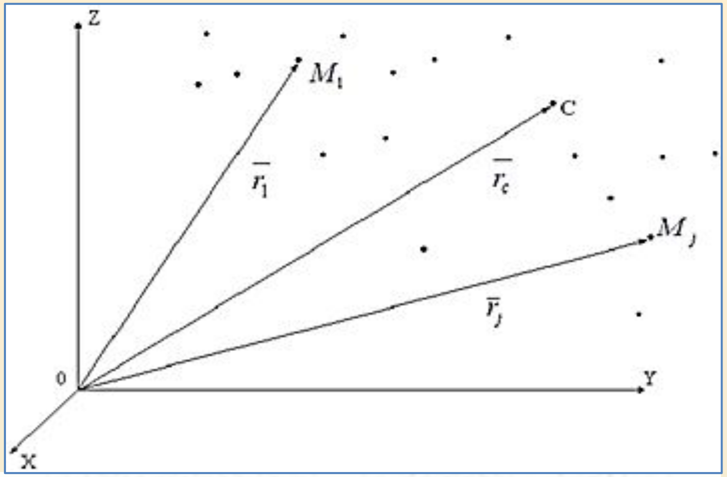
Центр масс
(центр инерции)
системы материальных точек

Сергеев Александр Анатольевич
учитель физики МБОУ Воротынская средняя школа
р.п Воротынец, Нижегородской области.

Цели:

- Познакомить учащихся с понятием центра масс.
- Рассмотреть свойства центра масс для различных тел.
- Показать алгоритмы нахождения центра масс.
- Рассмотреть разные способы нахождения цетра масс.

Центром масс (центром инерции) системы материальных точек назовем точку, характеризующую распределение масс в системе, координаты которой определяются формулами

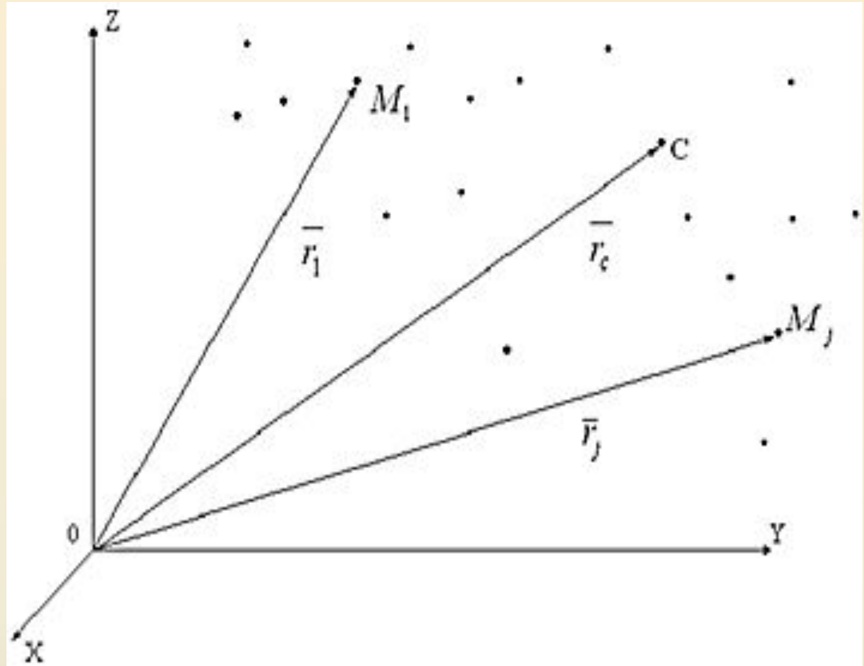


$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot x_1 + \ldots + m_N \cdot x_N}{m_1 + \ldots + m_N}, \quad y_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot y_1 + \ldots + m_N \cdot y_N}{m_1 + \ldots + m_N},$$

$$z_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot z_1 + \ldots + m_N \cdot z_N}{m_1 + \ldots + m_N}.$$

Здесь mi — массы материальных точек, образующих систему, m*x, m*y, m*z -статические моменты массы относительно осей, xi, yi, zi — ***координаты этих точек(центр масс отдельных фигур)***.

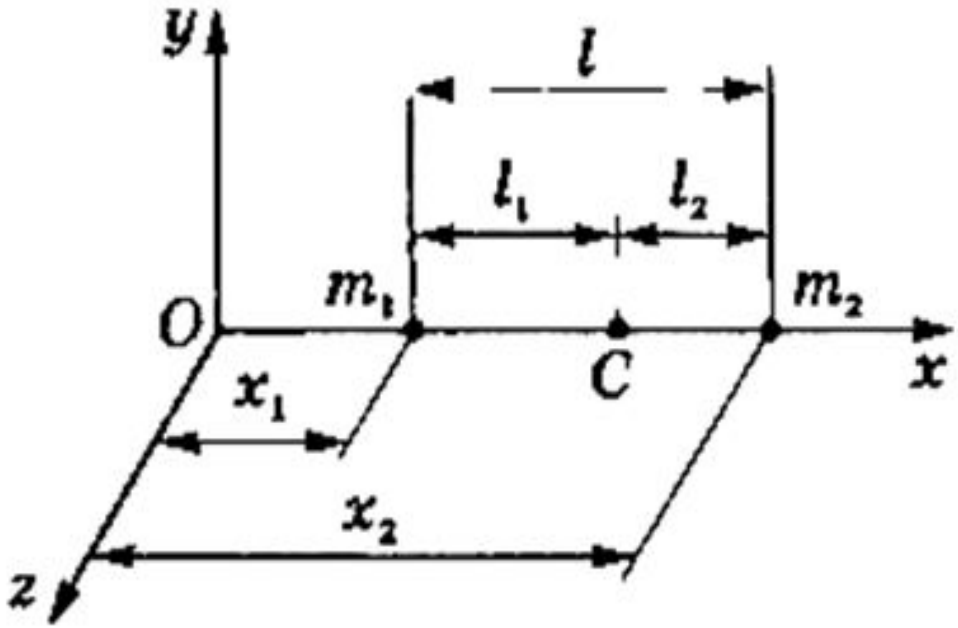
Можно записать используя понятие радиуса-вектора:



$$\vec{r}_ц = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + \ldots + m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + \ldots + m_N}.$$

Для простоты рассуждений рассмотрим вначале систему, состоящую из двух материальных точек с массами m_1 и m_2, которые расположены на оси абсцисс в точках с координатами x_1 и x_2. Расстояние между этими точками $l = x_2 - x_1$.

Точку С, которая делит это расстояние на отрезки, обратно пропорциональные массам, называют **центром масс**.



Пусть координата этой точки x_c тогда .

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Центр масс плоской фигуры

Для нахождения центра масс плоской фигуры, имеющей сложносоставную форму,
достаточно эффективен метод ее разбиения на простые элементы с легко определяемыми
координатами. Сложная конфигурация представляется в виде объединения простых фигур, из которых вырезаны некоторые фрагменты.
Таким образом, если однородную материальную пластину можно разбить на конечное
число частей с известными положениями центров тяжести, то координаты (положение) ЦМ всей пластины можно вычислить по формулам (метод отрицательных масс)
Т.е у тех элементов в фигуре которых вырезаны части, их массы берутся с минусом .

Уравнение центра масс для плоской фигуры толщиной L, с известными геометрическими данными можно представить

Уравнение центра масс для плоской фигуры толщиной L, с известными геометрическими данными можно представить

$$x_c = \frac{S_1 x_1 \pm S_2 x_2 \pm \cdots \ldots\ldots.}{S_1 \pm S_2 \pm \cdots \ldots\ldots\ldots}$$

*Тк.**m=ρV, V=SL** , то **m** пропорциональна **S***

$$x_c = \frac{m_1 x_1 \pm m_2 x_{2\pm} \ldots\ldots\ldots}{m_1 \pm m_2 \pm \cdots \ldots\ldots\ldots}$$

Формулы равнозначны.

Некоторые важные свойства :

– если однородное тело имеет центр (ось, плоскость) симметрии, то ЦМ совпадает с этим центром (лежит на этой оси, в плоскости);

– если ЦМ отдельных частей тела лежат на одной прямой (плоскости), то и ЦМ лежит на этой прямой (плоскости);

– если тело имеет полости (пустоты), то его можно рассматривать как систему, состоящую из сплошного тела и тел в форме пустот, имеющих отрицательную массу (метод отрицательных масс);

– ЦМ фигур и тел правильной геометрической формы совпадает с геометрическим центром;

– ЦМ правильного многоугольника совпадает с центром поворотной симметрии

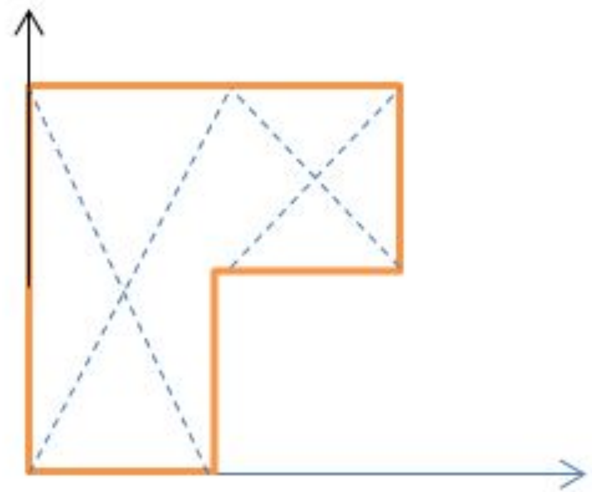
Алгоритм решения может быть следующим:

- Разбиваем сложную фигуру на элементарные, центр масс(центр симметрии) которых легко находится
- Записываем уравнения для центра масс, где x1, x2 … расстояния до центров масс этих элементарных фигур.
- В уравнениях перед значениями ставиться минус, если взятая нами элементарная фигура является полостью или вырезом.

Решение задач с использованием формулы

$$x_c = \frac{m_1 x_1 \pm m_2 x_{2\pm} \dots\dots}{m_1 \pm m_2 \pm \cdots \dots\dots\dots}$$

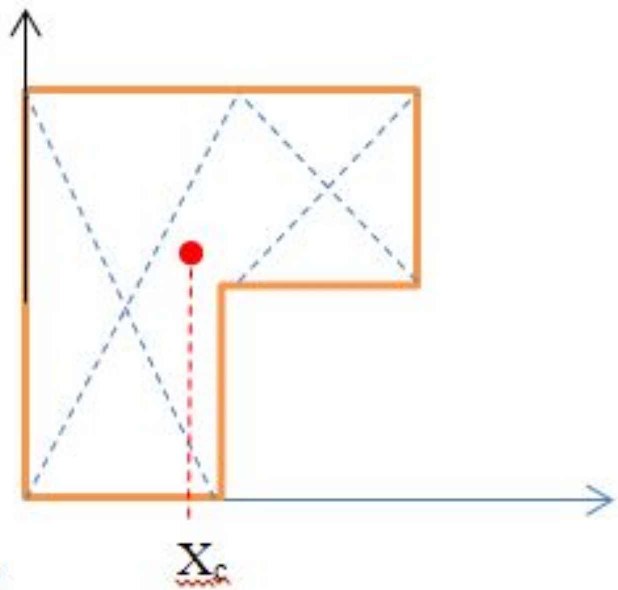
«Четвертая часть квадрата». Из квадрата вырезана одна четвертая часть. Сторона квадрата **a.** Найти центр масс



1) Решение по правилу моментов

$$2mg\,(X_c - a/4) - mg\,(a/2 - X_c + a/4) = 0$$

$$X_c = \frac{5}{12}a$$



2) Прямой расчет с выделением элементарных фигур

$$x_c = \frac{2m\cdot\dfrac{a}{4} + m\cdot\dfrac{3}{4}a}{3m} = \frac{5}{12}a$$

3) Способ с отрицательной массой

$$x_c = \frac{4m\cdot\dfrac{a}{2} - m\cdot\dfrac{3}{4}a}{4m - m} = \frac{5}{12}a$$

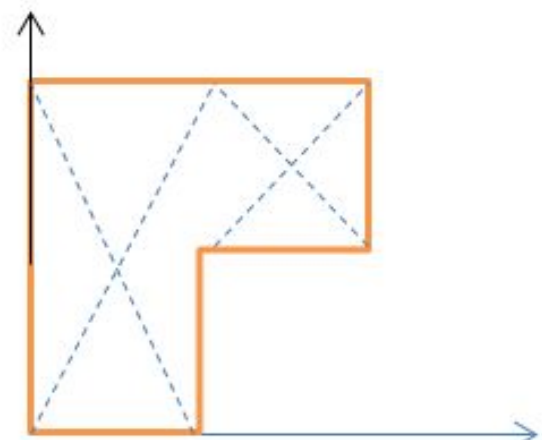
Решение задач с использованием формулы

$$x_c = \frac{S_1 x_1 \pm S_2 x_2 \pm \cdots \ldots \ldots}{S_1 \pm S_2 \pm \cdots \ldots \ldots \ldots} [3]$$

«Четвертая часть квадрата». Из квадрата вырезана одна четвертая часть. Сторона квадрата **a**

1) *Прямой расчет с выделением элементарных фигур*

$$x_c = \frac{\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{4}+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{3}{4}a}{3\frac{a^2}{4}} = \frac{5}{12}a$$

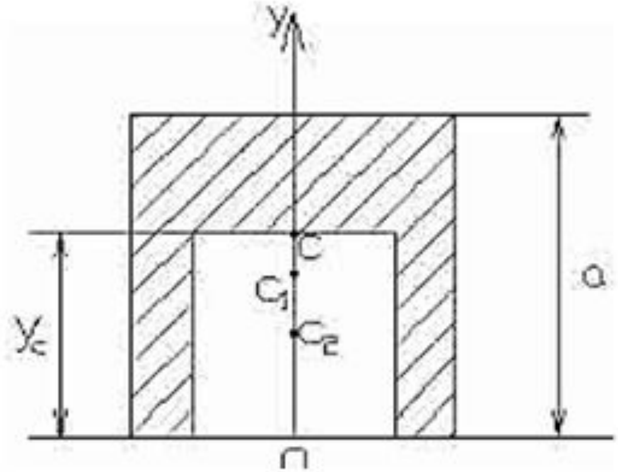


2) *Способ с отрицательной массой*

$$x_c = \frac{a^2\cdot\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}\cdot\frac{3}{4}a}{a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{5}{12}a$$

Задача «Прямоугольный вырез».

Из однородной квадратной пластины со стороной **a** вырезают квадрат так, что стороны обоих квадратов параллельны. Фигуры имеют вертикальную ось симметрии – Oy . Какова должна быть сторона меньшего квадрата для того, чтобы центр тяжести оставшейся после выреза части совпал с точкой С



Решение. Очевидно, что точка С лежит на оси симметрии, поэтому $x_c = 0$. Для нахождения y_c вновь воспользуемся методом отрицательных масс.

$$y_c = \frac{\frac{a}{2}\cdot a^2 - \frac{y_c}{2}\cdot y_c^2}{a^2 - y_c^2} = \frac{(a-y_c)(a^2+ay_c+y_c^2)}{2(a-y_c)(a+y_c)}$$

$$y_c^2 + ay_c - a^2 = 0.$$

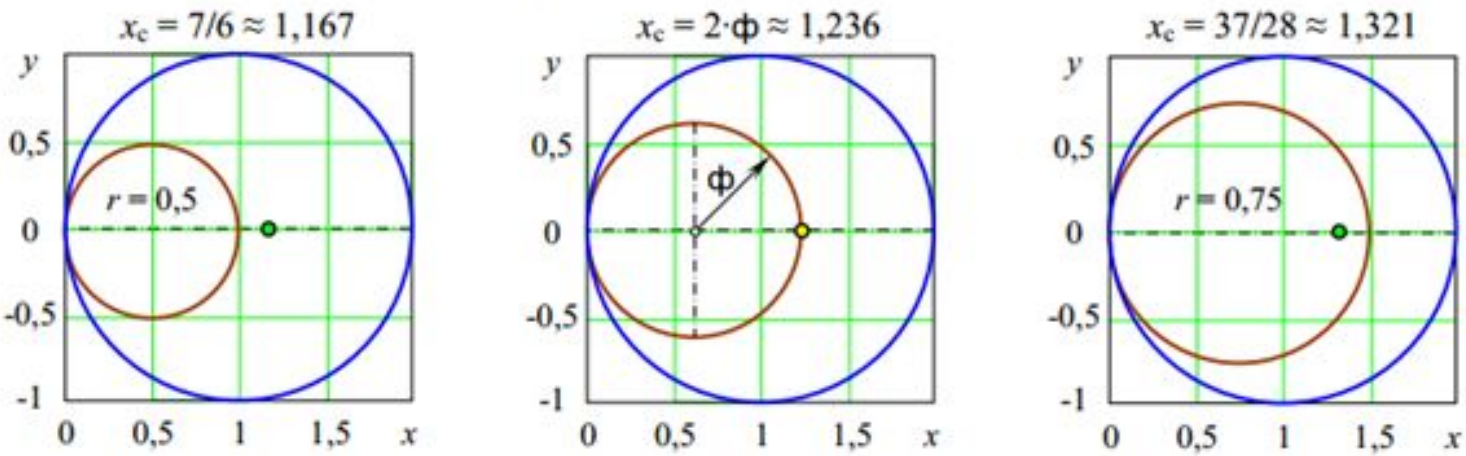
После сокращения на $(a - y_c)$ получим квадратное уравнение относительно y_c

Расчет центра масс у фигур с вырезами

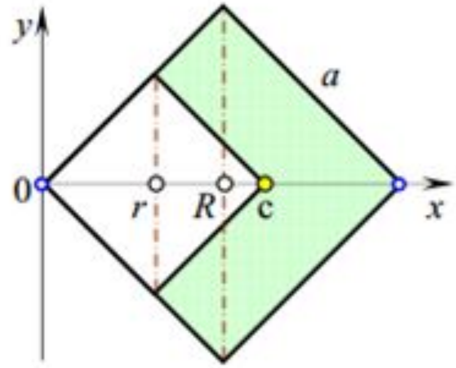
Задача "полумесяца". Пусть тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину в форме круга радиусом R, из которой вырезается круг радиуса r < R. Исходная фигура симметрична относительно оси Ox, поэтому ее центр масс находится на этой оси, и его положение полностью определяется координатой

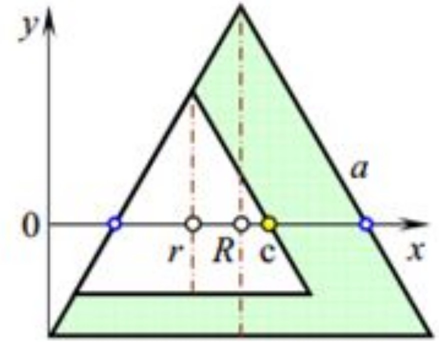
$$x_c = \frac{\pi R^2 \cdot R - \pi r^2 \cdot r}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{(R-r)\left(R^2 + Rr + r^2\right)}{(R-r)(R+r)} = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r}.$$

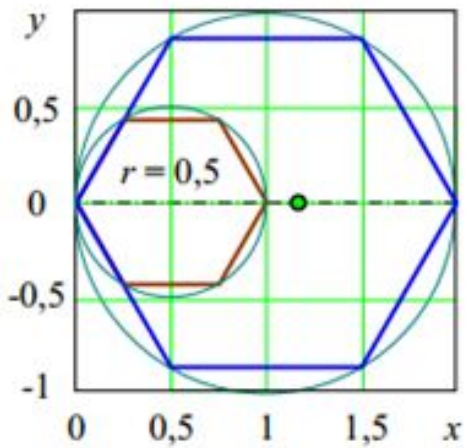
Анализ формулы показывает, что с изменением радиуса $r = 0 \div R$ (диаметра $d = 0 \div 2R$) вырезаемого круга центр масс смещается в интервале $x_c = (1 \div 5,1)R$

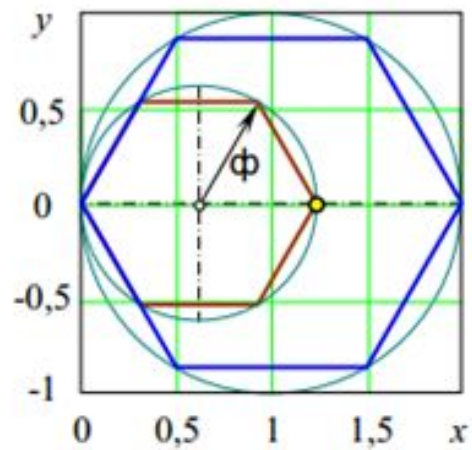


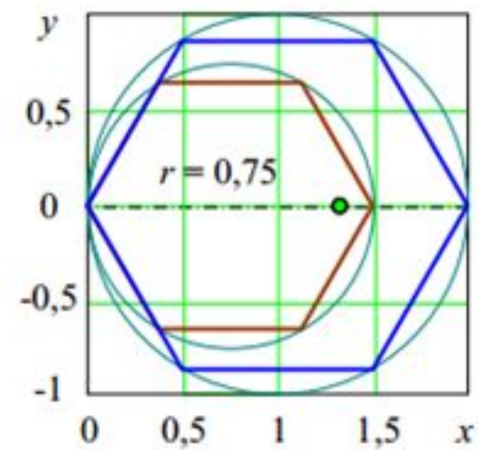
$$x_c = \frac{SR - sr}{S - r};$$











площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, составляет

$$S = \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$