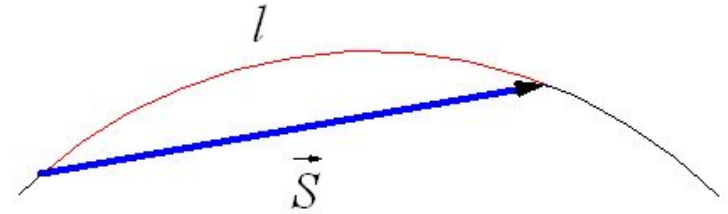


Криволинейное движение

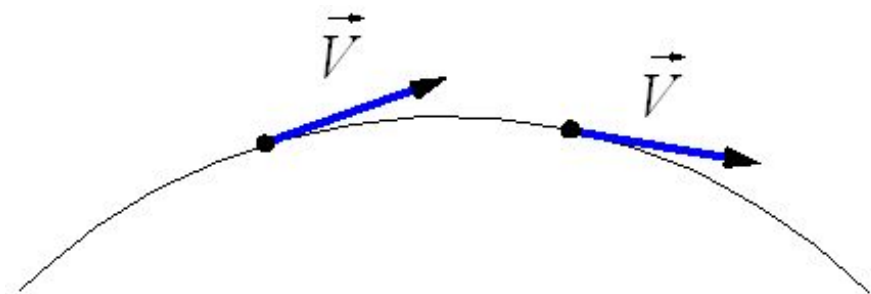
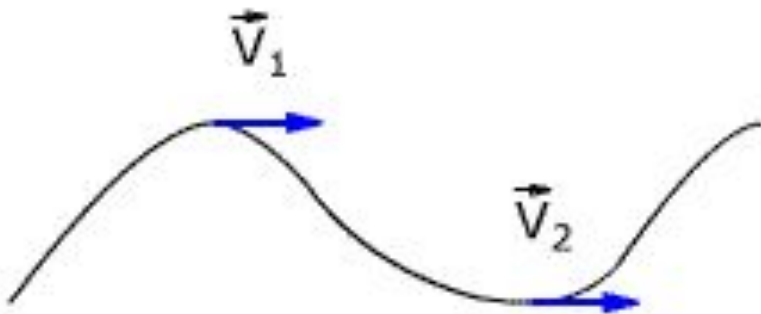
Основные положения: траектория и перемещение

- Криволинейное движение – механическое движение, траекторией которого является кривая
- Если тело движется по криволинейной траектории, то перемещением точки будет по прежнему вектор, соединяющий его начальное и конечное положения, при том вектор перемещение не будет лежать на траектории, как это было при прямолинейном движении.



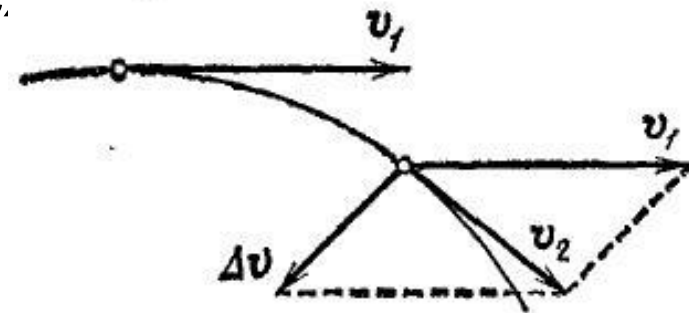
Основные положения: скорость криволинейного движения

- При криволинейном движении нет определенного направления движения, в любой момент времени направление вектора скорости будет отличаться от предыдущего, а значит надо ввести понятие *мгновенного направления скорости*.
- *Мгновенным направлением скорости* считают направление касательной в той точке траектории, где в данный момент тело.



Основные положения: ускорение при криволинейном движении

- При криволинейном движении скорость тела в разные моменты различна, даже если модуль скорости не изменяется, изменяется направление самого вектора. В общем случае меняются и модуль и направление скорости.
- Таким образом, криволинейное движение происходит с ускорением. Для определения этого ускорения требуется:
 - как вектора.
 - Направление ускорения не совпадает с направлением скорости, в то время как для прямолинейного движения эти направления совпадают.
 - Ускорение всегда направлено в сторону вогнутости траектории

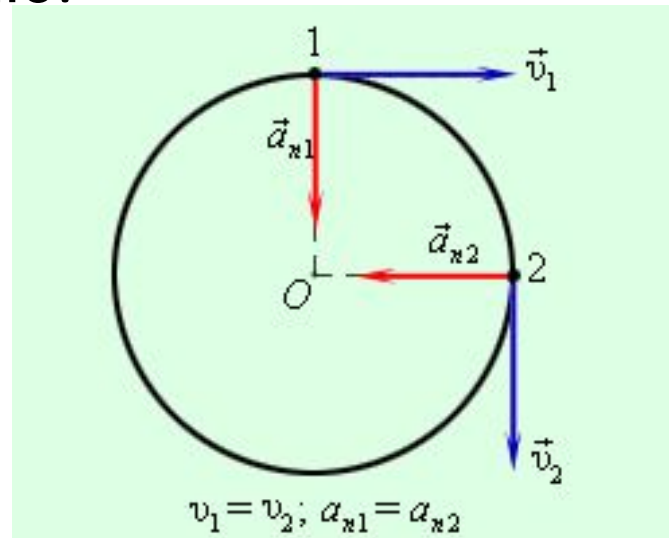


$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Направление \vec{a} совпадает с $\Delta \vec{v}$

Равномерное движение точки по окружности

- Характерные особенности: равномерное – значит с постоянной по модулю скоростью, по окружности – значит траектория – окружность.
- При данном движении ускорение изменяется по направлению, а модуль ускорения остается неизменным.
- Скорость также меняется по направлению, но остается неизменной по модулю.



Среднее ускорение

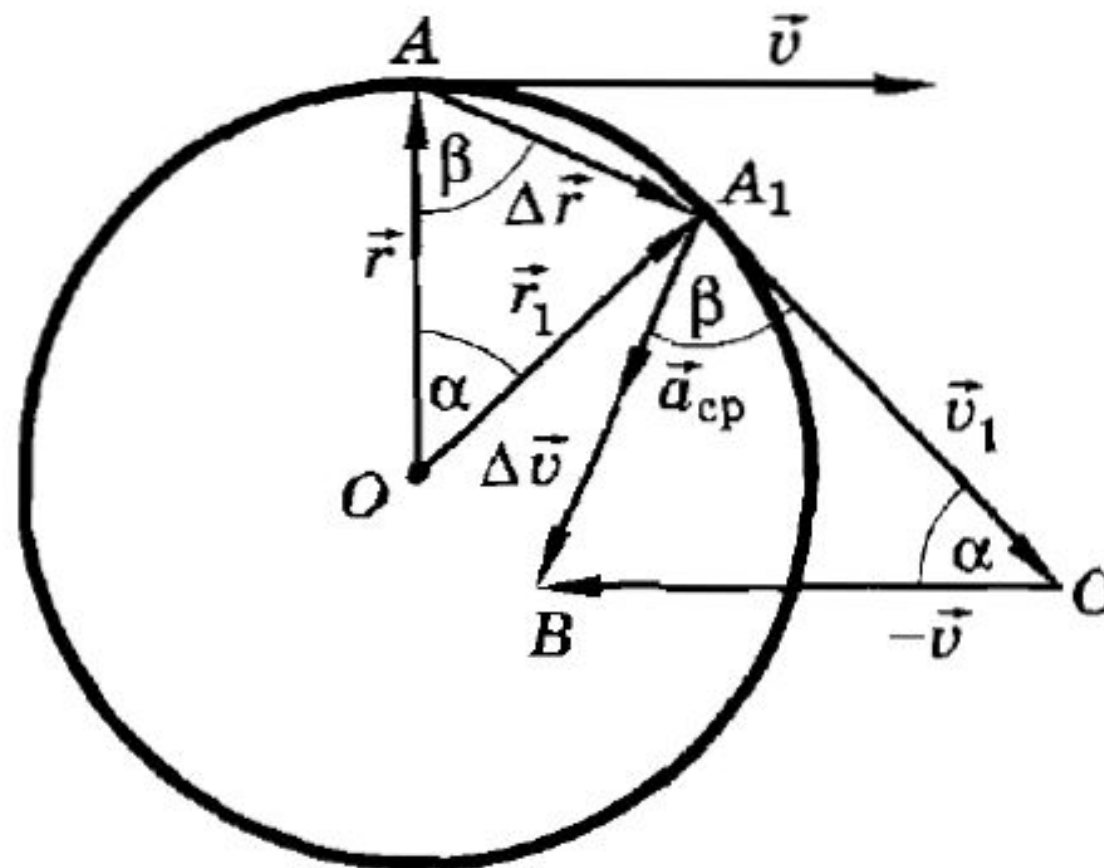
Пусть точка в момент времени t занимает положение A , а через интервал времени Δt – положение A_1 . Обозначим скорость точки в этих положениях через \vec{v} и \vec{v}_1 . При равномерном движении $v_1 = v$.

Изменение скорости за время Δt равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$

$$\vec{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Направление вектора среднего ускорения

- Вектор среднего ускорения составит с вектором скорости угол $\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$



Центростремительное ускорение (нахождение модуля)

Рассмотрим треугольники OAA_1 и A_1CB :

Углы при вершинах этих равнобедренных треугольников равны, т.к. соответствующие стороны перпендикулярны.

Треугольники OAA_1 и A_1CB подобны

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{r}$$

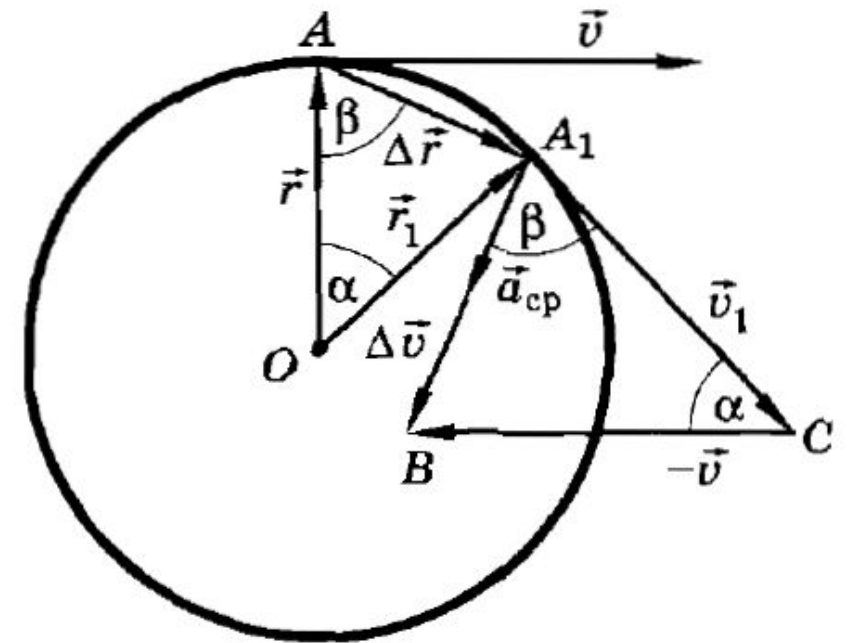
Разделим обе части равенства на Δt и перейдем к пределу при стремлении $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{v} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

$$\frac{1}{v} a = \frac{1}{r} v$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

За время Δt точка A совершит перемещение $\overrightarrow{AA_1} = \Delta \vec{r}$

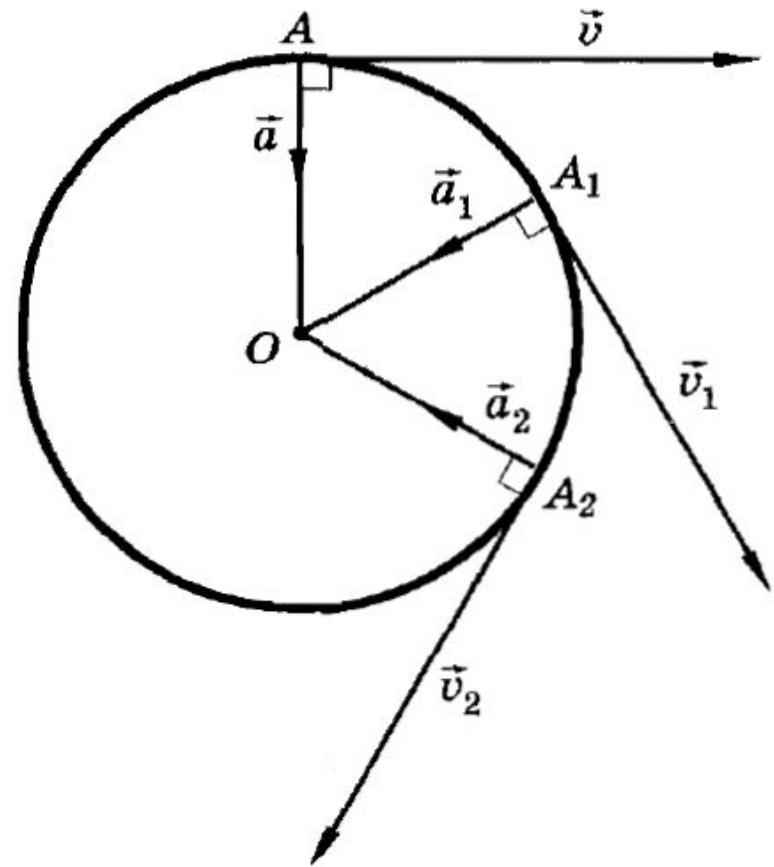


Центростремительное ускорение (нахождение направления)

Мы уже знаем, что вектор среднего ускорения составляет с вектором скорости угол $\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Но при $\Delta t \rightarrow 0$ точка A_1 бесконечно близко подходит к точке A и угол $\alpha \rightarrow 0$. Следовательно, вектор мгновенного ускорения составляет с вектором скорости угол

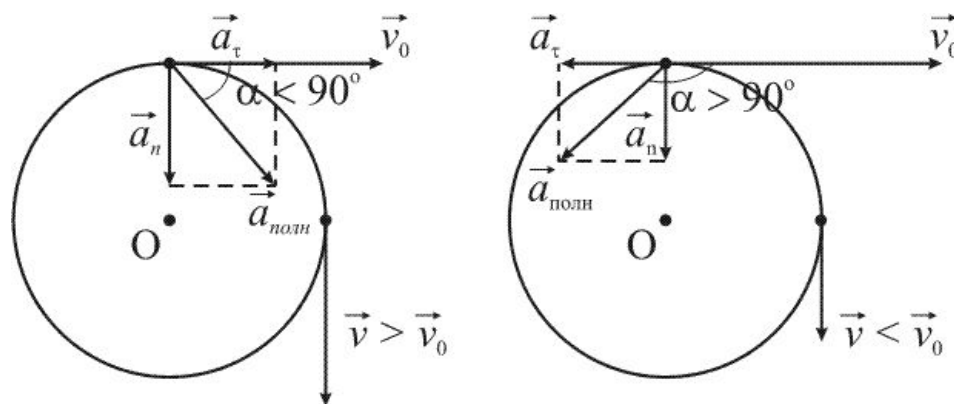
$$\beta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ.$$

- Значит, вектор мгновенного ускорения направлен к центру окружности. Поэтому это ускорение называют *центростремительным* (или *нормальным*).



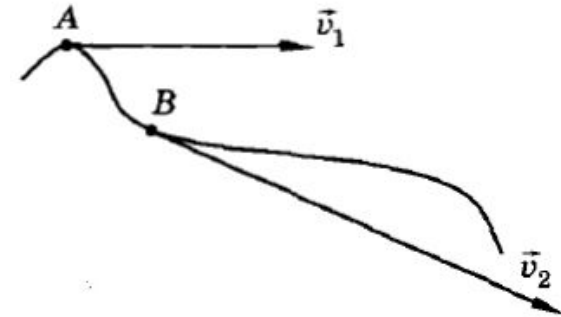
Неравномерное криволинейное движение.

- Траекторией неравномерного криволинейного движения может быть любая произвольная кривая.
- При неравномерном криволинейном движении скорость изменяется как по модулю, так и по направлению.
- Ускорение может изменяться как по направлению, так и по модулю, а может оставаться неизменным.



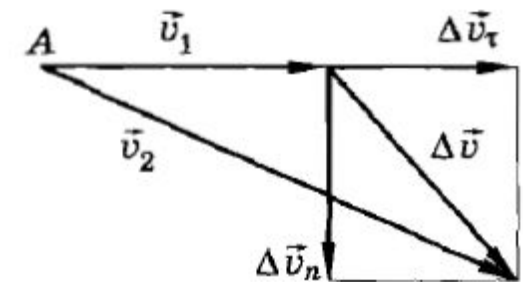
Ускорение при неравномерном криволинейном ДВИЖЕНИИ

Пусть в некоторый момент времени t точка занимает положение A и имеет скорость \vec{v}_1 , а спустя малое время Δt точка переместилась в положение B , приобретя скорость \vec{v}_2 .



Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на составляющие: $\Delta\vec{v}_\tau$ и $\Delta\vec{v}_n$.

- Составляющая $\Delta\vec{v}_\tau$ - *тангенциальная составляющая*, направлена по касательной к траектории, проведенной в точке A .
- Составляющая $\Delta\vec{v}_n \perp \vec{v}_1$. Поэтому эта составляющая называется *нормальной* составляющей приращения скорости $\Delta\vec{v}$.

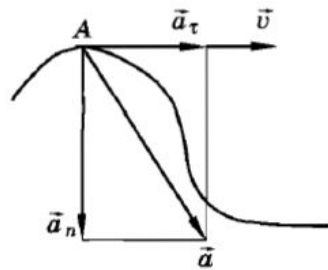


$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$$

Ускорение при неравномерном криволинейном ДВИЖЕНИИ

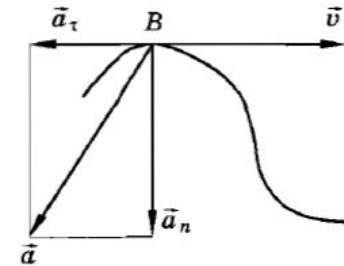
$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_\tau + \Delta \vec{v}_n$$

Разделим почленно равенство на Δt и перейдем к пределу при стремлении $\Delta t \rightarrow 0$:



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}.$$

Полное ускорение
Тангенциальное ускорение
Нормальное ускорение



- Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории, т.к. $\vec{a}_\tau \uparrow \vec{v}$ и характеризует быстроту изменения модуля скорости.
- При ускоренном движении тангенциальное ускорение имеет то же направление, что и скорость, а при замедленном – противоположное.
- Нормальное ускорение перпендикулярно скорости и характеризует быстроту изменения направления скорости.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Модуль нормального ускорения

- Нам уже известно выражение для модуля нормального ускорения при движении по окружности радиусом r :

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

- Но движение может происходить по произвольной кривой, тогда под r надо понимать радиус кривизны траектории в данной точке.
- Радиус кривизны – радиус окружности, по дуге которой движется точка в данный момент времени.
- Радиус кривизны может оставаться неизменным на протяжении некоторого интервала времени, а может изменяться в любой момент

Модуль тангенциального и полного ускорения

- $$|\vec{a}_\tau| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}_\tau|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$
- dv – приращение модуля скорости за бесконечно малый интервал времени dt .
- Модуль полного ускорения \vec{a} точки можно найти по Т.Пифагора:

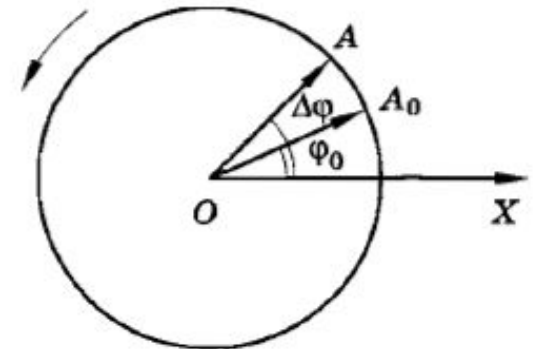
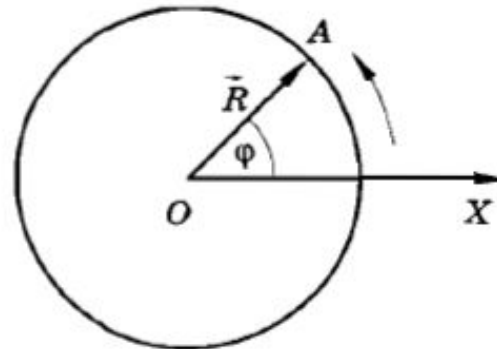
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Угловая скорость и угловое ускорение

- При движении точки по окружности радиус R – постоянная величина. Это позволяет ввести новые величины, описывающие движение: положение характеризовать углом, а вместо линейных (обычных) скоростей и ускорений ввести угловую скорость и ускорение.

Угловая скорость

- Положение точки определяется углом φ между осью X и радиус-вектором \vec{R} , проведенным из центра окружности к движущейся точке.
- Углы выражаются в *радианах* [рад].
- *Радиан* – центральный угол, опирающийся на дугу, длина l которой равна радиусу R окружности. $\varphi = \frac{l}{R}$.
- При движении точки угол φ изменяется. Обозначим изменение угла за время Δt через $\Delta\varphi$; в начальный момент времени t_0 надо знать угол φ_0 , тогда мы сможем определить положение точки в любой момент времени: $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$.
- Угловой скоростью при равномерном движении точки по окружности называется отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиуса-вектора к интервалу времени Δt , за который этот поворот произошел: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.
- Когда точка движется неравномерно, то мгновенная угловая скорость определяется как предел отношения $\Delta\varphi$ к Δt при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$: $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$



Угловая скорость, частота и период обращения

- Угловую скорость можно выразить через *частоту обращения*.
- *Частота обращения* ν – количество оборотов за единицу времени.
- *Период обращения* – время полного оборота.
- Период обращения является обратной величиной частоты обращения: $T = \frac{1}{\nu}$.
- Полному обороту точки на окружности соответствует угол $\varphi = 2\pi$; как нам уже известно, $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, значит $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$
- Если при равномерном обращении точки угловая скорость известна, то можно найти изменение угла поворота $\Delta\varphi$. Оно равно $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Значит $\varphi = \varphi_0 + \omega\Delta t$.

Угловое ускорение

- В случае переменной угловой скорости вводится новая физическая величина, характеризующая быстроту ее изменения, - *угловое ускорение*:

$$\bullet \beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

- Если $\beta = const$, то $\omega(t) = \omega_0 + \beta \Delta t$.

- Угол поворота находится по формуле: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \Delta t + \frac{\beta \Delta t^2}{2}$

или вариант без t: $\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta}$.

Связь между линейной и угловой скоростями

- Линейная скорость – скорость движения точки по окружности.
- Модуль линейной скорости движения:

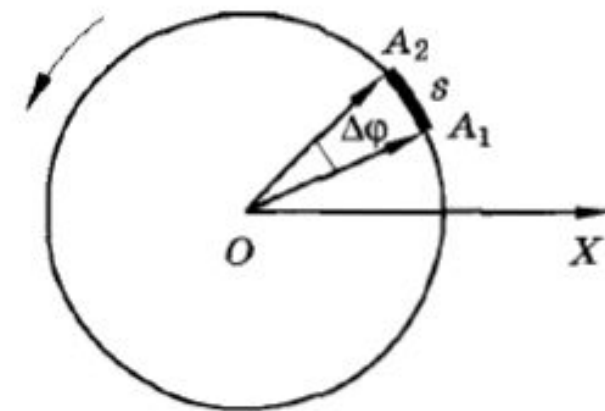
$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} R = \omega R.$$

$$v = \omega R$$

- Эта формула справедлива как для равномерного, так и для неравномерного движения точки по окружности.
- Модуль ускорения точки, движущейся равномерно по окружности (центростремительное или нормальное), можно выразить через угловую скорость тела и радиус окружности. Так как $a = \frac{v^2}{r}$ и $v = \omega R$,

то

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 R.$$



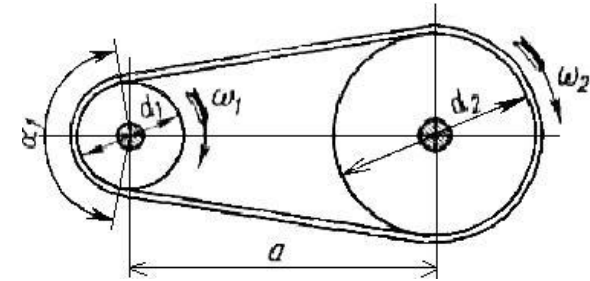
Связь линейного ускорения с угловым

- С изменением угловой скорости точки меняется и ее линейная скорость. Нормальное ускорение не зависит от углового ускорения, но тангенциальное ускорение выражается через угловое выражение:

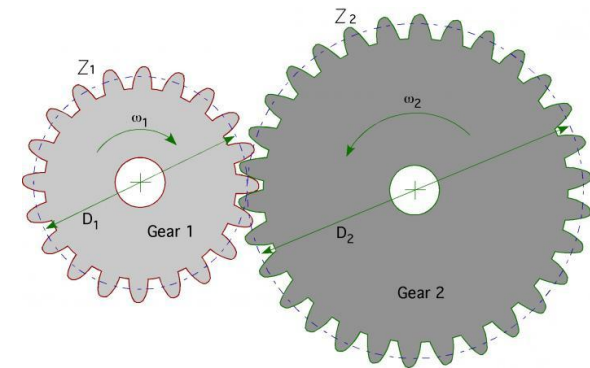
$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{dR\omega}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \beta R$$

*Передача вращательного движения (ременная, зубчатая передачи)

- В ременной передаче движение передается посредством гибкого элемента – приводного ремня. Ременная передача состоит из ведущего и ведомого шкивов и ремня. Вращение передается с ведущего шкива на ведомый. Угловая скорость ведомого шкива во столько раз больше угловой скорости ведущего, во сколько раз диаметр ведомого меньше диаметра ведущего: $\frac{\omega_{\text{ведущ}}}{\omega_{\text{ведом}}} = \frac{d_{\text{ведом}}}{d_{\text{ведущ}}}$. Направление вращения ведущего и ведомого шкивов совпадают.



- В зубчатой передаче движение передается с помощью зубчатых колес (шестерней). Также, как и в ременной передаче здесь присутствуют понятия ведущего и ведомого колес. Угловая скорость ведомого колеса во столько раз больше угловой скорости ведущего, во сколько раз у ведомого колеса меньше зубьев, чем у ведущего: $\frac{\omega_{\text{ведущ}}}{\omega_{\text{ведом}}} = \frac{Z_{\text{ведом}}}{Z_{\text{ведущ}}}$. Также стоит отметить, что направление вращения ведомого колеса противоположно вращению ведущего.



Задачи:

1. Поезд движется по закруглению радиусом 200м со скоростью 36км/ч. Найдите модуль нормального ускорения.
2. С какой скоростью автомобиль должен проходить середину выпуклого моста радиусом 40м, чтобы центростремительное ускорение было равно ускорению свободного падения?
3. Снаряд вылетел из орудия под углом 45° к горизонту. Чему равна дальность полета снаряда, если радиус кривизны траектории в точке максимального подъема равна 15км?
4. Точка начинает обращаться по окружности с постоянным ускорением $\beta = 0,04 \text{ рад/с}^2$. Через какое время вектор ее ускорения будет составлять с вектором скорости угол $\alpha = 45^\circ$?
5. Циркулярная пила имеет диаметр 600мм. На ось пилы насажен шкив диаметром 300мм, который приводится во вращение посредством ременной передачи от шкива диаметром 120мм, насаженного на вал электродвигателя. Какова скорость зубьев пилы, если вал двигателя совершает 1200 об/мин?

Спасибо за внимание!