Пример 1. Решить систему линейных уравнений:

Выразить из 2-го уравнения *x1*

$$\begin{cases} 2\cdot x_2 + 3\cdot x_1 - 1 = 0 \\ x_1 + 4\cdot x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot x_2 + 3\cdot x_1 - 1 = 0 \\ x_1 = \underline{-3 - 4\cdot x_2} \end{cases}$$

Подставить выражение для *x1* в 1-е уравнение

Решить уравнение относительно *x2*

$$2\cdot x_2 + 3(-3 - 4\cdot x_2) - 1 = 0$$

$$2\cdot x_2 - 9 - 12\cdot x_2 - 1 = 0$$

$$-10\cdot x_2 - 10 = 0$$

$$-10\cdot x_2 = 10$$

$$\boxed{x_2 = -1}$$

Подставить значение *x2* во 2-е уравнение и найти значение *x1*

$$\boxed{x_1 = -3 - 4\cdot(-1) = -3 + 4 = 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\cdot x_1 - x_3 - 3\cdot x_2 = 0 \\ 2\cdot x_3 - x_2 + 3\cdot x_1 = 1 \\ x_1 + 4\cdot x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем систему

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 \\ x_2 = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_3 - 1 \\ x_1 = -4\cdot x_2 + x_3 + 2 \end{cases}$$

Подставим x_1 в 1-е уравнение

$\Rightarrow$ $x_3 = 1 - 2\cdot(-4\cdot x_2 + x_3 + 2) - 3\cdot x_2$

$x_3 = 1 + 8\cdot x_2 - 2\cdot x_3 - 4 - 3\cdot x_2$

$3\cdot x_3 = 5\cdot x_2 - 3$

$$\boxed{x_3 = \frac{5}{3}\cdot x_2 - 1}$$

Подставим x_3 в 3-е уравнение

$\Leftarrow$

$$\boxed{x_1 = -4\cdot x_2 + \frac{5}{3}\cdot x_2 - 1 + 2 = \frac{-7}{3}\cdot x_2 + 1}$$

Подставим x_3 и x_1 во 2-е уравнение

$$x_2 = 3\cdot\left(\frac{-7}{3}\cdot x_2 + 1\right) + 2\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot x_2 - 1\right) - 1$$

$$x_2 = -7\cdot x_2 + 3 + \frac{10}{3}\cdot x_2 - 3$$

$$\frac{14}{3}x_2 = 0$$

$$\boxed{x_2 = 0}$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

$$\boxed{x_3 = -1}$$

$$\boxed{\begin{cases} 2\cdot x_2+3\cdot x_1-1=0 \\ x_1+4\cdot x_2=-3 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 3\cdot x_1+2\cdot x_2=1 \\ 1\cdot x_1+4\cdot x_2=-3 \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-2\cdot 1=10}$$

$$\boxed{\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot(-3)=10}$$

$$\boxed{\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-1\cdot 1=-10}$$

$$\boxed{x_1=\frac{10}{10}=1}$$

$$\boxed{x_2=\frac{-10}{10}=-1}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1 \\ 3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 1 \\ 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & +4 & -1 \end{vmatrix} = 14$$

Для нахождения её решения вычисляем определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & +4 & -1 \end{vmatrix} = \\ = (1 + 12 + 4) - \\ -(-2 - 3 + 8) = \\ = 17 - 3 = 14$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ = (-2 + 2 + 6) - \\ -(1 - 3 + 8) = \\ = 6 - 6 = 0$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ = (-4 + 3 + 12) - \\ -(-1 + 18 + 8) = \\ = 11 - 25 = -14$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1$$

Метод Крамера

Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера может быть использован в решении системы стольких линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Если определитель системы **не равен нулю**, то метод Крамера **может** быть использован в решении, если же **равен нулю**, то **не может**. Кроме того, метод Крамера может быть использован в решении систем линейных уравнений, имеющих единственное решение.

$$\begin{cases} 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 - 1 = 0 \\ x_1 + 4 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

Для решения системы методом Крамера необходимо преобразовать уравнения:

1) **Сгруппировать все члены с неизвестными с одной стороны относительно знака =, свободные члены с другой.**
2) **Расположить неизвестные во всех уравнениях в одинаковом порядке.**

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \\ 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$$

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы (главный определитель) и обозначается Δ

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Решение:

1) Произведение коэффициентов на главной диагонали берутся со знаком (+).

2) Произведение коэффициентов на побочной диагонали берутся со знаком (-).

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Найти значения x_1 и x_2 возможно только при условии $\Delta \neq \mathbf{0}$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$$

Определители Δ_{x_1} и Δ_{x_2} получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\boxed{\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2}$$

$$\boxed{\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}}$$

Формулы Крамера для нахождения неизвестных:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}} \qquad \boxed{x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 - 1 = 0 \\ x_1 + 4 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \\ 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -10$$

$$x_1 = \frac{10}{10} = 1$$

$$x_2 = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 - 1 = 0 \\ x_1 + 4 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

$$x_1 + 4 \cdot x_2 = -3$$

$$2 \cdot x_2 + 3(-3 - 4 \cdot x_2) - 1 = 0$$

$$2 \cdot x_2 - 9 - 12 \cdot x_2 - 1 = 0$$

$$-10 \cdot x_2 - 10 = 0$$

$$-10 \cdot x_2 = 10$$

$$x_2 = -1$$

$$x_1 = -3 - 4 \cdot (-1) =$$
$$= -3 + 4 = 1$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \\ 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -10$$

$$x_1 = \frac{10}{10} = 1 \qquad x_2 = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Эту формулу можно легко запомнить с помощью правила треугольников, которое иллюстрируется представленными ниже рисунками.

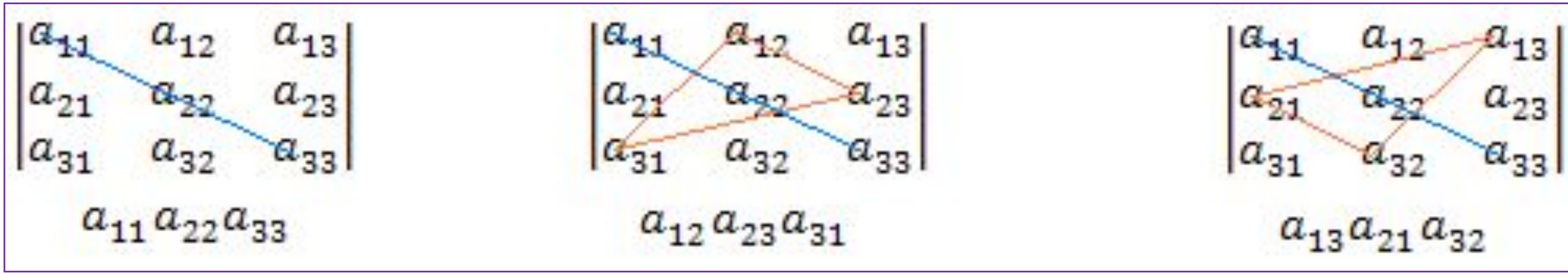


Рис. 1. Произведения элементов, расположенных на главной диагонали матрицы или в вершинах треугольников, основания которых параллельны этой диагонали, берутся со своими

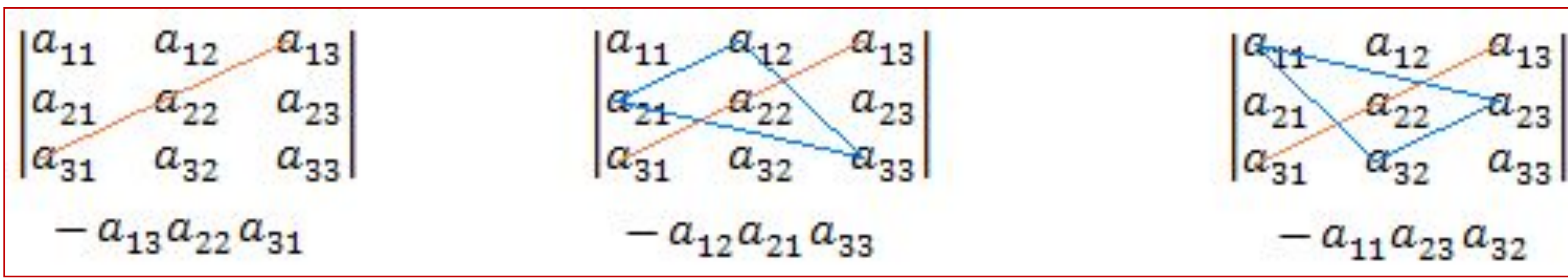


Рис. 2. Произведения элементов, расположенных на побочной диагонали матрицы или в вершинах треугольников, основания которых параллельны этой диагонали, берутся с противоположными знаками.

$$\begin{cases} 1 - 2\cdot x_1 - x_3 - 3\cdot x_2 = 0 \\ 2\cdot x_3 - x_2 + 3\cdot x_1 = 1 \\ x_1 + 4\cdot x_2 - x_3 \; - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 1 \\ 3\cdot x_1 - 1\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 1 \\ 1\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 1\cdot x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & +4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= [2\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 1] -$$

$$- [1\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 4\cdot 2] =$$

$$= 2+6+12+1+9-16=14 \neq \mathbf{0}$$

Следовательно, система является определённой и имеет решение.

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1 \\ 3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 1 \\ 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = 14$$

Для нахождения её решения вычисляем определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & +4 & -1 \end{vmatrix} = \\ = (1 + 12 + 4) - \\ -(-2 - 3 + 8) = \\ = 17 - 3 = 14$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ = (-2 + 2 + 6) - \\ -(1 - 3 + 8) = \\ = 6 - 6 = 0$$

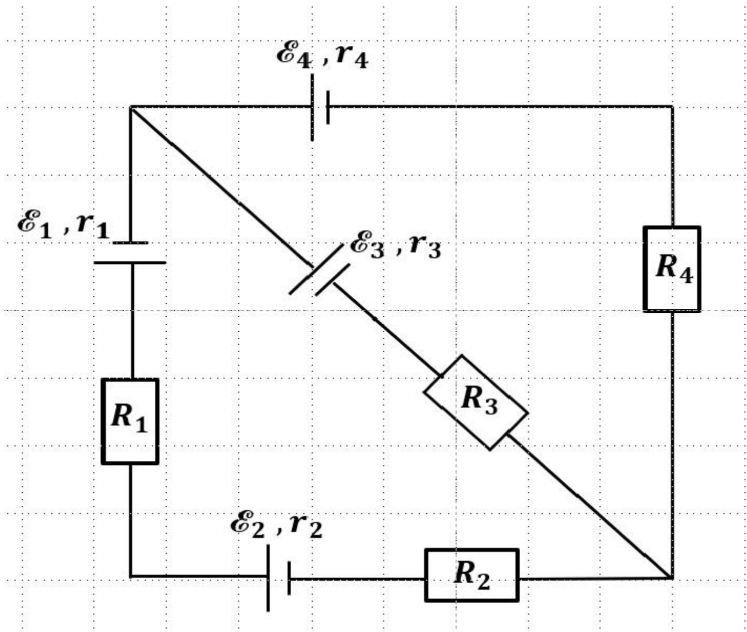
$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ = (-4 + 3 + 12) - \\ -(-1 + 18 + 8) = \\ = 11 - 25 = -14$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1$$



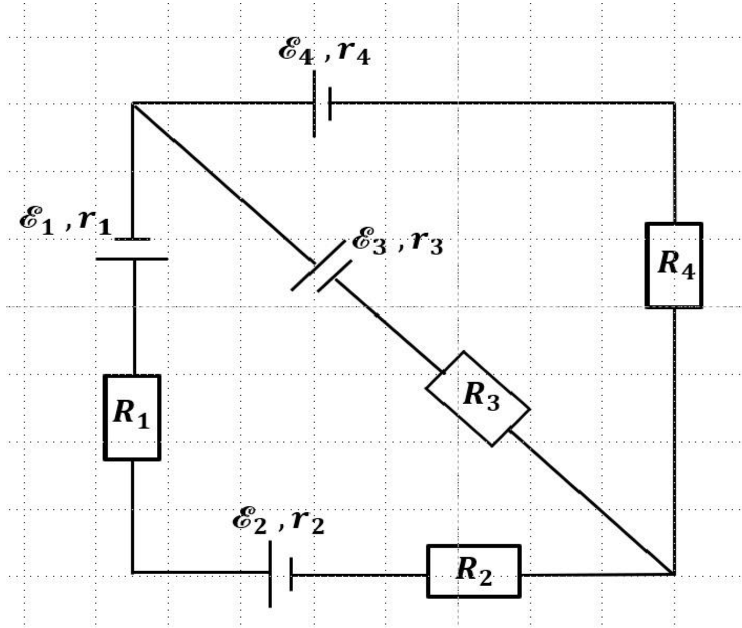
$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_4 = 6$ В $\quad r_1 = r_4 = 1$ Ом

$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 12$ В $\quad r_2 = r_3 = 2$ Ом

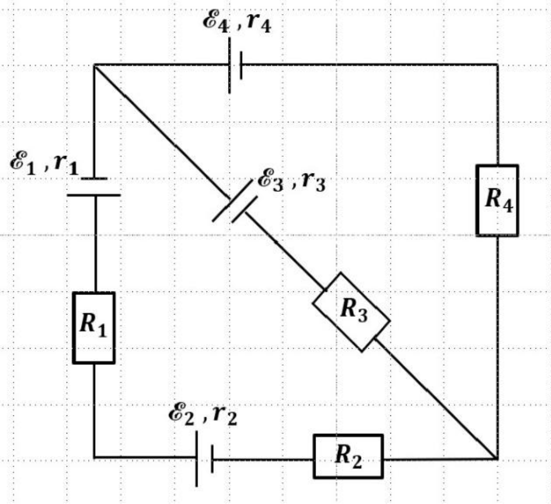
$R_1 = R_4 = 3$ Ом

$R_2 = R_3 = 5$ Ом

I_1, I_2, I_3, I_4 – ?



1. Узел – точка разветвлённой цепи, в которой сходятся не менее трёх проводников.
2. В узлах не может происходить накопление зарядов или разрыв потока упорядоченно движущихся частиц.
3. Направления токов относительно узла выбираем произвольно.
4. Направления обхода замкнутых контуров выбираем произвольно.



Правила Кирхгофа

1) *Первое правило Кирхгофа* относится к узлам.

- **Алгебраическая сумма сил токов для каждого узла равна нулю.**

$$\sum_{i=0}^{n} I_i = 0$$

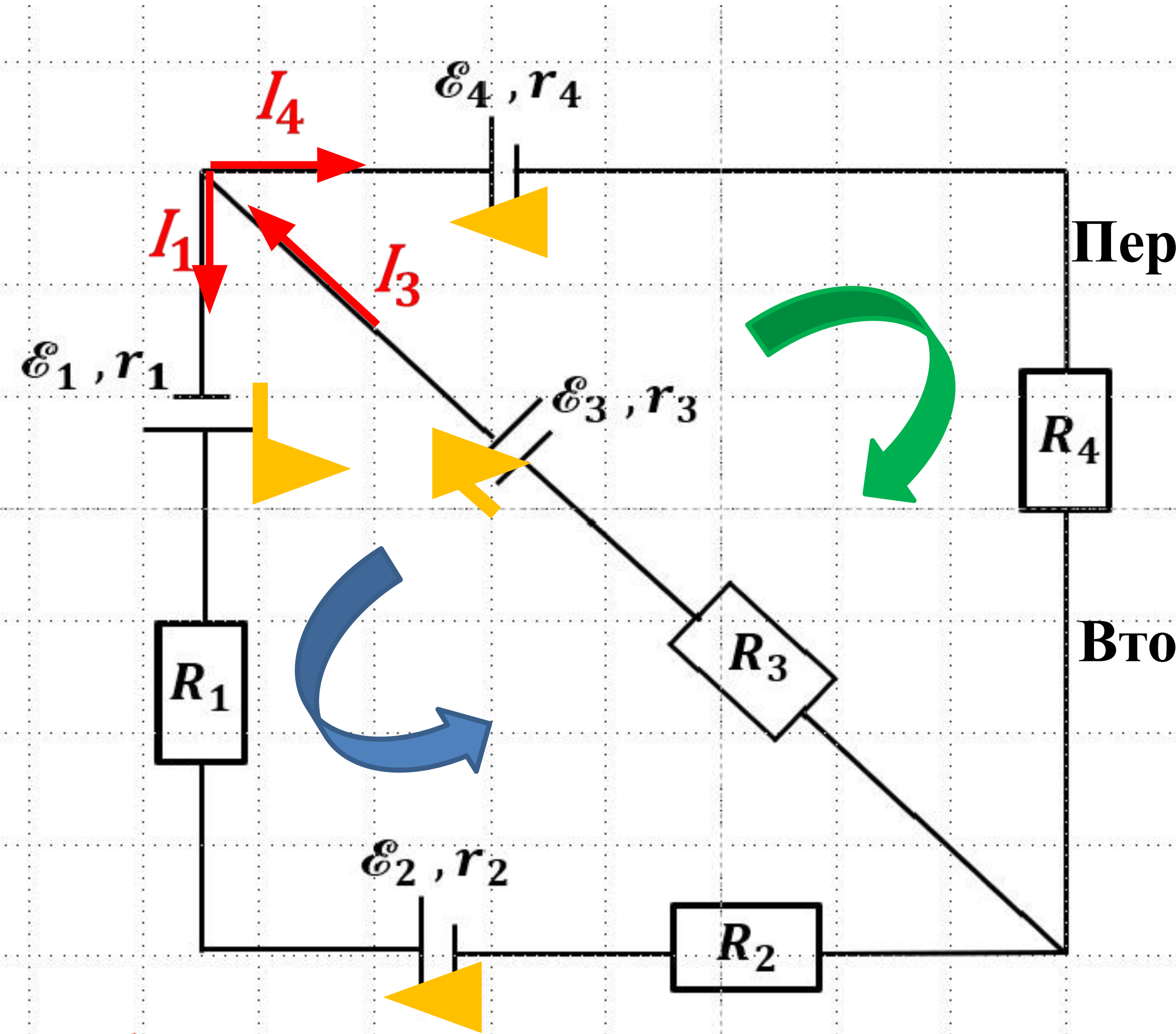
Если ток втекает в узел, то силу тока считают положительной, если вытекает из узла, то отрицательной.

2) *Второе правило Кирхгофа* относится к отдельным замкнутым контурам цепи.

- **Алгебраическая сумма ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме произведений сил токов и сопротивлений каждого из участков этого контура.**

$$\sum_{i=0}^{n} \mathscr{E}_i = \sum_{i=0}^{n} I_i \cdot R(r)_i$$

- ✔ Если на данном участке источник тока создаёт ток, совпадающий по направлению с выбранным направлением обхода контура, то ЭДС считается положительной, в противном случае – отрицательной.
- ✔ Если произвольно выбранное направление тока совпадает с направлением обхода контура, то силу тока считают положительной, в противном случае – отрицательной.



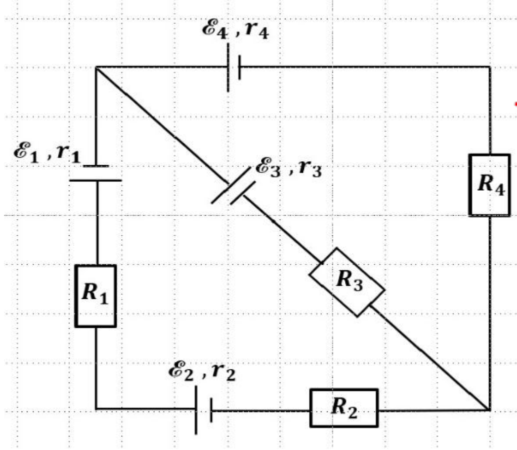
Первое правило Кирхгофа (1 уравнение)

$$\sum_{i=0}^{n} I_i = 0$$

Второе правило Кирхгофа (2 уравнения)

$$\sum_{i=0}^{n} \mathscr{E}_i = \sum_{i=0}^{n} I_i \cdot R(r)_i$$

$$\begin{cases} -I_1 - I_4 + I_3 = 0 \\ \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = I_1(R_1 + R_2 + r_1 + r_2) + I_3(R_3 + r_3) \\ -\mathscr{E}_4 + \mathscr{E}_3 = I_4(R_4 + r_4) + I_3(R_3 + r_3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} -I_1 - I_4 + I_3 = 0 \\ \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = I_1(R_1 + R_2 + r_1 + r_2) + I_3(R_3 + r \\ -\mathscr{E}_4 + \mathscr{E}_3 = I_4(R_4 + r_4) + I_3(R_3 + r_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I_1 - I_4 + I_3 = 0 \\ 11 \cdot I_1 + 0 \cdot I_4 + 7 \cdot I_3 = 6 \\ 0 \cdot I_1 + 4 \cdot I_4 + 7 \cdot I_3 = 6 \end{cases}$$

$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_4 = 6$ В

$\mathrm{r}_1 = \mathrm{r}_4 = 1$ Ом

$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3 = 12$ В

$\mathrm{r}_2 = \mathrm{r}_3 = 2$ Ом

$\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_4 = 3$ Ом

$\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_3 = 5$ Ом

$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4$ – ?

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 44 - (-77-28) = 44 + 105 = 149}$$

$$\boxed{\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 7 \end{vmatrix} = (24 - 42) - (-42) = 24}$$

$$\boxed{\Delta I_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 11 & 6 & 7 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (-42+66) - (-42) = 66}$$

$$\boxed{\Delta I_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 11 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 - (-24 - 66) = 90}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{24}{149} \approx 0,16}$$

$$\boxed{I_4 = \frac{\Delta I_4}{\Delta} = \frac{66}{149} \approx 0,44}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{90}{149} = 0,60}$$