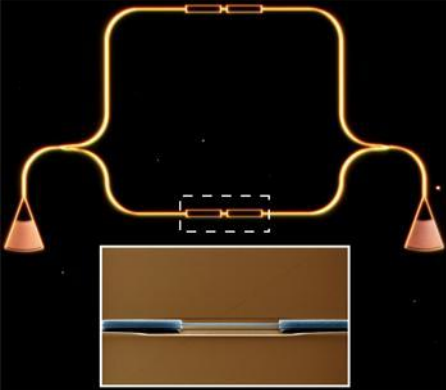
Что же может изменить импульс системы? **Только внешние силы**, потому что **сумма внутренних сил**, действующих на тела системы, **всегда равна нулю** из-за действия третьего закона Ньютона, потому что внутренние силы всегда возникают попарно.

$$\frac{d}{dt} p = \sum_{i=1}^N F_i$$

Производная по времени от суммарного импульса системы равна сумме внешних сил, действующих на тела системы. **Т.е. система должна быть незамкнутой!** Выражается или в виде изменения скорости или массы системы (должен быть обмен энергией или веществом).

# Факультативно: Есть ли импульс у фотона?

Мы уже знаем – есть . То, что световое давление существует, впервые предположил Иоганн Кеплер в XVII веке, наблюдая закрученные хвосты космических комет. В позапрошлом веке наличие силы светового давления было предсказано теорией, а теперь как мы уже говорили показано, что фотоны, отражаясь от поверхности, придают ей механический импульс. Таким образом на стыке нанофотоники и наномеханики появилась возможность преобразование энергии световых волн в механическую энергию



Оптический колебательный контур . Внизу  
увеличенное изображение волновода-  
резонатора

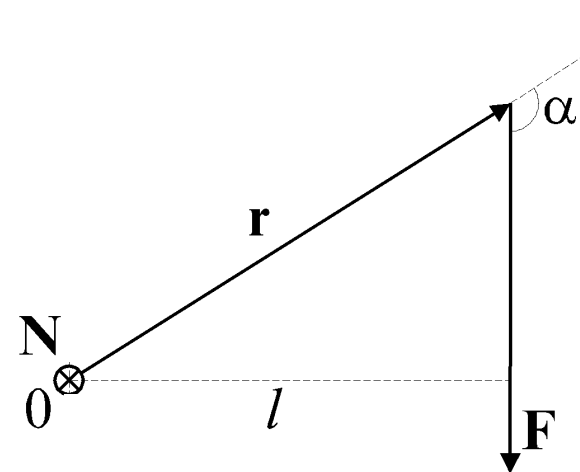
## Факультативно: Лазерный наноманипулятор

Как мы знаем с **одной стороны, волны видимого света проявляют свойства частиц (фотонов)** . Но когда размер отражающей поверхности становится меньше длины оптической волны, **волна возбуждает на поверхности электрический диполь, который может взаимодействовать с электромагнитным полем**. Сила взаимодействия определяется градиентом и интенсивностью волны. На этом принципе основан лазерного пинцета. Например, в лазерном луче градиент интенсивности излучения может нарастать от краев луча, к его центру и перемещать наночастицу

# Применимость закона сохранения импульса

- $p$  остается постоянным **и для незамкнутой системы**, если внешние силы или их проекций на выделенную ось в сумме дают все время нуль.
- Если **сумма проекций** внешних сил на какое-либо направление (например, на ось  $x$ ) равна нулю в любой момент времени, то проекция  $p$  на это направление остается постоянной, хотя проекции импульса на другие направления могут при этом изменяться.
- **При кратковременном** воздействии внешних сил, на системы с большой величиной импульса,  $\Delta p$  может быть столь малым (например, если большая масса то вследствие большой инертности), что им можно пренебречь по сравнению с уже имеющимся у системы импульсом  $p$ . В этом случае могут сохраняться все три проекции импульса системы, как и для замкнутой системы.

# Моментом силы



**Моментом силы  $N$**  относительно точки  $O$  называется векторное произведение радиус-вектора направленного из точки  $O$  в точку приложения силы :

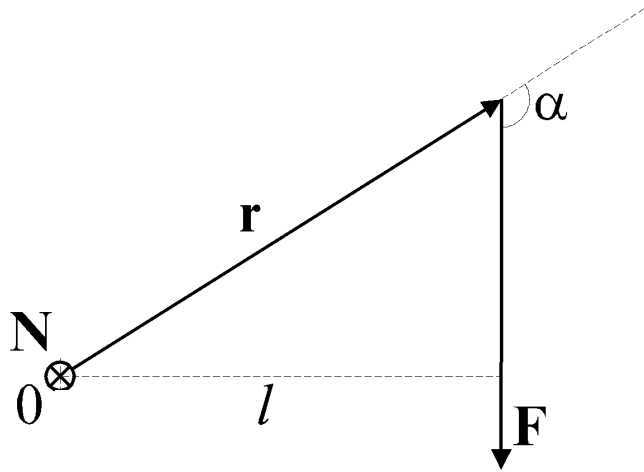
$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$$

Величина вектора определяется, как и для любого векторного произведения, выражением:

$$N = rF \sin \alpha$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$

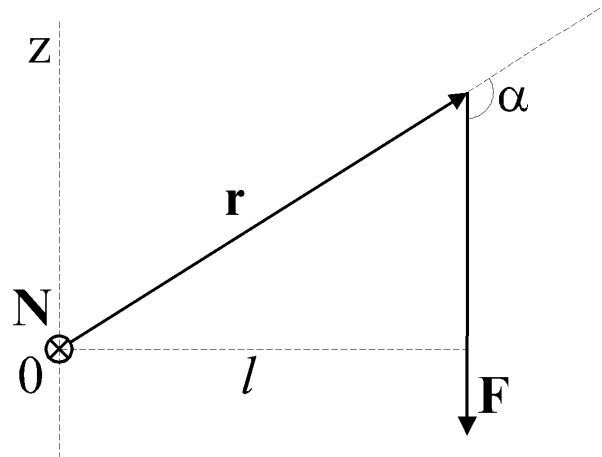
# Направление момента силы



Направление вектора  $N$  определяется также в соответствии с определением векторного произведения, то есть **по правилу правого буравчика**:

расположив рукоятку буравчика (штопора) вдоль направления первого вектора в произведении (в данном случае вдоль  $r$ ) вращаем ее по кратчайшему направлению до совмещения с направлением второго вектора ( $F$ ). Куда при этом будет поступательно двигаться правый буравчик (штопор), туда и направляем вектор .

# Момент силы относительно оси



Пусть, векторы  $r$  и  $F$  лежат в плоскости доски. Тогда вектор  $N \perp$  к поверхности доски и направлен за нее, то есть входит в доску, что изображено знаком  $\otimes$ . **Длина  $l$**  перпендикуляра из точки на прямую вдоль действия силы называется **плечом силы** относительно точки  $l = r \sin \alpha$

Проекция вектора  $N$  на некоторую ось  $z$ , проходящую через точку  $O$ , относительно которой определен  $N$ , называется **моментом силы относительно этой оси**:

$$N_z = [rF]_z$$

при  $\mathbf{z} \perp \mathbf{N}$  проекция на эту ось  $N_z = 0$



# Момент импульса

Для **МТ**, **моментом импульса** относительно точки **O** называется вектор

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$$

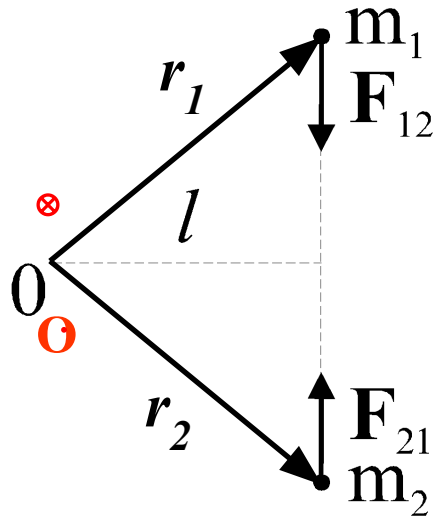
**Моментом импульса МТ** относительно **оси** называется проекция вектора  $\mathbf{L}$  на эту ось:

$$L_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_z$$

$\mathbf{L}$  системы материальных точек относительно какой-либо точки (или оси) называется сумма моментов импульсов относительно этой точки (или оси) всех материальных точек системы:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$$

# Изменение момента импульса



**Момент импульса системы** могут изменить только **моменты внешних сил**. Рассмотрим две точки системы. В следствие 3-м закона Ньютона внутренние силы между ними действуют вдоль одной прямой, поэтому их моменты относительно произвольной точки  $O$  равны по величине и противоположны по направлению.

Моменты внутренних сил попарно уравниваются друг друга и **сумма моментов всех внутренних сил для любой системы частиц (в частности, и для твердого тела) всегда равна нулю.**

## Закон изменения и сохранения момента импульса

- Производная по времени момента импульса системы (относительно какой-либо точки или оси) равна сумме моментов (относительно той же точки или оси) всех внешних сил, действующих на точки системы.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i N_{\text{внеш}}$$

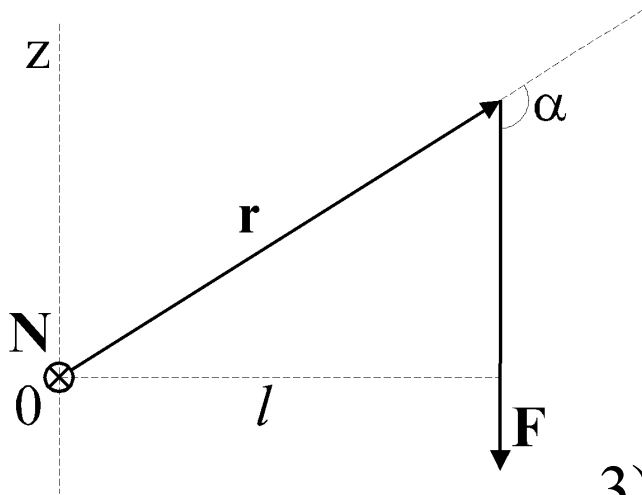
**Это и есть закон изменения момента импульса или уравнение моментов.** В каждый  $N_{\text{ивнеш}}$  входит произведение трех величин  $r_i$ ,  $F_{\text{ивнеш}}$  и  $\sin \alpha_I$ . Если одна из них  $=0$  то данный член вклада не дает. Один из возможных вариантов, если все  $F_{\text{ивнеш}} = 0$  т. е. система замкнута, то  $dL/dt = 0$  и  **$L = \text{const}$**

- Закон сохранения момента импульса: **если сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульс системы не изменяется с течением времени** (верно как относительно точки и оси).

# Применимость закона сохранения момента импульса

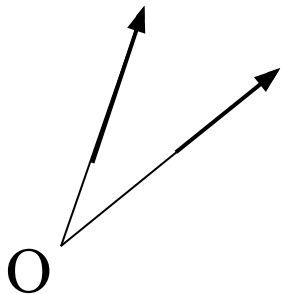
**Закон сохранения момента импульса может работать и для незамкнутых систем** в следующих случаях:

1) Если сумма моментов внешних сил равна нулю.

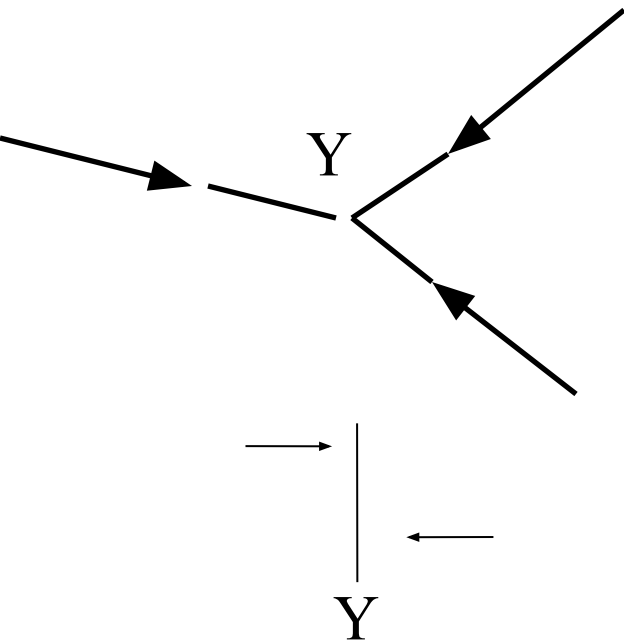


2) Если все внешние силы направлены вдоль одной оси, то их моменты относительно любой оси, имеющей то же направление, равны нулю. Поэтому сохраняется момент импульса системы относительно таких осей (ось  $z$  на рис.)

3) Если все внешние силы являются центральными с общим центром, то моменты этих сил относительно центра  $O$  равны нулю ( $\alpha=0$  и  $\sin\alpha=0$ ). Поэтому сохраняется момент импульса системы относительно этого центра  $O$ .



## Применимость закона сохранения момента импульса



4) Если все внешние силы направлены по прямым, проходящим через некоторую ось  $Y$ , то момент импульса системы относительно этой оси будет постоянным ( $\alpha=180$  и  $\sin\alpha=0$ ).

**Закон сохранения момента импульса обусловлен изотропностью пространства, что означает одинаковость свойств пространства по всем направлениям.**

# Центр масс

**Центром масс (или центром инерции)** системы называется точка, положение которой задается радиус-вектором:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{r}_i$$

здесь  $m$  - суммарная масса системы:  $m = \sum m_i$ ,  $m_i$  - масса  $i$ -й частицы,  $\mathbf{r}_i$  - радиус-вектор, задающий положение  $i$ -й частицы. В твердом теле надо интегрировать по объему. Распределение масс может быть неоднородным. **В Земле как? Человек? Пуля?**

Декартовы координаты центра масс получаются проецированием вектора  $\mathbf{r}_c$  на координатные оси:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i x_i, y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i y_i, z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i z_i.$$

# Движение центра масс

Дифференцируя  $\mathbf{r}_c$  по времени находим скорость центра масс:

$$\mathbf{v}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

где  $\mathbf{p}$  – импульс системы. Отсюда получаем:  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$

**Уравнение движения центра масс:**

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}_c) = m\dot{\mathbf{v}}_c = m\mathbf{a}_c = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

где  $\mathbf{a}_c$  – ускорение центра масс.

# Закон движения центра масс

Мы получили, что **центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы**, под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к точкам системы.

Коротко говоря, **закон движения центра масс совпадает с законом движения материальной точки массы  $m$**  (всей системы), к которой приложены все **внешние** силы.

Для замкнутой системы  $a_c = 0$ . Это означает, что **центр масс замкнутой системы или покоится, или движется равномерно и прямолинейно**. Внутренние силы ничего не могут с ним сделать.



# Системы отсчета, связанные с Землей

Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной. Значит, в ней **законы Ньютона не выполняются**. Рассмотрим простейшие неинерциальные системы: равноускоренную и равномерно вращающуюся. **Инерциальная система это частный случай неинерциальной при ускорении или угловой скорости равной 0.**

При описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться уравнениями Ньютона, если наряду с силами, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать так называемые **силы инерции**.

# Силы инерции

Пусть в инерциальной системе отсчета тело движется с ускорением  $a_1$ . В неинерциальной системе, которая движется поступательно относительно инерциальной с каким-то ускорением, ускорение тела будет другое  $a_2$ . Пусть  $a_1 - a_2 = a$  (если не поступательно то будет добавочное слагаемое).

По 2-му закону Ньютона  $a_1 = F/m$ , где  $F$  - результирующая всех сил, действующих на тело. Тогда  $a_2 = a_1 - a = F/m - a$ . При  $F = 0$  ускорение тела в неинерциальной системе отсчета равно  $a_2 = -a$ , то есть такое, как если бы на него действовала сила, равная  $-ma$ . Эта сила и называется **силой инерции**:  $F_{ин} = -ma$ .

**Формально ускорение  $a$  есть? значит и сила есть  $F_{ин}$ !**  
она и создает силовое поле действующее в любой точке неинерциальной системы

# Уравнение 2-го закона Ньютона в неинерциальной системе

Как говорилось выше:

$$a_2 = a_1 - a = F/m - a$$

Умножая обе части выражения на  $m$  получаем, что уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе имеет вид:

$$ma_2 = F - ma = F + F_{ин}$$

- Сила инерции определяются не действием на материальную точку других тел, **а свойствами неинерциальной системы** отсчета, а точнее ее ускорением. А раньше мы говорили об инвариантности сил относительно преобразований Галилея!
- Для них нельзя указать тело, со стороны которого они действуют, поэтому **третий закон Ньютона** для сил инерции **не имеет смысла**.
- С другой стороны они действуют аналогично рассмотренному ранее и вызывают ускорение

# Центростремительная сила

При движении по окружности нормальное ускорение точки  $\mathbf{a}_n \perp \mathbf{v}$  и направлено к центру окружности (потому и называется центростремительным) и по модулю равно  $\mathbf{a}_n = v^2/R$ , или через угловую скорость  $\mathbf{a}_n = \omega^2 R$ . Таким образом, при движении **MT** на нее действует **центростремительная сила** равная по модулю:

$$\mathbf{F}_c = m \omega^2 R$$

где  $R$  - радиус окружности.

# Центробежная сила инерции

Если перейти **во вращающуюся со скоростью  $\omega$  систему отсчета**, то в ней **МТ** покоится. Это можно формально объяснить тем, что кроме силы  $F_{\text{ц}}$  на точку действует равная по величине и противоположная по направлению сила, которая называется **центробежной**:

$$F_{\text{цб}} = m \omega^2 R$$

**Центробежная сила инерции  $F_{\text{цб}}$**  возникает во вращающейся системе отсчета **независимо от того, покоится тело в этой системе или движется** относительно нее с какой-то скоростью.

**Отвесы на вращающейся подставке:  $\text{tg}\alpha = \omega^2 R/g$**

# Сила Кориолиса

Если тело массой  $m$  движется с какой-то скоростью  $\mathbf{v}'$  относительно вращающейся системы отсчета (вращающийся диск или Земля), то появляется дополнительная сила, называемая **кориолисовой силой инерции** или просто **силой Кориолиса**  $F_K$ .

$$F_K = 2m[\mathbf{v}' \omega]$$

В таком виде получается чисто формально при замене в нормальном ускорении члена  $\omega R$  на  $\mathbf{v}' + \omega R$ . Т.е. наблюдатель сидя на диске помимо реальной силы  $F$  заметит, что на тело действуют две силы инерции  $F_{цб}$  и  $F_K$  (могут быть направл. в разные стороны)

- В **северном полушарии** у всех рек, текущих по меридиону (причем независимо от того, на север или на юг) подмывается **правый берег** по отношению к направлению течения, а в южном полушарии – левый. Тоже с **правым рельсом**
- **Силы инерции как и силы гравитации пропорциональны массе**
- **Неинерциальная система эквивалентна гравитационному полю.**
- **Этот вывод в физике - принцип эквивалентности.**

# Силы Кориолиса

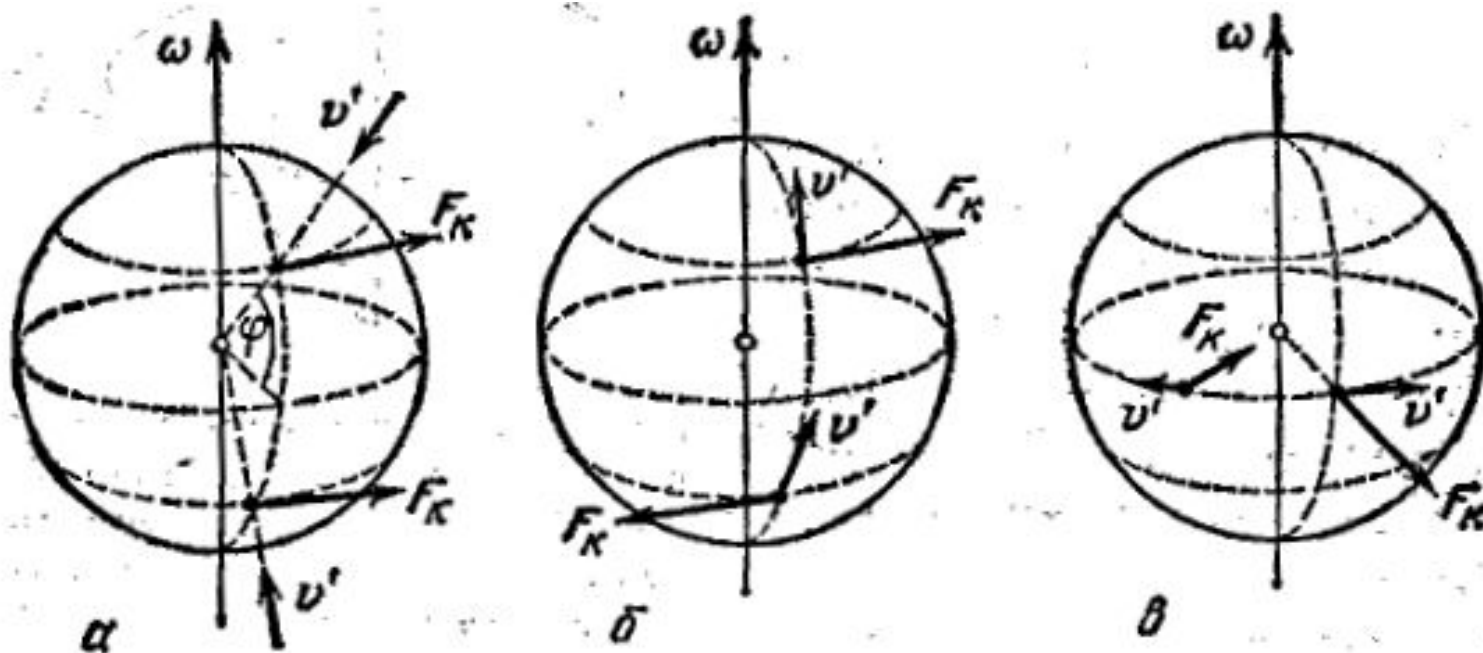


Рис. 38.2. Влияние силы Кориолиса на движение тел вблизи земной поверхности: *a* — свободно падающее тело отклоняется к востоку; *б* — тело, движущееся вдоль меридиана на север, отклоняется к востоку в северном полушарии и к западу в южном полушарии; тело, движущееся на юг, будет отклоняться в противоположную сторону; *в* — тело, движущееся вдоль экватора на восток, поднимается кверху; тело, движущееся на запад, прижимается к Земле

# Эйнштейн и Бэр: от чайнок к руслам рек



В 1926 г. Эйнштейн - движение чайнок в чашке и формирование русел рек. **Угловая скорость вращения,  $a \Rightarrow$  и центробежная сила будут около дна меньше, чем вверху.**

- Разные точки земной поверхности перемещаются с неодинаковой скоростью: максимальная скорость у экватора постепенно уменьшается до нулевой у полюсов. **«Закон Бэра»** (российского академика ): русла рек, вместо того чтобы выбирать себе путь по линии максимального уклона, петляют. Причина этого – вращения Земли и течения реки. Закон Бэра -универсален, т.к применим и к воздушным и морским проливам и течениям.

**Итак русла, рельсы, ветер, облака, просто парашютисты без ветра, дым из труб и вулканов, Гольфстрим, магма, боулинг . Движение магнитных полюсов  $\sim 10$  км в год, что со временем  $\rightarrow$ глобальные процессы во льдах . Сила Кориолиса направлена  $\perp$  скорости тела и применяем КО ВСЕМУ ЧТО ДВИЖЕТСЯ относительно Земли !!!!!**



# Действует ли сила Кориолиса на магму? Ведь масса гигантская!

- **Движение жидкости в земном ядре очень быстро изменяется**, что и, приводит к изменениям магнитного поля планеты, которое создается динамо-машиной в недрах Земли.
- Длительные (10 лет) измерения земного магнитного поля, выполненные геоспутником «СНАМР» и «Oersted» (Эрстед) и наземные наблюдения позволяют предположить, что происходит на глубине 3 тыс. км под земной поверхностью и создать компьютерную модель, которая хорошо описывает это движение. Скачки магнитного поля происходят неожиданно и могут продолжаться несколько месяцев (малый срок по сравнению с временем, когда происходила смена направления магнитного поля Земли в последний раз – около 780 тысяч лет назад) . [http://www.gfz-potsdam.de/portal/-?\\$](http://www.gfz-potsdam.de/portal/-?$)