

---

# **Проверка правильности традиционного решения задач с помощью размерности**

---

# **Цель занятия:** научиться проверять правильность традиционного решения задач с помощью размерности

---

## **Задачи занятия:**

- 1. Рассмотреть задачи, описывающие различное движение, в которых применяются различные уравнения для определения пути.
  - 2. Сделать вывод, что в правильно составленном уравнении, размерность правой его части равна размерности его левой части.
  - 3. Доказать, что метод размерностей может подсказать ошибочность физического направления решения, но не может подсказать ошибочность математического действия.
-

Уникальность любой физической величины заключена в ее размерности:  $M^\alpha L^\beta T^\gamma$ . Именно совокупность  $\alpha, \beta, \gamma$  значений и определяют размерность физической величины.

<p>1.Площадь прямоугольника <math>S=ab</math></p>	$M^2 = M \cdot M' \quad m^2 = m^2$
<p>2.Путь <math>S=Vt</math></p>	$m = (m/c)c = m$
<p>3.Путь при равноускоренном движении <math display="block">S = \frac{at^2}{2}</math></p>	$m = (m/c^2) c^2 \sqrt{2} = m.$
<p>4.Сила Архимеда <math display="block">F_a = \rho_{ж} g V_m</math></p>	<p>Вывод: <math display="block">H = \frac{кг}{м^3} \cdot \frac{м}{с^2} \cdot м^3 = \frac{кг \cdot м}{с^2} = H</math></p>
<p>5.Предложите и докажете самостоятельно</p>	

**Зная закономерность размерности, мы можем произвести размерностную проверку любой физической формулы, сколько бы слагаемых членов она не содержала и какими бы «страшными» они не были.**

---

Проверьте, пожалуйста, несколько известных уравнений кинематики, используя символы MLT

1.  $S = Vt$   $L = LT^{-1} \cdot T = L$

2.  $S = \frac{at^2}{2}$

3.  $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$

4.  $V = at$

5.  $V = V_0 + at$

---

# Проверим

---

- 1.  $S = Vt$   $L = LT^{-1} \cdot T = L$
  - 2.  $S = \frac{at^2}{2}$   $L = LT^{-2} \cdot T^2 = L$
  - 3.  $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$   $L = LT^{-1} \cdot T + LT^{-2} \cdot T^2 = L + L = L$
  - 4.  $V = at$   $LT^{-1} = LT^{-2} \cdot T = LT^{-1}$
  - 5.  $V = V_0 + at$   $LT^{-1} = LT^{-1} + LT^{-2} \cdot T = LT^{-1} + LT^{-1} = LT^{-1}$
  
  - **Вывод:** для всех рассмотренных уравнений размерность слева равна размерности справа.
-

Рассмотрим решение нескольких задач.

1. Определить расстояние между Землёй и Солнцем, если луч света, двигаясь со скоростью  $3 \times 10^8$  м/с, проходит это расстояние примерно за 8,5 минут?

8

<p>1.</p> $V = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$ $t = 8,5 \text{ мин} = 510 \text{ с}$	<p>Решения.</p> <p>1. Движение равномерное</p> <p>2. <math>S = V t</math></p> <p>3. <math>S = 3 \times 10^8 \times 510 = 153 \times 10^8 \text{ (м)}</math></p>
<p>S - ?</p>	

2. Какое расстояние по прямой может пройти ракета за 1 минуту, двигаясь от места старта с ускорением  $20 \text{ м/с}^2$ ?

2.  $V_0 = 0$

$a = 20 \text{ м/с}^2$

$t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$

$S = ?$

1. Движение равноускоренное с  $V_0 = 0$

2.  $S = \frac{at^2}{2}$

3.  $S = 20 \times 60^2 / 2 = 36000 \text{ (м)}$

3. Автомобиль, двигаясь со скоростью 54 км/ч, пошел на обгон и в течение 10 секунд двигался с ускорением  $2 \text{ м/с}^2$   
Какой путь прошел автомобиль за это время?

$$V_0 = 54 \text{ км/ч} = 15 \text{ м/с}$$

$$a = 2 \text{ м/с}^2$$

$$t = 10 \text{ с}$$

S - ?

1. Движение  
равноускоренное  
с  $V_0 \neq 0$

$$2. S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

3.

$$S = 15 \times 10 + 2 \times 10^2 / 2 = 250(\text{м})$$



4. Автомобиль, двигаясь со скоростью 54 км/ч, перед поворотом в течение 10 секунд двигался равнозамедленно с ускорением  $-2 \text{ м/с}^2$

Какой путь прошел автомобиль за это время?

$$V_0 = 54 \text{ км/ч} = 15 \text{ м/с}$$

$$a = 2 \text{ м/с}^2$$

$$t = 10 \text{ с}$$

S - ?

1. Движение  
равнозамедленное

$$2. \quad S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

3.

$$S = 15 \times 10 - 2 \times 10^2 / 2 = 50 \text{ (м)}$$

# Проанализируем решение этих задач.

---

□ **1. Что общего было в этих задачах?**

( Определялся путь  $S$  )

□ **2. В чём различие в этих задачах?**

( В каждой задаче описывается различное движение, а, значит, применяются различные уравнения для определения пути )

То есть различие в том, что одна и та же величина (путь) определяется через различные величины.

В №1 через  $V$  и  $t$ . В №2 через  $a$  и  $t$ . В №3 и №4 через  $V_0$ ,  $a$ ,  $t$ .

□ Эти величины имеют различные размерности, но в результате произведенных действий получается во всех случаях одна и та же размерность - метр.

---

Произведём предлагаемые действия только с размерностями, не используя модулей этих величин

---

□ 1.  $S = V t = \frac{L}{T} T = L$

□ 2.  $S = \frac{at^2}{2} = \frac{L}{T^2} T^2 = L$

□ 3.4.  $S = V_0 t \pm \frac{at^2}{2} = \frac{L}{T} T \pm \frac{L}{T^2} T^2 = L \pm L = L$

□ Отсюда следует закономерность:

в правильно составленном уравнении, размерность правой его части равна размерности его левой части.

---

Эту закономерность можно применить для проверки правильности решения задач

---

**Допустим в задаче №3 допустили ошибку (она очень часто встречается), записав уравнение так**

$$S = v_0 + \frac{at^2}{2}, \text{ тогда } S = 15 + 2 \times 10 / 2 = 65 \text{ (м).}$$

Если правильный ответ неизвестен, как проверить правильность решения и найти причину ошибки

---

То ли ошибка в вычислении, то ли в преобразовании, то ли в неправильном написании, правильно выбранного уравнения?

---

- Проверяя правильность решения по наименованию можно найти причину ошибки. Как это сделать?
- Вместо модулей величин подставить размерности величин и сравнить размерности левой и правой части уравнения, то есть использовать, указанную выше, закономерность.

$$L = \frac{L}{T} + \frac{L}{T^2} T^2 = \frac{L}{T} + L = \frac{L + LT}{L} = \frac{L(1 + T)}{L} = 1 + T$$

- Отсюда следует:  $L \neq 1 + T$ . Задача решена неверно.
-

**Где ошибка?** В правой части уравнение представляет собой двучлен. Одна его часть имеет размерность  $L$ , а другая  $L/T$ .

---

**Как из этого выражения  $L/T$  получить  $L$ ?**

- Умножив его на  $T$ , получим размерность первого члена  $L$ .
- Тогда первый член и второй член правой части уравнения будут иметь размерность  $L$  и  $L + L = L$ ,

то есть левая и правая части будут иметь одинаковую размерность.

**Значит, первый член правой части уравнения должен иметь вид не  $V_0$ , а  $V_0 t$ .**

---

- Теперь предположим, что при решении задачи допущена другая ошибка:

в уравнении

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

вместо знака «+» поставил знак «-».

- Поможет ли здесь метод размерности указать на ошибку?
  - Отсюда следует второй вывод: **Метод размерностей может подсказать ошибочность физического направления решения, но не может подсказать ошибочность математического действия.**
-

Решим несколько задач по кинематике и сделаем проверку их правильности решения, применив метод размерности для проверки.

---

□ Задача № 1 .

**За время равное 2 с тело, двигаясь прямолинейно и равноускоренно, прошло путь 20 м. Его скорость при этом увеличилась в 3 раза. Определить ускорение тела.**

---



**Решение.**

---

**1 Движение равноускоренное с  $V_0 \neq 0$ .**

**2. Его уравнения**

$$V = V_0 + at \quad (1)$$

$$S = V_0t + at^2 / 2 \quad (2)$$

$$V^2 - V_0^2 = 2aS \quad (3)$$

---

3. Для решения задачи воспользуемся уравнениями (1), (2) и уравнением данным в условии задачи  $V = 3V_0$  и решим их совместно относительно неизвестного  $a$ .

---

$$V = 3V_0$$

$$V = V_0 + at$$

$$S = V_0t$$

$$3V_0 = V_0 + at$$

$$S = V_0t + at^2/2$$

$$2V_0 = at, \quad V_0 = at/2$$

Тогда  $S = at^2/2 + at^2/2$

$$S = 2at^2/2 \quad S = at^2 \quad a = S/t^2.$$

Тогда  $a = 20/4 = 5 \text{ м/с}$

---

## Сделаем проверку решения методом размерности

---

$$\frac{L}{T^2} = L \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{L}{T^2}$$

---

**Задача № 1 . За время равное 2 с тело, двигаясь прямолинейно и равноускоренно, прошло путь 20 м. Его скорость при этом увеличилась в 3 раза. Определить ускорение тела.**

**Дано:**

$$t = 2 \text{ с}$$

$$S = 20 \text{ м}$$

$$V = 3 V_0$$

□ **a - ?**

**Решение.**

**1 Движение равноускоренное с  $V_0 \neq 0$**

**2. Его уравнения  $V = V_0 + at$  (1)**

**$S = V_0 t + at^2 / 2$  (2)       $V^2 - V_0^2 = 2aS$  (3)**

**3. Для решения задачи воспользуемся уравнениями (1), (2), уравнением данным в условии задачи  $V = 3 V_0$  и решим их совместно относительно неизвестного  $a$ .**

$$\left[ \begin{array}{l} V = 3V_0 \\ V = V_0 + at \\ S = V_0 t + at^2 / 2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 3V_0 = V_0 + at \quad 2V_0 = at \\ S = V_0 t + at^2 / 2 \end{array} \right.$$

**$V_0 = at/2$       Тогда       $S = at^2/2 + at^2/2$**

**$S = 2 at^2/2$        $S = at^2$        $a = S/t^2$ .**

**Тогда  $a = 20 / 2^2 = 5 \text{ м/с}^2$**

**Сделаем проверку решения методом размерности**

$$\frac{L}{T^2} = L \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{L}{T^2}$$

**Размерности левой и правой части уравнения совпадают, значит, задача решена правильно.**

→  
**Задача №2.** Тело, двигаясь от остановки равноускоренно, за первые 5 секунд движения прошло путь 10 м. Какой путь пройдёт это тело за 10 секунд от начала движения?

- **Дано :**
- $V_0 = 0$
- $t_1 = 5 \text{ с}$
- $t_2 = 10 \text{ с}$
- $S_1 = 10 \text{ м}$
- $S_2 = ?$
- Решение.  
В задаче описано два случая равноускоренного движения.  
□ Равноускоренное движение с  $V_0 = 0$  описывается следующими уравнениями:  $S = at^2/2$  (1)  $V = at$  (2)  $V^2 = 2aS$  (3)  
□ Начнём решение задачи «с конца». Для нахождения  $S_2$  воспользуемся уравнением (1)  $S_2 = at_2^2/2$ . Это уравнение связывает  $S_2$  и  $t_2$ , неизвестно  $a$ . Так как ускорение одинаково в первом и во втором движении, то его можно определить из уравнения (1) для первого движения  $S_1 = at_1^2/2$ , так как величины  $S_1$  и  $t_1$  известны. Решая эти уравнения совместно относительно  $S_2$ , получим

$$\begin{cases} S_1 = \frac{at_1^2}{2} \\ S_2 = \frac{at_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2S_1}{t_1^2} \quad S_2 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{2S_1 t_2^2}{2t_1^2} = S_1 \frac{t_2^2}{t_1^2}$$

$$S_2 = S_1 \frac{t_2^2}{t_1^2}$$

---

- Проверим правильность решения по размерности.  
 $L = L \times T^2 \times T^{-2} = L$  т. е.  $L = L$
  - Задача решена правильно. Подставим числовое значение величин и получим ответ задачи.
  - $S_2 = 10 \frac{10^2}{5^2} = 40(\text{м})$ .
-

Задача № 3. Тело, двигаясь равноускоренно, за 5 секунд движения прошло путь 100 м , а за 10 сек. - 300 м . Определить начальную скорость движения тела.

---

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Дано:                 | <input type="checkbox"/> Решение.  |
| <input type="checkbox"/> $t_1 = 5 \text{ с}$   | <input type="checkbox"/> 1. В задаче описано два случая равноускоренного движения с начальной скоростью не равной нулю.  |
| <input type="checkbox"/> $S_1 = 100 \text{ м}$ | <input type="checkbox"/> 2. Уравнением, связывающим путь, начальную скорость, время и ускорение, является уравнение пути этого движения.   |
| <input type="checkbox"/> $t_2 = 10 \text{ с}$  | <input type="checkbox"/> Поэтому запишем его для первого и второго случая движения, описанного в задаче.   |
| <input type="checkbox"/> $S_2 = 300 \text{ м}$ | <input type="checkbox"/> $S_1 = V_0 t_1 + a t_1^2 / 2$ (1) $S_2 = V_0 t_2 + a t_2^2 / 2$ (2)   |
| <input type="checkbox"/> $V_0$ -?              | <input type="checkbox"/> Начальную скорость $V_0$ можно определить используя уравнение (1) или используя уравнение (2) , но и в том и в другом для нахождения $V_0$ надо знать ещё и ускорение $a$ . Так как ускорение и в первом, и во втором движении одинаково, то решим уравнения (1) и (2) совместно относительно $V_0$ . |
-

$$\square S_1 = V_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} \quad (1)$$

$$\square S_2 = V_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2} \quad (2)$$

□ Эту систему уравнений можно решить по – разному.

□ Решим её способом подстановки. Из (1) найдём **a** и его значение подставим в уравнение (2) из которого потом определим **V<sub>0</sub>**.

$$\square \text{Из (1)} \quad 2S_1 = 2V_0 t_1 + a t_1^2 \Rightarrow 2S_1 - 2V_0 t_1 = a t_1^2 \Rightarrow$$

$$\square a = \frac{2(S_1 - V_0 t_1)}{t_1^2} \quad \text{Подставим это значение в (2)}$$

$$\square S_2 = V_0 t_2 + \frac{2(S_1 - V_0 t_1) t_2^2}{2 t_1^2} \Rightarrow S_2 t_1^2 = V_0 t_2 t_1^2 + (S_1 - V_0 t_1) t_2^2$$

$$\square S_2 t_1^2 = V_0 t_2 t_1^2 + S_1 t_2^2 - V_0 t_1 t_2^2 \Rightarrow S_2 t_1^2 - S_1 t_2^2 = V_0 t_2 t_1^2 - V_0 t_1 t_2^2$$

$$\Rightarrow S_2 t_1^2 - S_1 t_2^2 = V_0 (t_1^2 t_2 - t_2^2 t_1)$$

$$\square V_0 = \frac{S_2 t_1^2 - S_1 t_2^2}{t_1^2 t_2 - t_2^2 t_1}$$

□ Мы проделали громоздкие преобразования.

~~□ Не допустили ли мы ошибку?~~



□ Воспользуемся знанием закономерности размерности и проверим свою работу.

$$\square \quad L T^{-1} = \frac{L \cdot T^2 - L \cdot T^2}{T^3 - T^3} = \frac{L \cdot T^2}{T^3} = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$$

---

□ Подставим числовое значение входящих величин и получим числовой ответ задачи.

$$V_0 = \frac{300 \cdot 5^2 - 100 \cdot 10^2}{5^2 \cdot 10 - 10^2 \cdot 5} = \frac{7500 - 10000}{250 - 500} = \frac{-2500}{-250} = 10 \text{ м/с}$$

**ЗАДАЧИ**

---

# Алгоритм решения физических задач методом размерности.

---

- **Цель занятия:** Сформулировать КРИТЕРИЙ правильности решения физической задачи, не содержащей числовых коэффициентов и тригонометрических функций.
  - **Задачи занятия:**
    - Критерий истинности уравнения
    - Критерий истинности смысла уравнения
    - Выдвижение гипотез
    - Составление уравнений размерности
    - Решение системы уравнений размерности
    - Ошибочные гипотезы
-

## □ **Выработаем четкий алгоритм решения задач с помощью метода размерности .**

---

- Если для исследуемого явления установлено, с какими величинами может быть связана искомая величина, но вид этой связи неизвестен, то можно составить уравнение размерностей, в котором в левой части будет стоять символ искомой величины со своим показателем размерности, а в правой — произведение символов величин, от которых искомая величина зависит, но с неизвестными показателями размерности.
  - Задача нахождения связи между физическими величинами сводится в этом случае к отысканию значений соответствующих показателей размерности.
-

- Если, например, требуется определить время  $t$  прохождения пути  $s$  телом массой  $M$ , движущимся поступательно и прямолинейно под действием постоянной силы  $f$ , то можно составить уравнение размерности, имеющее вид:

- $T = L^x M^y (LMT^{-2})^z$ , (2) где  $x, y, z$  — неизвестны.

- Требование равенства показателей размерности левой и правой частей в уравнении (2) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y + z = 0, \\ -2z = 1, \end{cases} \quad \text{откуда следует, что } x = y = 1/2, \quad z = -1/2$$
$$t = c \sqrt{\frac{ms}{f}} \quad . \quad (3)$$

- Безразмерный коэффициент  $C$ , равный, согласно законам механики,  $\sqrt{2}$ , в рамках анализа размерностей определить нельзя.

- В этом состоит своеобразие метода размерностей.

Устанавливаемая с его помощью **зависимость искомой величины от величин, определяющих исследуемое явление**, находится с точностью **до постоянного коэффициента** (или коэффициента, зависящего от безразмерного параметра, например от угла).

---

- Для получения точных количественных соотношений нужны дополнительные данные.

Поэтому метод размерностей не является универсальным методом.

---

Он нашёл плодотворное применение в тех областях физики (гидравлике, аэродинамике и др.),

---

где строгое решение задачи часто наталкивается на значительные трудности,

в частности из-за **большого числа параметров, определяющих физические явления.**

---

Таким образом, критерием  
правильности использованной при

решении задачи формулой является  
**равенство наименований**, а  
значит и размерностей обеих частей  
уравнения (равенства).

Можно записать:  $[Y] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$   
**Нужно только определить**  
**значения**  
 $\alpha, \beta, \gamma$

---

Для этого НЕОБХОДИМО научиться формулировать ГИПОТЕЗЫ и усвоить следующий алгоритм

1. Пусть КРОКОДИЛ в квадратных скобках  $[Y]$  зависит от  $Y \sim \mathfrak{J}\mathfrak{R}\mathfrak{N}$  (это не ошибка, это некие фантастические величины).

2. Тогда их размерности  $[\mathfrak{J}][\mathfrak{R}][\mathfrak{N}]$ , если записанная нами формула верна, могут быть представлены  $M^\alpha L^\beta T^\gamma$

3. Пусть  $[\mathfrak{J}] = (MLT^{-2})^x$ , а  $[\mathfrak{R}] = L^y$  и  $[\mathfrak{N}] = M^z$ .

4. Тогда их совокупность  $(MLT^{-2})^x L^y M^z$  должна быть  $M^\alpha L^\beta T^\gamma$

5. Упрощая  $(MLT^{-2})^x L^y M^z$  к виду  $M^{x+z} L^{x+y} T^{-2x} = M^\alpha L^\beta T^\gamma$

приравниваем показатели и получаем систему уравнений:

**Решив которую относительно  $x, y, z$ , получим необходимое нам уравнение.**

$$\begin{cases} \alpha = x + z, \\ \beta = x + y, \\ \gamma = -2x. \end{cases}$$



# Главным в рассматриваемом алгоритме является **последовательность шагов** :

---

- *Выдвигаем гипотезу.*
  - *Выписываем размерности "аргументов".*
  - *Записываем "совокупность" (произведение) аргументов.*
  - *Приравниваем произведение к  $M^\alpha L^\beta T^\gamma$ .*
  - *Составляем систему уравнений из показателей.*
  - *Решаем систему.*
  - *Найденные показатели распределяем по аргументам.*
  - *Собираем из аргументов конечную формулу.*
-