Проверка правильности традиционного решения задач с помощью размерности

Цель занятия: научиться проверять правильность традиционного решения задач с помощью размерности

Задачи занятия:

- 1.Рассмотреть задачи, описывающие различное движение, в которых применяются различные уравнения для определения пути.
- 2. Сделать вывод, что в правильно составленном уравнении, размерность правой его части равна размерности его левой части.
- 3. Доказать, что метод размерностей может подсказать ошибочность физического направления решения, но не может подсказать ошибочность математического действия.

Уникальность любой физической величины заключена в ее размерности: $M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$. Именно совокупность α, β, γ значений и определяют размерность физической величины.

1.Площадь прямоугольника S=ab	$м^2 = м \cdot м$ ' $м^2$ = $м^2$
2.Путь S=Vt	м = (м/с)с = м
3.Путь при равноускоренном движении $S = \frac{at^2}{2}$	м = ($м/с^2$) $с^2$\2 = м.
4.Сила Архимеда $F_a = \rho_{ж} g V_m$	Вывод: $Н = \frac{кг}{м^3} \cdot \frac{м}{с^2} \cdot м^3 = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н$
5.Предложите и докажите самостоятельно	

Зная закономерность размерности, мы можем произвести размерностную проверку любой физической формулы, сколько бы слагаемых членов она не содержала и какими бы «страшными» они не были.

Проверьте, пожалуйста, несколько известных уравнений кинематики, используя символы MLT

- 1. $S = Vt$ $\qquad L = LT^{-1} \cdot T = L$
- 2. $S = \frac{at^2}{2}$
- 3. $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$
- 4. V = at
- 5. V = V**0** + at

Проверим

- 1. $S = Vt$ $$L = LT^{-1} \cdot T = L$$
- 2. $S = \frac{at^2}{2}$ $$L = LT^{-2} \cdot T^2 = L$$
- 3. $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ $$L = LT^{-1} \cdot T + LT^{-2} \cdot T^2 = L + L = L$$
- 4. V = at $$LT^{-1} = LT^{-2} \cdot T = LT^{-1}$$
- 5. V = V**o** + at $$LT^{-1} = LT^{-1} + LT^{-2} \cdot T = LT^{-1} + LT^{-1} = LT^{-1}$$

- **Вывод:** для всех рассмотренных уравнений размерность слева равна размерности справа.

Рассмотрим решение нескольких задач.

1. Определить расстояние между Землёй и Солнцем, если луч света, двигаясь со скоростью 3×10^8 м/с, проходит это расстояние примерно за 8,5 минут ?

1. $V = 3 \times 10^8$ м/с $t = 8{,}5$ мин $= 510$ с	Решения. 1. Движение равномерное 2. $S = V t$ 3. $S = 3 \times 10^8 \times 510 = 153 \times 10^9$ (м)
S - ?	

2. Какое расстояние по прямой может пройти ракета за 1 минуту, двигаясь от места старта с ускорением 20 $м/с^2$?

2. $V_0 = 0$ $a = 20\ м/с^2$ $t = 1$ мин $= 60$ с	1. Движение равноускоренное с $V_0 = 0$ 2. $S = \frac{at^2}{2}$ 3. $S = 20 \times 60^2/2 =$ 36000 (м)
S - ?	

3. Автомобиль, двигаясь со скоростью 54 км/ч, пошел на обгон и в течение 10 секунд двигался с ускорением 2 $м/с^2$ Какой путь прошел автомобиль за это время?

V_0 = 54 км/ч = 15 м/с а = 2 $м/с^2$ t = 10 с	1. Движение равноускоренное с $V_0 \neq 0$ 2. $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ 3. S = 15 x 10 + 2 x 10 ^{2}/ 2 = 250(м)
S - ?	

4. Автомобиль, двигаясь со скоростью 54 км/ч, перед поворотом в течение 10 секунд двигался равнозамедленно с ускорением - 2 $м/с^2$

Какой путь прошел автомобиль за это время?

<table>
<tr>
<td>V_0 = 54 км/ч = 15 м/с
a = 2 $м/с^2$
t = 10 с</td>
<td rowspan="2">1. Движение равнозамедленно е
2. $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$
3.
S = 15 x 10 - 2 x 10^2 / 2 = 50(м)</td>
</tr>
<tr>
<td>S - ?</td>
</tr>
</table>

Проанализируем решение этих задач.

- **1. Что общего было в этих задачах?**

(Определялся путь S)

- **2. В чём различие в этих задачах?**

(В каждой задаче описывается различное движение, а, значит, применяются различные уравнения для определения пути)

То есть различие в том, что одна и та же величина (путь) определяется через различные величины.

В №1 через V и t. В №2 через a и t . В №3 и №4 через V**о** ,a, t.

- Эти величины имеют различные размерности, но в результате произведенных действий получается во всех случаях одна и та же размерность - метр.

Произведём предлагаемые действия только с размерностями, не используя модулей этих величин

- 1. S = V t = $\frac{L}{T}T = L$
- 2. S = $\frac{at^2}{2} = \frac{L}{T^2}T^2 = L$
- 3.4. S = $V_0 t \pm \frac{at^2}{2} = \frac{L}{T}T \pm \frac{L}{T^2}T^2$ =L±L= L
- Отсюда следует закономерность:

в правильно составленном уравнении, размерность правой его части равна размерности его левой части.

Эту закономерность можно применить для проверки правильности решения задач

Допустим в задаче №3 допустили ошибку (она очень часто встречается), записав уравнение так

$$S = v_0 + \frac{at^2}{2}$$

, тогда S = 15 + 2 x 10 /2 = 65 (м).

Если правильный ответ неизвестен, как проверить правильность решения и найти причину ошибки

То ли ошибка в вычислении, то ли в преобразовании, то ли в неправильном написании, правильно выбранного уравнения?

- Проверяя правильность решения по наименованию можно найти причину ошибки. Как это сделать?
- Вместо модулей величин подставить размерности величин и сравнить размерности левой и правой части уравнения, то есть использовать, указанную выше, закономерность.

$$L = \frac{L}{T} + \frac{L}{T^2}T^2 = \frac{L}{T} + L = \frac{L + LT}{L} = \frac{L(1+T)}{L} = 1 + T$$

- Отсюда следует: L ≠ 1+T. Задача решена неверно.

Где ошибка? В правой части уравнение представляет собой двучлен.

Одна его часть имеет размерность L , а другая L/T.

Как из этого выражения L/T получить L?

- Умножив его на **T,** получим размерность первого члена **L.**
- Тогда первый член и второй член правой части уравнения будут иметь размерность **L и L + L = L ,**

то есть левая и правая части будут иметь одинаковую размерность**.**

Значит, первый член правой части уравнения должен иметь вид не V0, а V0 t .

- **Теперь предположим, что при решении задачи допущена другая ошибка**:

в уравнении

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

вместо знака «+» поставил знак «-».

- Поможет ли здесь метод размерности указать на ошибку?

- Отсюда следует второй вывод: **Метод размерностей может подсказать ошибочность физического направления решения, но не может подсказать ошибочность математического действия.**

Решим несколько задач по кинематике и сделаем проверку их правильности решения, применив метод размерности для проверки.

- Задача № 1 .

За время равное 2 с тело, двигаясь прямолинейно и равноускоренно, прошло путь 20 м. Его скорость при этом увеличилась в 3 раза. Определить ускорение тела.

Решение.

1 Движение равноускоренное с $V0 \neq 0$.

2. Его уравнения

$$V = V0 + at \qquad (1)$$

$$S = V0t + at\ /2 \qquad (2)$$

$$V\ - V0\ = 2aS \qquad (3)$$

3. Для решения задачи воспользуемся уравнениями (1) , (2) и уравнением данным в условии задачи $V = 3V_0$ и решим их совместно относительно неизвестного a.

$$\begin{cases} V = 3V_0 \\ V = V_0 + at \\ S = V_0t \end{cases} \qquad \begin{cases} 3V_0 = V_0 + at \\ S = V_0t + at\ /2 \end{cases} \qquad 2V_0 = at, \quad V_0 = at/2$$

Тогда $$S = at^2/2 + at^2/2$$

$$S = 2at^2/2 \qquad S = at^2 \qquad a = S/t^2.$$

Тогда $a = 20\ /4 = 5$ **м/с**

Сделаем проверку решения методом размерности

$$\frac{L}{T^2} = L \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{L}{T^2}$$

Задача № 1 . За время равное 2 с тело, двигаясь прямолинейно и равноускоренно, прошло путь 20 м. Его скорость при этом увеличилась в 3 раза. Определить ускорение тела.

Дано:

$t = 2$ с

$S = 20$ м

$V = 3V_0$

□ a - ?

Решение.

1 Движение равноускоренное с $V_0 \neq 0$

2. Его уравнения $V = V_0 + at$ (1)

$S = V_0 t + at^2/2$ (2) $V^2 - V_0^2 = 2aS$ (3)

3. Для решения задачи воспользуемся уравнениями (1), (2), уравнением данным в условии задачи $V = 3V_0$ и решим их совместно относительно неизвестного a .

$$\begin{cases} V = 3V_0 \\ V = V_0 + at \\ S = V_0 t + at^2/2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3V_0 = V_0 + at \\ S = V_0 t + at^2/2 \end{cases} \quad 2V_0 = at$$

$V_0 = at/2$ Тогда $S = at^2/2 + at^2/2$

$S = 2at^2/2$ $S = at^2$ $a = S/t^2$.

Тогда $a = 20/2^2 = 5$ м/с^2

Сделаем проверку решения методом размерности

$$\frac{L}{T^2} = L \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{L}{T^2}$$

Размерности левой и правой части уравнения совпадают, значит, задача решена правильно.

⇒

Задача №2. Тело, двигаясь от остановки равноускоренно, за первые 5 секунд движения прошло путь 10 м. Какой путь пройдёт это тело за 10 секунд от начала движения?

- Дано :
- $V_0 = 0$
- $t_1 = 5$ с
- $t_2 = 10$ с
- $S_1 = 10$ м
- S_2-?

- Решение.

В задаче описано два случая равноускоренного движения.

- Равноускоренное движение с $V_0 = 0$ описывается следующими уравнениями: $S = at^2/2$ (1) $V = at$ (2) $V^2 = 2aS$ (3)
- Начнём решение задачи «с конца». Для нахождения S_2 воспользуемся уравнением (1) $S_2 = at_2^2/2$. Это уравнение связывает S_2 и t_2, неизвестно a. Так как ускорение одинаково в первом и во втором движении, то его можно определить из уравнения (1) для первого движения $S_1 = at_1^2/2$, так как величины S_1 и t_1 известны. Решая эти уравнения совместно относительно S_2, получим

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{at_1^2}{2} \\ S_2 = \dfrac{at_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{2S_1}{t_1^2} \quad S_2 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{2S_1 t_2^2}{2t_1^2} = S_1\frac{t_2^2}{t_1^2}$$

$$S_2 = S_1 \frac{t_2^{\,2}}{t_1^{\,2}}$$

- Проверим правильность решения по размерности. $L = L \times T^2 \times T^{-2} = L$ т. е $L = L$
- Задача решена правильно. Подставим числовое значение величин и получим ответ задачи.
- $S_2 = 10 \frac{10^2}{5^2} = 40$(м).

Задача № 3. Тело, двигаясь равноускоренно, за 5 секунд движения прошло путь 100 м , а за 10 сек. - 300 м . Определить начальную скорость движения тела.

- Дано:
- $t_1 = 5$ с
- $S_1 = 100$ м
- $t_2 = 10$ с
- $S_2 = 300$ м
- V_0 -?

- Решение.
- 1. В задаче описано два случая равноускоренного движения с начальной скоростью не равной нулю.
- 2. Уравнением, связывающим путь, начальную скорость, время и ускорение, является уравнение пути этого движения.
- Поэтому запишем его для первого и второго случая движения, описанного в задаче.
- $S_1 = V_0t_1 + at_2{}^2/2$ (1) $S_2 = V_0t_2 + at_2{}^2/2$ (2) Начальную скорость V_0 можно определить используя уравнение (1) или используя уравнение (2) , но и в том и в другом для нахождения V_0 надо знать ещё и ускорение **a** . Так как ускорение и в первом, и во втором движении одинаково, то решим уравнения (1) и (2) совместно относительно V_0.

- $S_1 = V_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}$ (1)
- $S_2 = V_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2}$ (2)
- Эту систему уравнений можно решить по – разному.

- Решим её способом подстановки. Из (1) найдём **a** и его значение подставим в уравнение (2) из которого потом определим V_0.
- Из (1) $2S_1 = 2 V_0 t_1 + a t_1^2 \Rightarrow 2S_1 - 2V_0 t_1 = a t_1^2 \Rightarrow$
- $a = \frac{2(S_1 - V_0 t_1)}{t_1^2}$ Подставим это значение в (2)
- $S_2 = V_0 t_2 + \frac{2(S_1 - V_0 t_1) t_2^2}{2 t_1^2} \Rightarrow S_2 t_1^2 = V_0 t_2 t_1^2 + (S_1 - V_0 t_1) t_2^2$
- $S_2 t_1^2 = V_0 t_2 t_1^2 + S_1 t_2^2 - V_0 t_1 t_2^2 \Rightarrow S_2 t_1^2 - S_1 t_2^2 = V_0 t_2 t_1^2 - V_0 t_1 t_2^2$

$\Rightarrow S_2 t_1^2 - S_1 t_2^2 = V_0 (t_1^2 t_2 - t_2^2 t_1)$

- $$V_0 = \frac{S_2 t_1^2 - S_1 t_2^2}{t_1^2 t_2 - t_2^2 t_1}$$
- Мы проделали громоздкие преобразования. Не допустили ли мы ошибку?

- Воспользуемся знанием закономерности размерности и проверим свою работу.
- L T^{-1} = $\dfrac{L \cdot T^2 - L \cdot T^2}{T^3 - T^3} = \dfrac{L \cdot T^2}{T^3} = \dfrac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$

- Подставим числовое значение входящих величин и получим числовой ответ задачи.

$$V_0 = \frac{300 \cdot 5^2 - 100 \cdot 10^2}{5^2 \cdot 10 - 10^2 \cdot 5} = \frac{7500 - 10000}{250 - 500} = \frac{-2500}{-250} = 10 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧИ

Алгоритм решения физических задач методом размерности.

- **Цель занятия:** Сформулировать КРИТЕРИЙ правильности решения физической задачи, не содержащей числовых коэффициентов и тригонометрических функций.
- **Задачи занятия:**
- Критерий истинности уравнения
- Критерий истинности смысла уравнения
- Выдвижение гипотез
- Составление уравнений размерности
- Решение системы уравнений размерности
- Ошибочные гипотезы

- **Выработаем четкий алгоритм решения задач с помощью метода размерности .**

- Если для исследуемого явления установлено, с какими величинами может быть связана искомая величина, но вид этой связи неизвестен, то можно составить уравнение размерностей, в котором в левой части будет стоять символ искомой величины со своим показателем размерности, а в правой — произведение символов величин, от которых искомая величина зависит, но с неизвестными показателями размерности.
- Задача нахождения связи между физическими величинами сводится в этом случае к отысканию значений соответствующих показателей размерности.

- Если, например, требуется определить время t прохождения пути s телом массой M, движущимся поступательно и прямолинейно под действием постоянной силы f, то можно составить уравнение размерности, имеющее вид:
- $T = L^{x} M^{y} (LMT^{-2})^{z}$, (2) где x, y, z — неизвестны.
- Требование равенства показателей размерности левой и правой частей в уравнении (2) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y + z = 0, \\ -2z = 1, \end{cases}$$

откуда следует, что x = y = 1/2, z = —1/2

$$t = c\sqrt{\frac{ms}{f}} \quad . \qquad (3)$$

- Безразмерный коэффициент C, равный, согласно законам механики, $\sqrt{2}$, в рамках анализа размерностей определить нельзя.
- В этом состоит своеобразие метода размерностей.

Устанавливаемая с его помощью **зависимость искомой величины от величин, определяющих исследуемое явление,** находится с точностью **до постоянного коэффициента (или коэффициента, зависящего от безразмерного параметра, например от угла).**

- Для получения точных количественных соотношений нужны дополнительные данные.

Поэтому метод размерностей не является универсальным методом.

Он нашёл плодотворное применение в тех областях физики (гидравлике, аэродинамике и др.),

где строгое решение задачи часто наталкивается на значительные трудности,

в частности из-за **большого числа параметров, определяющих физические явления**.

Таким образом, критерием правильности использованной при

решении задачи формулой является **равенство наименований**, а значит и размерностей обеих частей уравнения (равенства).

Можно записать: [Y]= $M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$

Нужно только определить значения α, β, γ.

Для этого НЕОБХОДИМО научиться формулировать ГИПОТЕЗЫ и усвоить следующий алгоритм

1.Пусть КРОКОДИЛ в квадратных скобках [Y] зависит от Y ~ $\Im\Re\aleph$ (это не ошибка, это некие фантастические величины).

2.Тогда их размерности $[\Im][\Re][\aleph]$, если записанная нами формула верна, могут быть представлены $M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$

3.Пусть $[\Im]=\left(MLT^{-2}\right)^{x}$, а $[\Re]=L^{y}$ и $[\aleph]=M^{z}$.

4.Тогда их совокупность $\left(MLT^{-2}\right)^{x}L^{y}M^{z}$ должна быть $M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$

5.Упрощая $\left(MLT^{-2}\right)^{x}L^{y}M^{z}$ к виду $M^{x+z}L^{x+y}T^{-2x} = {}^{\alpha}\ {}^{\beta}\ {}^{\gamma}$

приравниваем показатели и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha = x+z,\\ \beta = x+y,\\ \gamma = -2x.\end{cases}$$

Решив которую относительно x, y, z, получим необходимое нам уравнение.

Главным в рассматриваемом алгоритме является **последовательность шагов** :

- *Выдвигаем гипотезу.*
- *Выписываем размерности “аргументов”.*
- *Записываем “совокупность” (произведение) аргументов.*
- *Приравниваем произведение к* $M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$ *.*
- *Составляем систему уравнений из показателей.*
- *Решаем систему.*
- *Найденные показатели распределяем по аргументам.*
- *Собираем из аргументов конечную формулу.*