

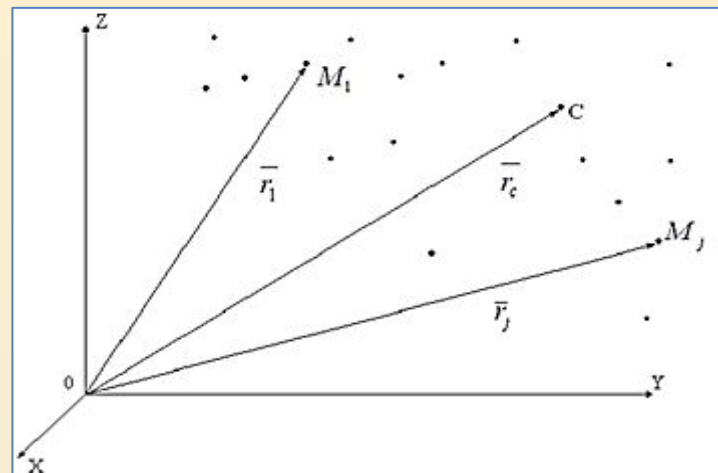
Центр масс
(центр инерции)
системы материальных точек

Сергеев Александр Анатольевич
учитель физики МБОУ Воротынская
средняя школа
р.п Воротынец, Нижегородской области.

Цели:

- Познакомить учащихся с понятием центра масс.
- Рассмотреть свойства центра масс для различных тел.
- Показать алгоритмы нахождения центра масс.
- Рассмотреть разные способы нахождения центра масс.

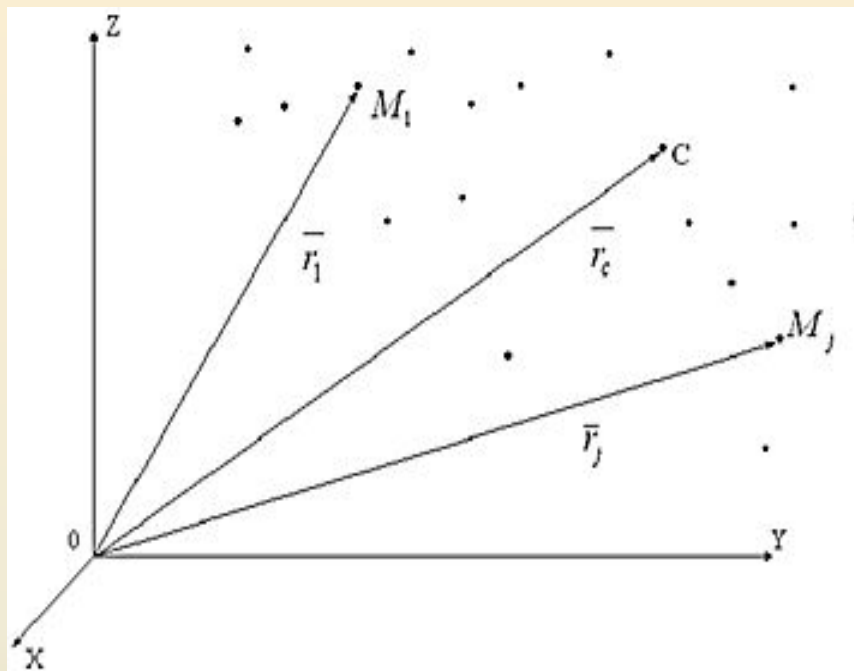
Центром масс (центром инерции) системы материальных точек назовем точку, характеризующую распределение масс в системе, координаты которой определяются формулами



$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_N \cdot x_N}{m_1 + \dots + m_N}, \quad y_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot y_1 + \dots + m_N \cdot y_N}{m_1 + \dots + m_N},$$
$$z_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot z_1 + \dots + m_N \cdot z_N}{m_1 + \dots + m_N}.$$

Здесь m_i — массы материальных точек, образующих систему, m^*x , m^*y , m^*z -статические моменты массы относительно осей, x_i , y_i , z_i — координаты этих точек(центр масс отдельных фигур).

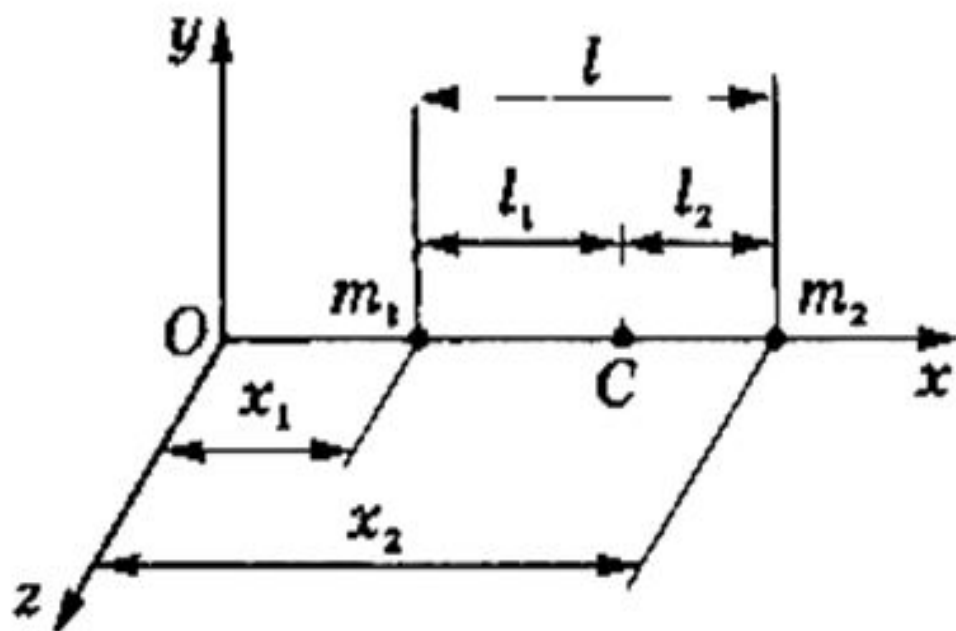
Можно записать используя понятие радиуса-вектора:



$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + \dots + m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N}.$$

Для простоты рассуждений рассмотрим вначале систему, состоящую из двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , которые расположены на оси абсцисс в точках с координатами x_1 и x_2 . Расстояние между этими точками $l = x_2 - x_1$.

Точку C , которая делит это расстояние на отрезки, обратно пропорциональные массам, называют центром масс.



Пусть координата этой точки x_c тогда .

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Центр масс плоской фигуры

Для нахождения центра масс плоской фигуры, имеющей сложносоставную форму, достаточно эффективен метод ее разбиения на простые элементы с легко определяемыми координатами. Сложная конфигурация представляется в виде объединения простых фигур, из которых вырезаны некоторые фрагменты. Таким образом, если однородную материальную пластину можно разбить на конечное число частей с известными положениями центров тяжести, то координаты (положение) ЦМ всей пластины можно вычислить по формулам (метод отрицательных масс) Т.е у тех элементов в фигуре которых вырезаны части, их массы берутся с минусом .

Уравнение центра масс для плоской фигуры толщиной L, с известными

геометрическими данными можно представить

Уравнение центра масс для плоской фигуры толщиной L, с известными геометрическими данными можно

представить

Т.к. $m = \rho V$, $V = SL$, то m пропорциональна

S

$$x_c = \frac{S_1 x_1 \pm S_2 x_2 \pm \dots \dots \dots}{S_1 \pm S_2 \pm \dots \dots \dots}$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 \pm m_2 x_2 \pm \dots \dots \dots}{m_1 \pm m_2 \pm \dots \dots \dots}$$

Формулы равнозначны.

Некоторые важные свойства :

- если однородное тело имеет центр (ось, плоскость) симметрии, то ЦМ совпадает с этим центром (лежит на этой оси, в плоскости);
- если ЦМ отдельных частей тела лежат на одной прямой (плоскости), то и ЦМ лежит на этой прямой (плоскости);
- если тело имеет полости (пустоты), то его можно рассматривать как систему, состоящую из сплошного тела и тел в форме пустот, имеющих отрицательную массу (метод отрицательных масс);
- ЦМ фигур и тел правильной геометрической формы совпадает с геометрическим центром;
- ЦМ правильного многоугольника совпадает с центром поворотной симметрии

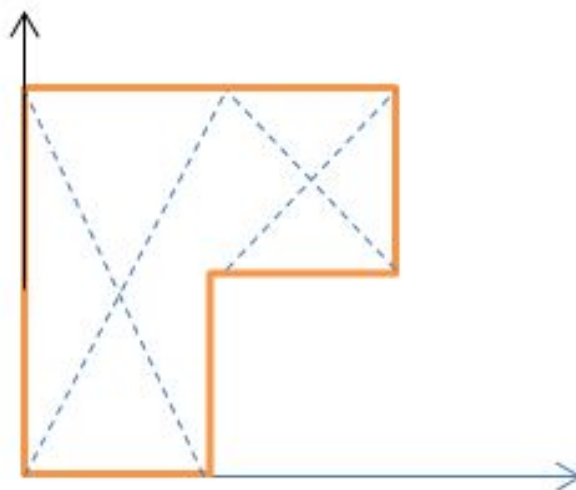
Алгоритм решения может быть следующим:

- Разбиваем сложную фигуру на элементарные, центр масс(центр симметрии) которых легко находится
- Записываем уравнения для центра масс, где $x_1, x_2 \dots$ расстояния до центров масс этих элементарных фигур.
- В уравнениях перед значениями ставиться минус, если взятая нами элементарная фигура является полостью или вырезом.

Решение задач с использованием формулы

$$x_c = \frac{m_1 x_1 \pm m_2 x_2 \pm \dots \dots \dots}{m_1 \pm m_2 \pm \dots \dots \dots}$$

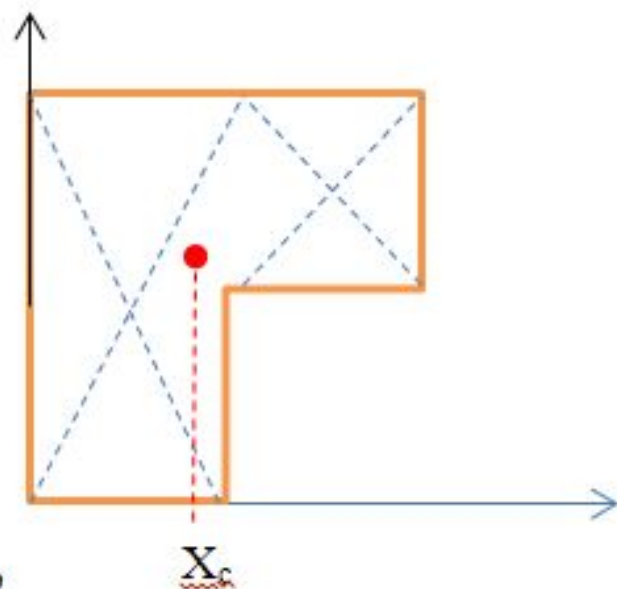
«Четвертая часть квадрата». Из квадрата вырезана одна четвертая часть. Сторона квадрата a . Найти центр масс



1) Решение по правилу моментов

$$2mg (X_c - a/4) - mg (a/2 - X_c + a/4) = 0$$

$$X_c = \frac{5}{12} a$$



2) Прямой расчет с выделением элементарных фигур

$$x_c = \frac{2m \cdot \frac{a}{4} + m \cdot \frac{3}{4}a}{3m} = \frac{5}{12} a$$

3) Способ с отрицательной массой

$$x_c = \frac{4m \cdot \frac{a}{2} - m \cdot \frac{3}{4}a}{4m - m} = \frac{5}{12} a$$

Решение задач с использованием формулы

$$x_c = \frac{S_1 x_1 \pm S_2 x_2 \pm \dots \dots \dots}{S_1 \pm S_2 \pm \dots \dots \dots} [3]$$

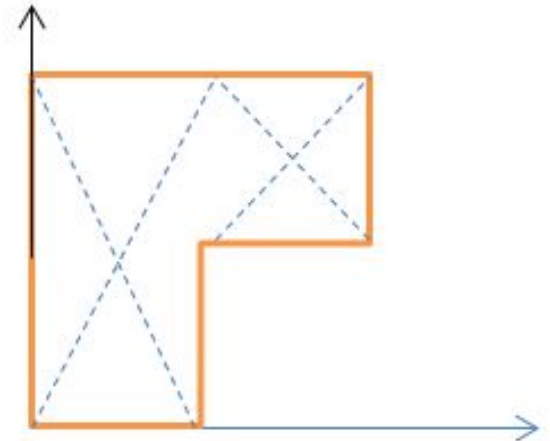
«Четвертая часть квадрата». Из квадрата вырезана одна четвертая часть. Сторона квадрата **a**

1) Прямой расчет с выделением элементарных фигур

$$x_c = \frac{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{4} + \frac{a^2}{4} \cdot \frac{3}{4}a}{3 \frac{a^2}{4}} = \frac{5}{12}a$$

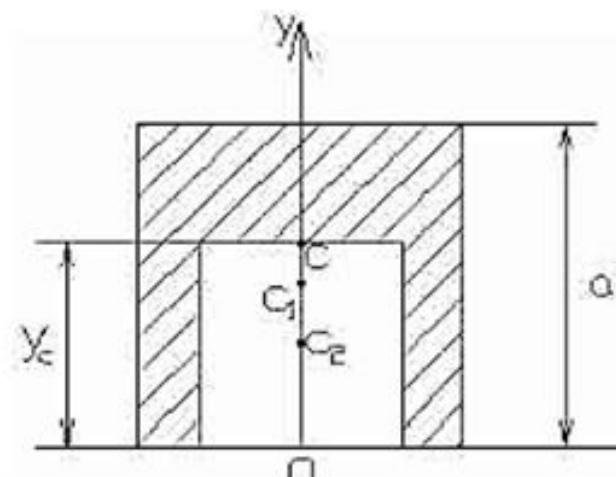
2) Способ с отрицательной массой

$$x_c = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{3}{4}a}{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{5}{12}a$$



Задача «Прямоугольный вырез».

Из однородной квадратной пластины со стороной a вырезают квадрат так, что стороны обоих квадратов параллельны. Фигуры имеют вертикальную ось симметрии – Oy . Какова должна быть сторона меньшего квадрата для того, чтобы центр тяжести оставшейся после выреза части совпал с точкой C



Решение. Очевидно, что точка C лежит на оси симметрии, поэтому $x_c = 0$. Для нахождения y_c вновь воспользуемся методом отрицательных масс.

$$y_c = \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 - \frac{y_c}{2} \cdot y_c^2}{a^2 - y_c^2} = \frac{(a - y_c)(a^2 + ay_c + y_c^2)}{2(a - y_c)(a + y_c)}$$

$$y_c^2 + ay_c - a^2 = 0,$$

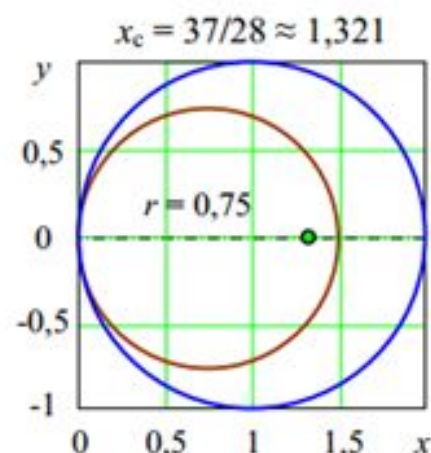
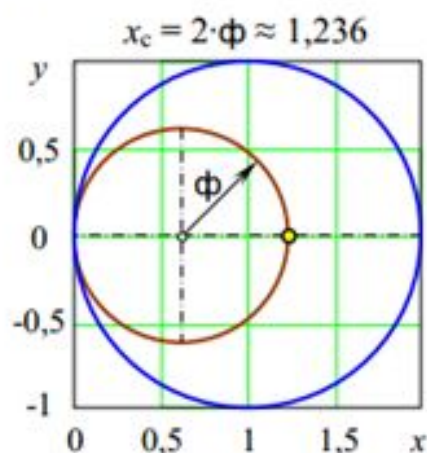
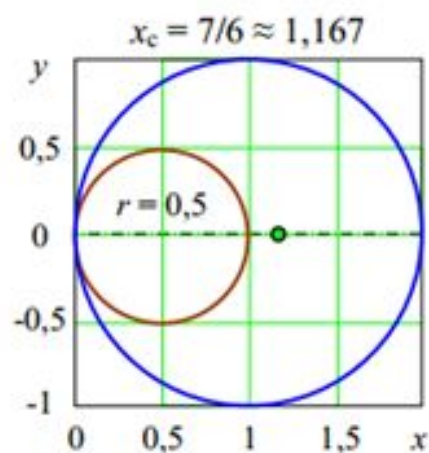
После сокращения на $(a - y_c)$ получим квадратное уравнение относительно y_c

Расчет центра масс у фигур с вырезами

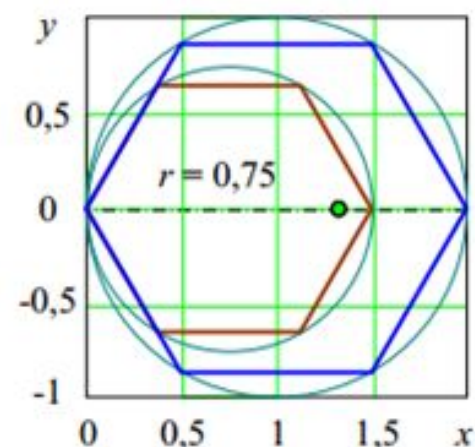
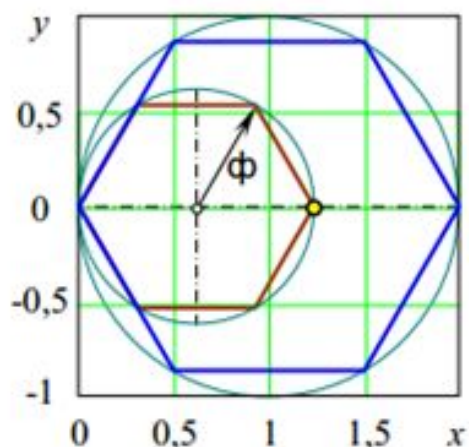
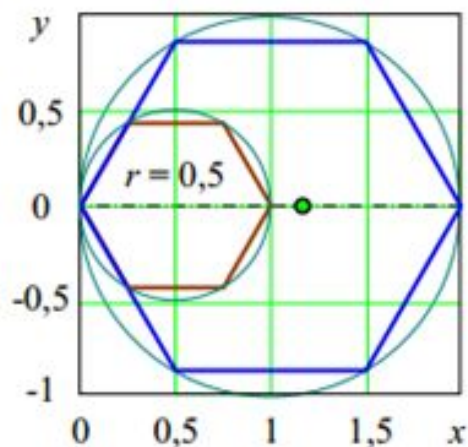
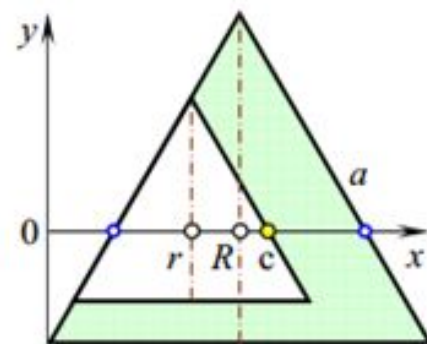
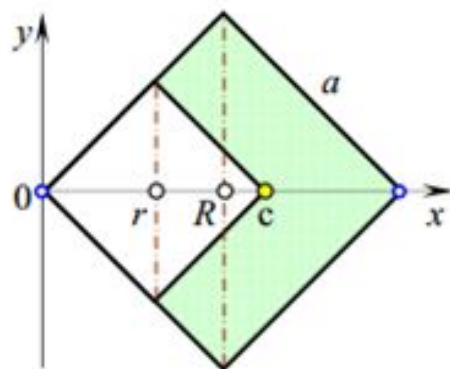
Задача "полумесяца". Пусть тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину в форме круга радиусом R , из которой вырезается круг радиуса $r < R$. Исходная фигура симметрична относительно оси Ox , поэтому ее центр масс находится на этой оси, и его положение полностью определяется координатой

$$x_c = \frac{\pi R^2 \cdot R - \pi r^2 \cdot r}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{(R-r)(R+r)} = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r}.$$

Анализ формулы показывает, что с изменением радиуса $r = 0 \div R$ (диаметра $d = 0 \div 2R$) вырезаемого круга центр масс смещается в интервале $x_c = (1 \div 5, 1)R$



$$x_c = \frac{SR - sr}{S - r}$$



площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, составляет

$$S = \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$