Национальный исследовательский
Томский политехнический университет

Кафедра теоретической и экспериментальной физики

ПОСТНИКОВА ЕКАТЕРИНА ИВАНОВНА
кандидат педагогических наук, доцент

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Гармонические колебания

Колебания (колебательные движения)- изменения состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебания могут иметь различную физическую природу.

Колебания различают:

- по характеру физических процессов
- по характеру зависимости от времени.

По характеру физических процессов:

Механические

колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, сооружений, волнение жидкостей

Электромагнитные

колебания переменного электрического поля в цепи, колебания векторов ***E*** и ***B***

Электромеханические

колебания мембраны телефона, диффузора электродинамика

По характеру зависимости от времени:

Периодические

Непериодические

По способу возбуждения колебаний:

- ***Свободные***
- ***Вынужденные***
- ***Параметрические***
- ***Автоколебания***

Система, совершающая колебания, называется ***колебательной системой***.

Колебания называются ***периодическими***, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

Периодические процессы можно представить как наложение гармонических колебаний.

Гармонические колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Периодом колебаний (T) называется наименьший промежуток времени, через который повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение.

Частота периодических колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Механические гармонические колебания

Рассмотрим прямолинейные гармонические колебания материальной точки вдоль оси x около положения равновесия, совпадающего с началом координат $x = 0$.

Зависимость координаты x от времени t задается уравнением

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

A – максимальное значение колеблющейся величины, называется амплитудой колебаний, ω – круговая (циклическая) частота, $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t.

Скорость колеблющейся точки меняется по закону:

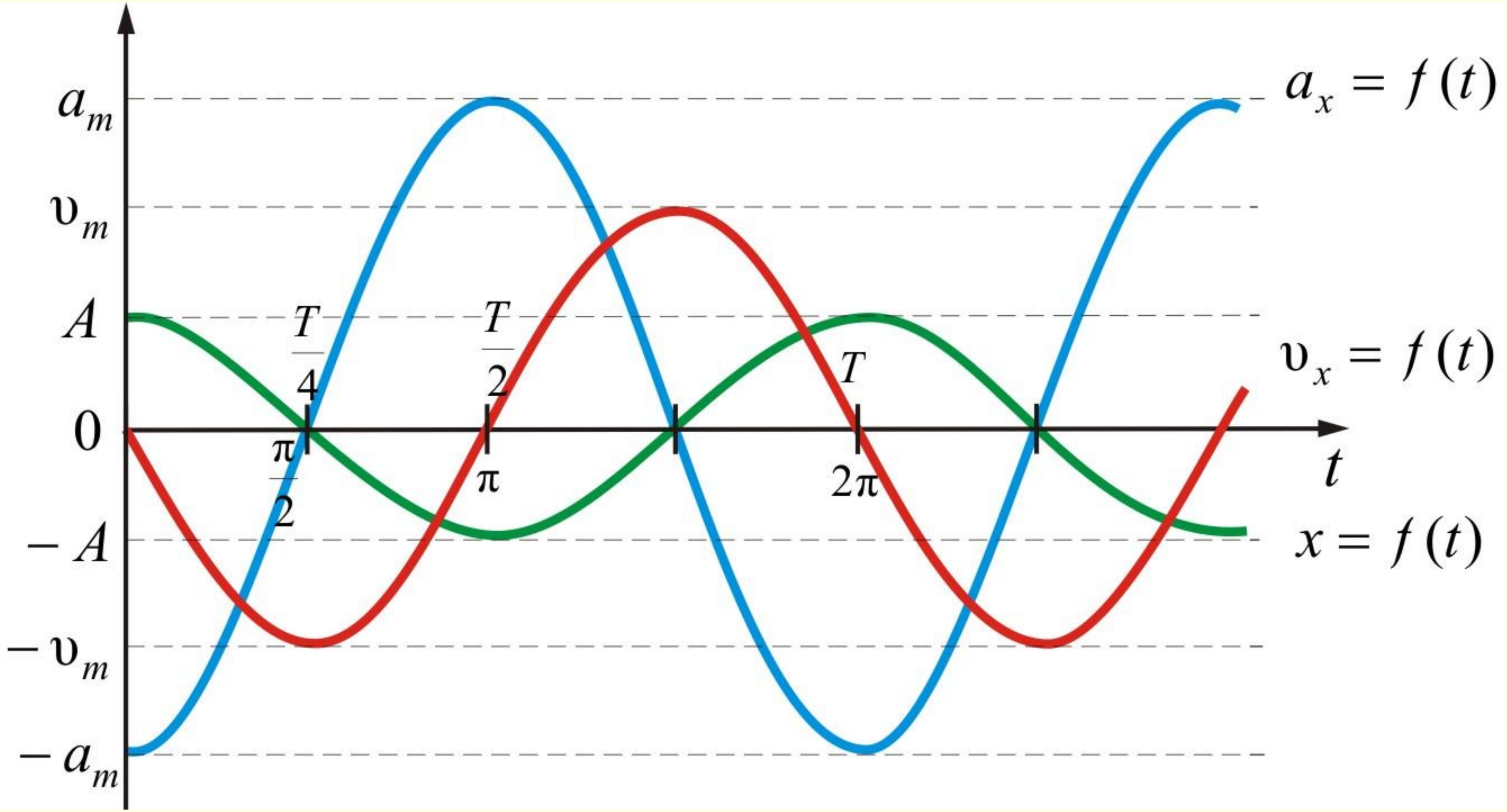
$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$$

Ускорение:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$



a_m
υ_m
A
0
$-A$
$-\upsilon_m$
$-a_m$
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
T
$\frac{\pi}{2}$
π
2π
t
$a_x = f(t)$
$\upsilon_x = f(t)$
$x = f(t)$

Сила, действующая на точку массой *m*:

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

Отсюда:

- ✔ модуль силы пропорционален смещению материальной точки из положения равновесия;

- ✔ направления силы и смещения противоположны.

Следовательно, сила всегда направлена к положению равновесия.

Такие силы называют ***возвращающими***.

Зависимость $F = ma = -m\omega^2 x$ характерна для ***упругой*** силы.

Силы другой физической природы, удовлетворяющие тому же виду зависимости, называют ***квазиупругими***.

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left(1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right).$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F:

$$E_p = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} =$$

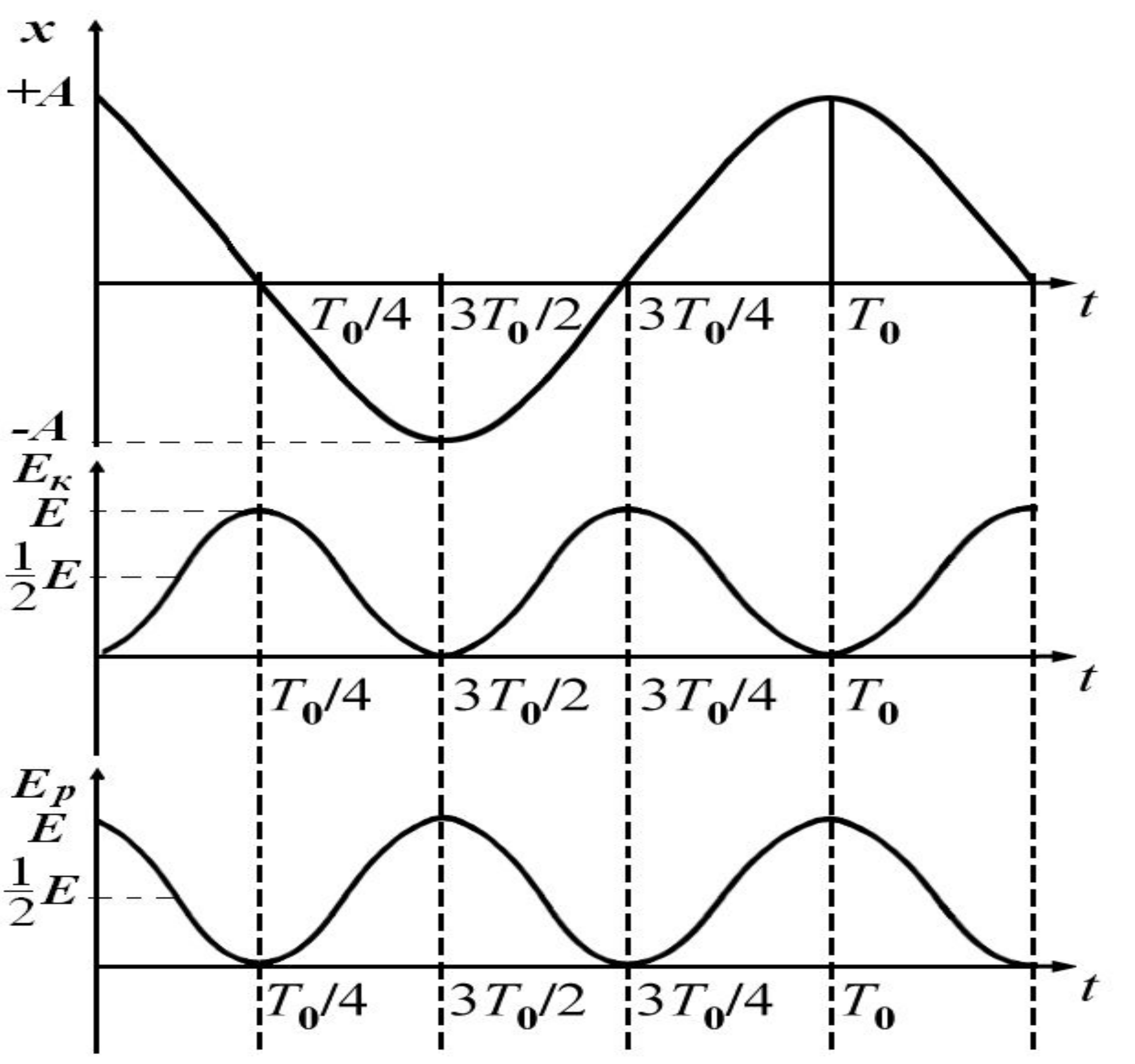
$$= \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right).$$

Полная энергия:

$$E = E_к + E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{k A^2}{2} = const,$$

где $k = m\omega^2$.


x
+A
-A
t
T0/4
3T0/2
3T0/4
T0
Eк
E
1/2 E
Ep

Гармонический осциллятор

Осциллятор – система, совершающая свободные колебания.

Свободные (собственные) колебания совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешнего воздействия на колебательную систему.

Классический осциллятор – механическая система, совершающая колебания около положения устойчивого равновесия (например, пружинный маятник).

Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Решение этого уравнения:

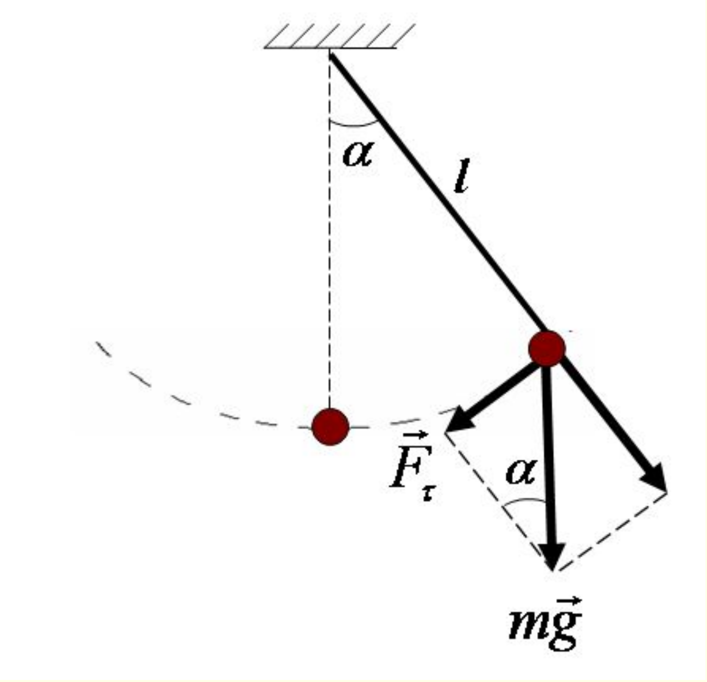
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Здесь x – колеблющаяся величина.

Математический маятник

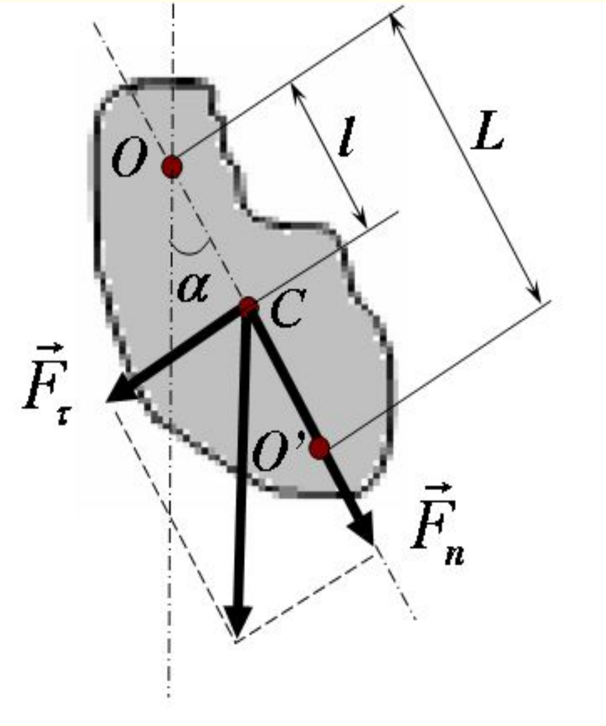
Идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и совершающей колебания под действием силы тяжести.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Физический маятник

Твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку О, не совпадающую с центром масс тела С. Точку О называют точкой подвеса.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

где L - ***приведенная длина физического маятника***.

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

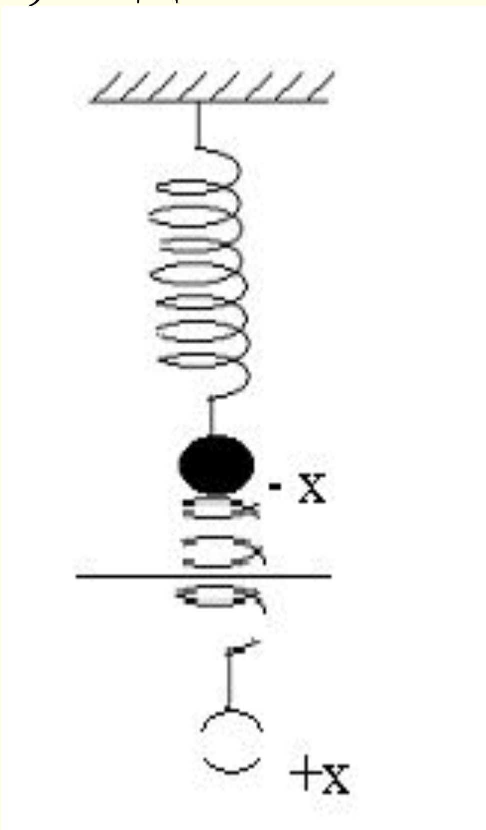
$$L = \frac{J}{ml},$$

J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Пружинный маятник

Тело массы m, подвешенное на абсолютно упругой пружине и совершающее прямолинейные гармонические колебания под действием упругой силы ***F* = -*kx***, где k – коэффициент жесткости пружины.

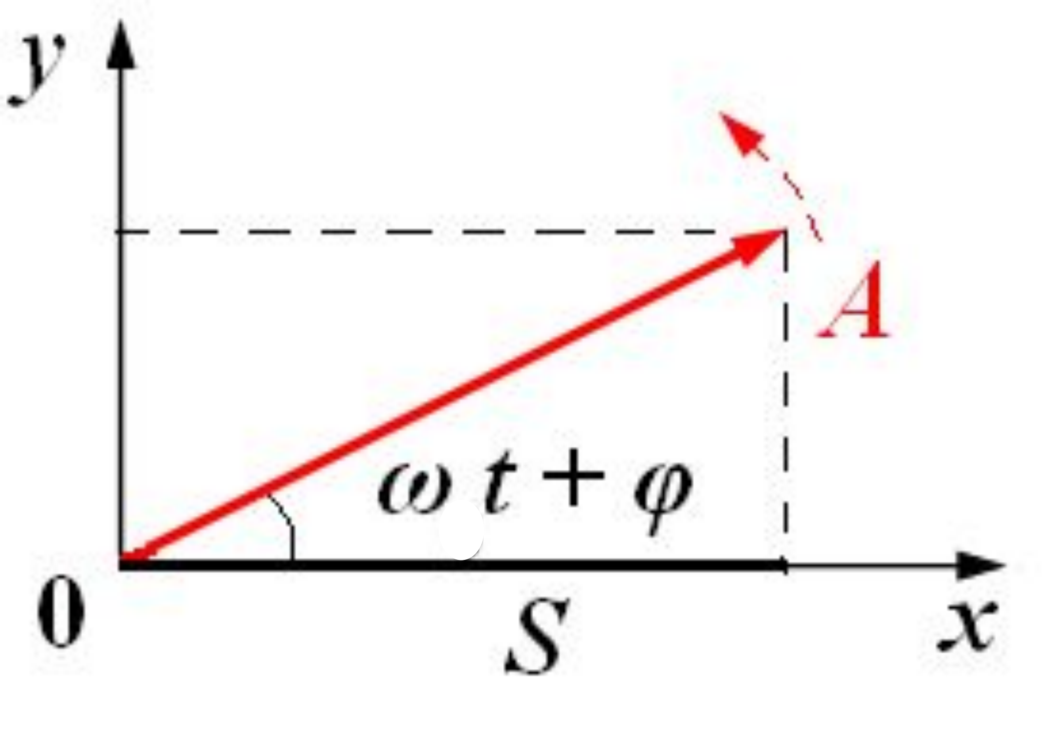
Уравнение движения: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$

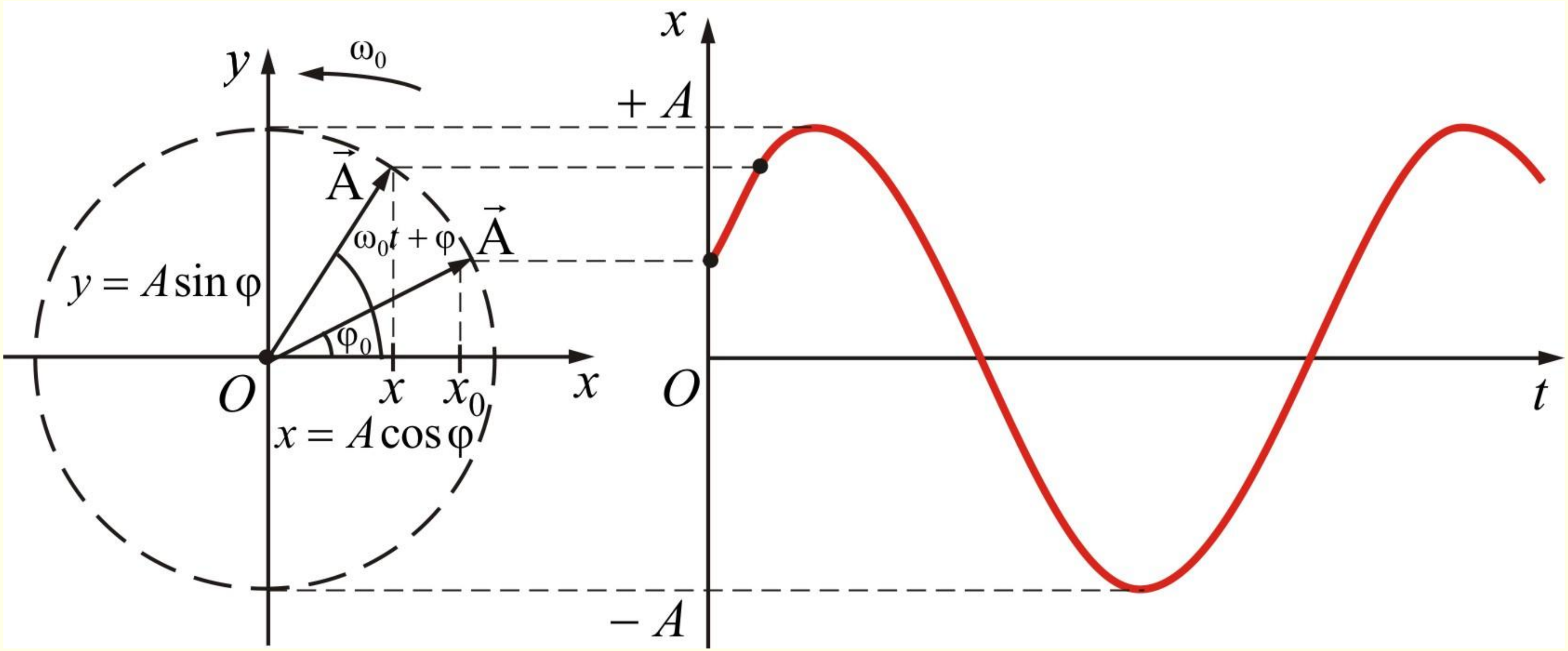


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Сложение гармонических колебаний

Способ представления колебаний с помощью вращающегося вектора амплитуды





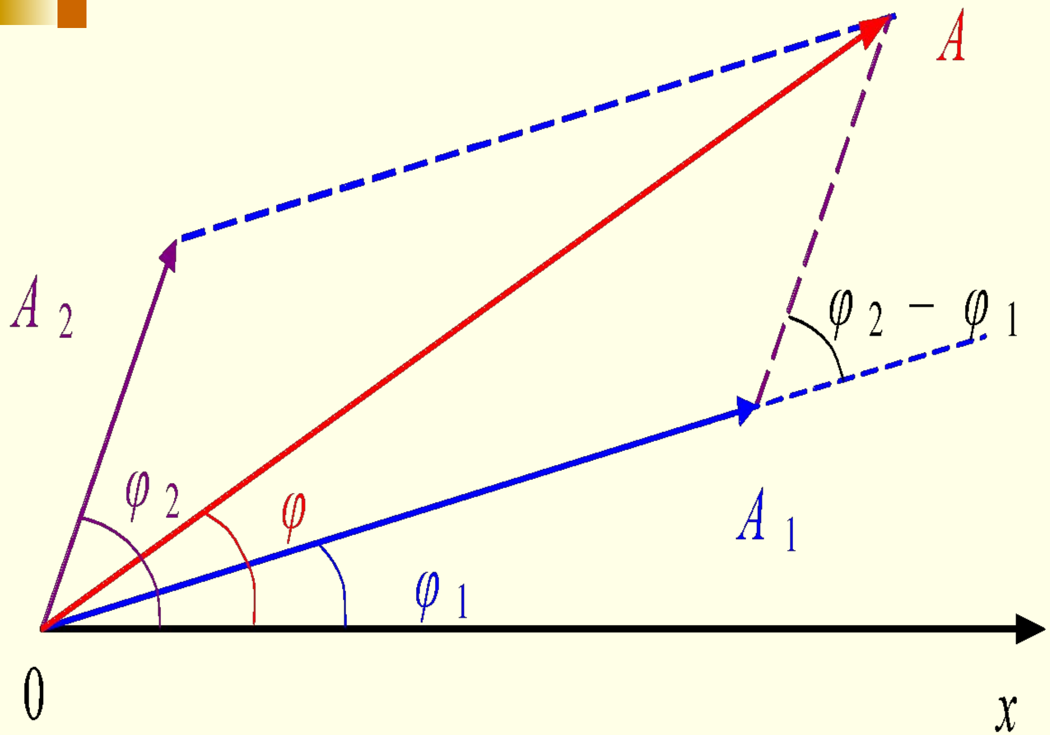
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad x_0 = A\cos\varphi_0$$

Сложение двух одинаково направленных колебаний

- ***Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты***

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\}$$

Разность фаз этих колебаний не зависит от времени t, т.е. $(\varphi_1 - \varphi_2) = const$, такие колебания называются ***когерентными***



Для нахождения результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \quad где$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Если колебания ***синфазны***: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, следовательно, $A = A_1 + A_2$, происходит усиление результирующего колебания.

Если колебания в ***противофазе***: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, следовательно, $A = |A_1 - A_2|$, происходит ослабление результирующего колебания.

✔***Некогерентные колебания***: $\omega_1 \neq \omega_2$, т.е. разность фаз колебаний $(\omega_1 + \varphi_1 - \omega_2 - \varphi_2) \neq const$ и изменяется с течением времени t.

При наложении таких колебаний получаются ***негармоническое*** результирующее колебание.

Если амплитуды двух гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой, одинаковы $A_1 = A_2 = A$, а их частоты мало отличаются друг от друга $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega_1$, то результирующее сложение этих колебаний получается с периодически изменяющейся амплитудой $A_б$.

Периодические изменения амплитуды от минимального значения до максимального называются **биениями**.

Уравнения колебаний имеют вид :

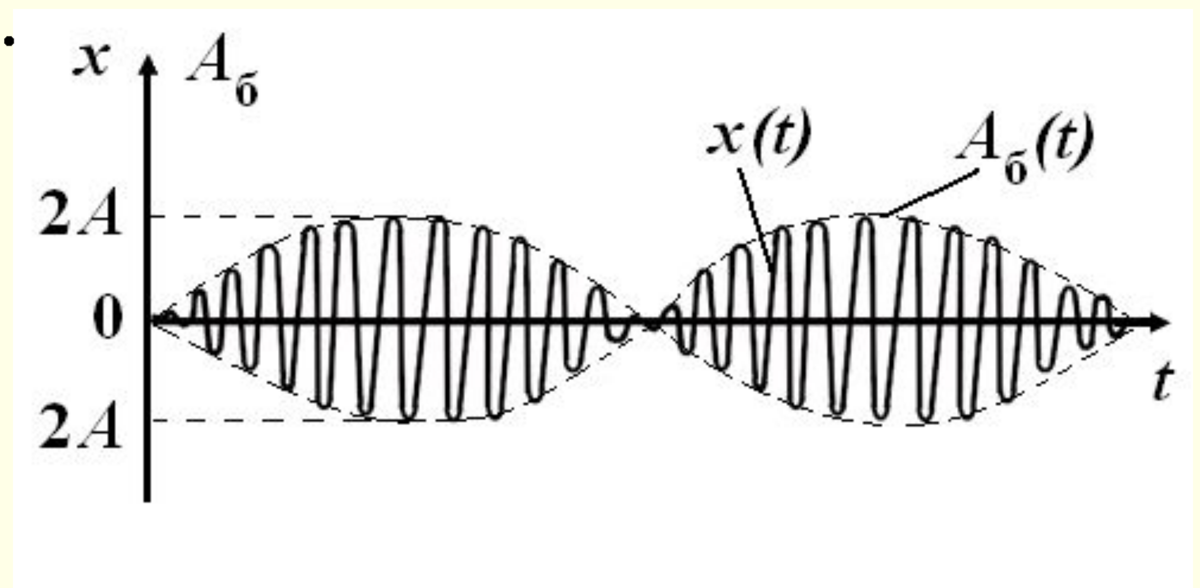
$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t, \\ x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{cases}$$

Уравнение результирующего колебания

$$x = x_1 + x_2 = A\left(\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\omega}{2}t + \underbrace{\frac{\Delta\omega}{2}}_{<<\omega}t\right)\cdot\cos\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) =$$

$$= \underbrace{2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t}_{A_б}\cdot\cos\omega t.$$



Результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой ω, амплитуда $A_б$ которого изменяется по периодическому закону:

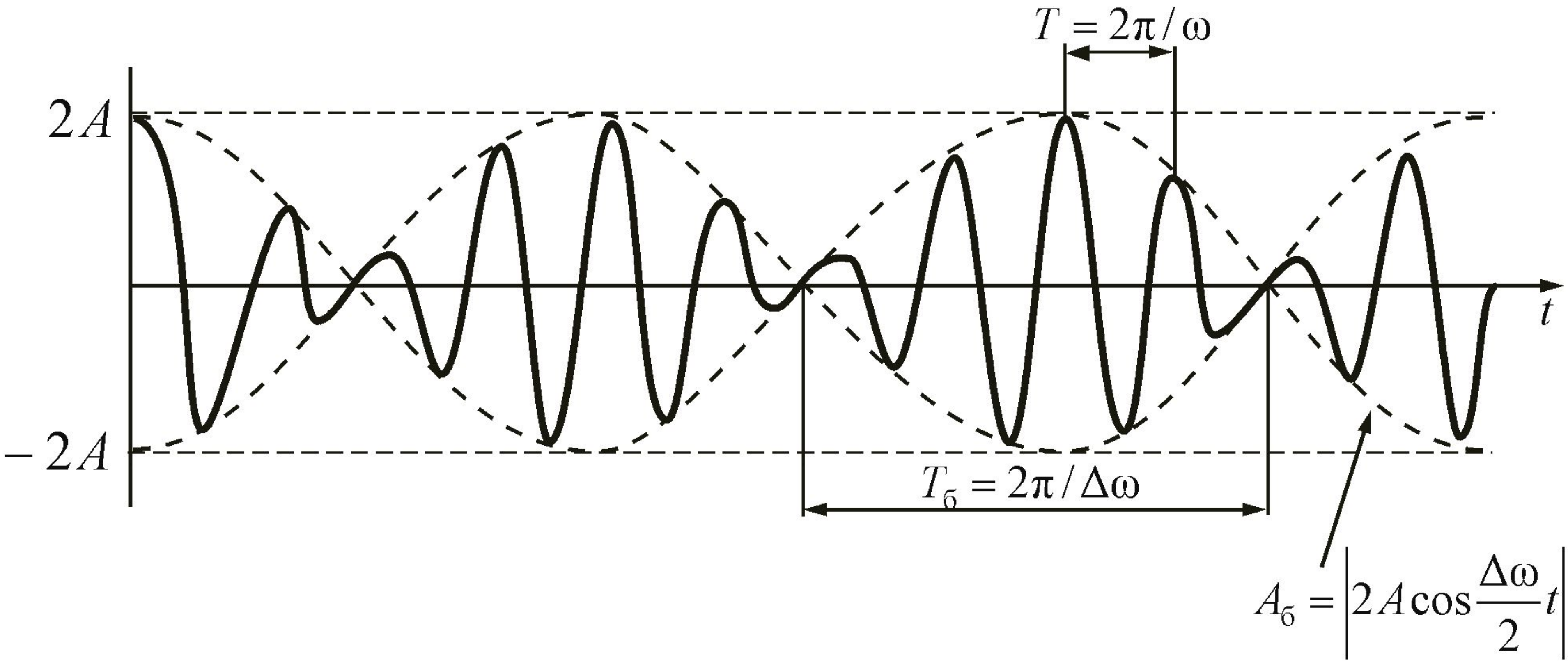
$$A_б = \left| 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|.$$

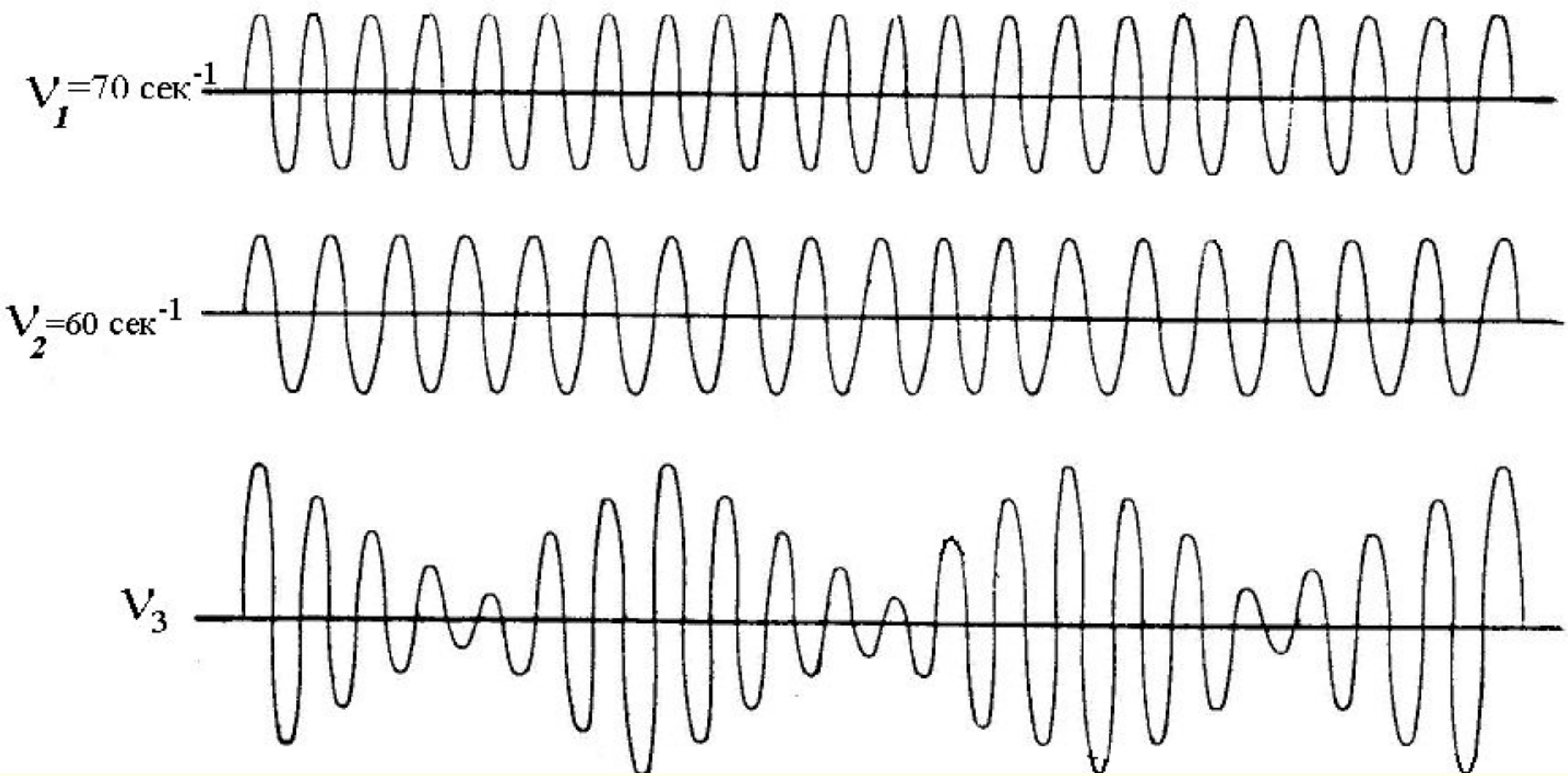
Частота изменения $A_б$ в два раза больше частоты изменения косинуса (т.к. берется по модулю), т.е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний:

$$\omega_б = \Delta\omega.$$

Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$


$T = 2\pi/\omega$
$2A$
$-2A$
t
$T_б = 2\pi/\Delta\omega$
$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$



ν_1=70 сек$^{-1}$
ν_2=60 сек$^{-1}$
ν_3

✔***Гармонические колебания*** совпадают по направлению и имеют <u>*кратные циклические частоты*</u> ω, 2ω, 3ω и т. д. В результате их сложения получаются периодические негармонические колебания с периодом $T = 2\pi / \omega$.

В свою очередь, любое сложное периодическое колебание $S = f(t)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными *основной* циклической частоте $\omega_0 = 2\pi / T$, где T – период колебаний:

$$S = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \ldots + A_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Такое представление периодической функции $f(t)$ называется ***разложением функции в ряд Фурье*** или гармоническим анализом сложного периодического колебания.

Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$ … называются *первой (основной), второй, третьей* и т.д. *гармониками* сложного периодического колебания $S = f(t)$.

Совокупность этих гармоник образуют *спектр колебаний* $S = f(t)$.

В простейших случаях спектр может состоять из небольшого числа гармоник.

Часто под спектром колебаний понимают спектр (совокупность) его частот.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

✔*Сложение колебаний с одинаковыми частотами*

Пусть точка одновременно движется вдоль осей x и y:

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2).$$

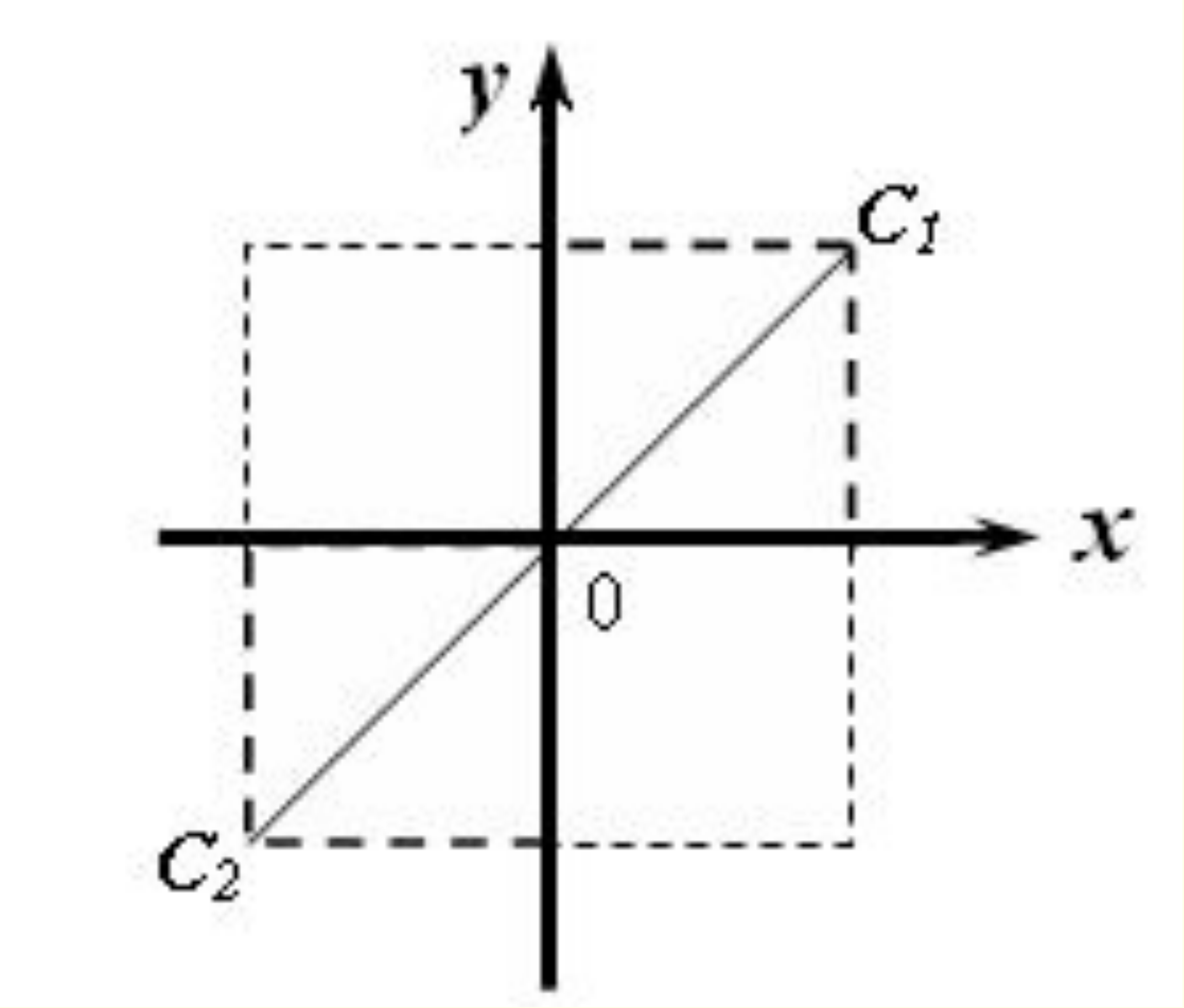
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

1) Фазы колебаний равны.

$$x = A_1 \sin \omega t;$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}$$ или $$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

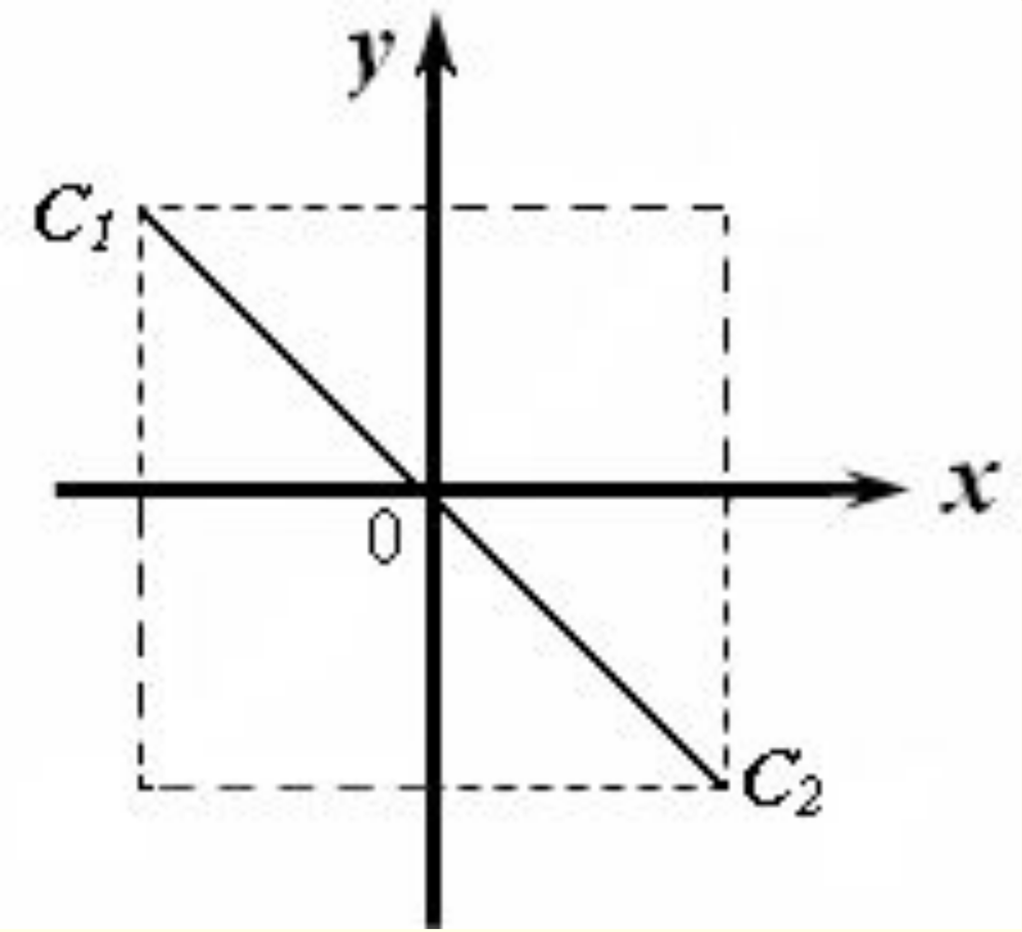


Такие колебания называют ***линейно-поляризованными.***

2) Разность фаз равна π.

$$x = A_1 \sin(\omega t + \pi) = -A_1 \sin \omega t;$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2} \quad \text{или} \quad y = -\frac{A_2}{A_1} x$$



В обоих случаях амплитуда результирующего колебания равна:

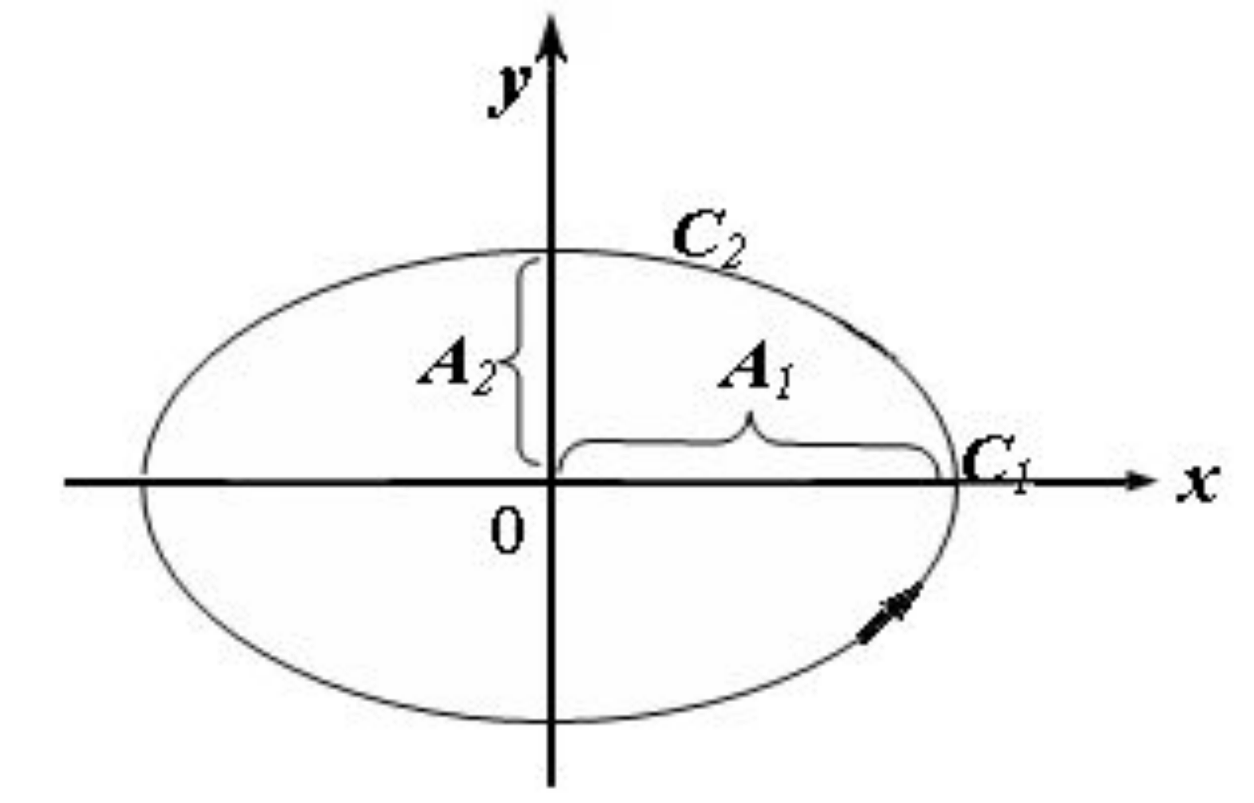
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

3) Разность фаз равна π/2.

$$x = A_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cos \omega t;$$

$$y = A_2 \sin \omega t.$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t; \qquad \frac{y}{A_2} = \sin \omega t.$$



$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

Такие колебания называют ***эллиптически поляризованными.***

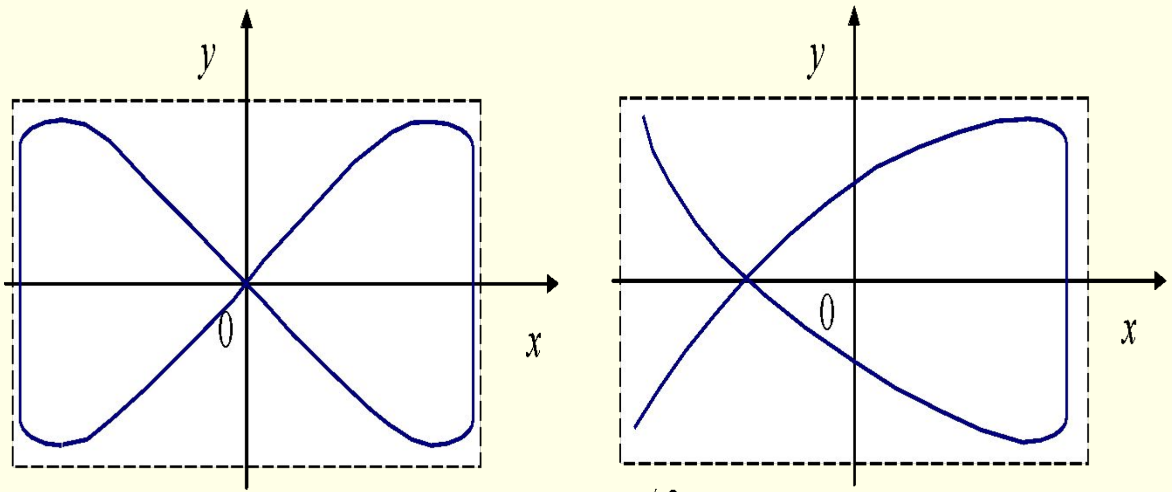
✓*Сложение колебаний с разными частотами*

Если частоты складываемых колебаний относятся друг к другу как целые числа, то траектория результирующего движения оказывается замкнутой, а само движение – периодическим.

Прочерчиваемые точкой замкнутые траектории, образующиеся при целочисленных отношениях частот складываемых взаимно-перпендикулярных колебаний называют ***фигурами Лиссажу***.

Вид фигур Лиссажу зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний.

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигуры Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат.

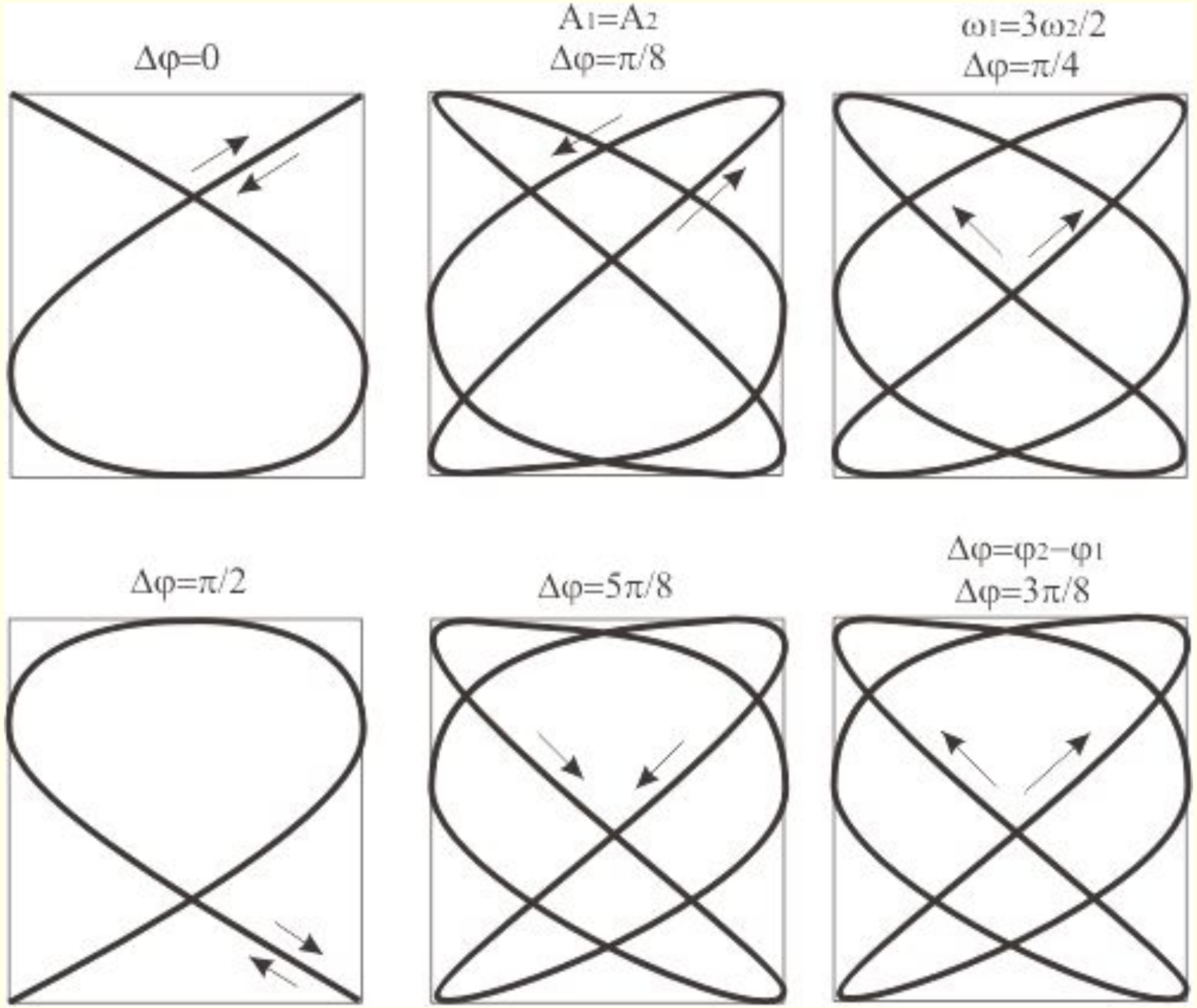


$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi / 2$

$p / k = 1 / 2$ $p / k = 2 / 3$

По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной, или определить отношение частот складываемых колебаний.

Фигуры Лиссажу при $\omega_1 \neq \omega_2$



Затухающие колебания

Затухающие колебания – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Свободные колебания реальной системы всегда затухают. Причиной затухания механических колебаний является трение, электрических колебаний – тепловые потери в проводниках.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

Обычно рассматриваются **линейные системы** – идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются.

Линейными системами являются, например, пружинный маятник, колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0, \quad (1)$$

S – колеблющаяся величина,
$\delta = \mathrm{const}$ – коэффициент затухания,
ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы (т.е. в отсутствие потерь энергии, $\delta = 0$).

Решение уравнения в виде

$$S = e^{-\delta t}u(t). \quad (2)$$

Для пружинного маятника массой ***m***, совершающего малые колебания под действием упругой силы, сила трения пропорциональна скорости:

$$F_{тр} = -r\upsilon = -r\dot{x},$$

r- коэффициент сопротивления.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x = A_0 \cdot e^{-\frac{r}{2m}t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

где $\dfrac{r}{2m} = \delta$ - <u>***коэффициент затухания***</u>;

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - r^2/4m^2}$$

- циклическая частота затухающих колебаний.

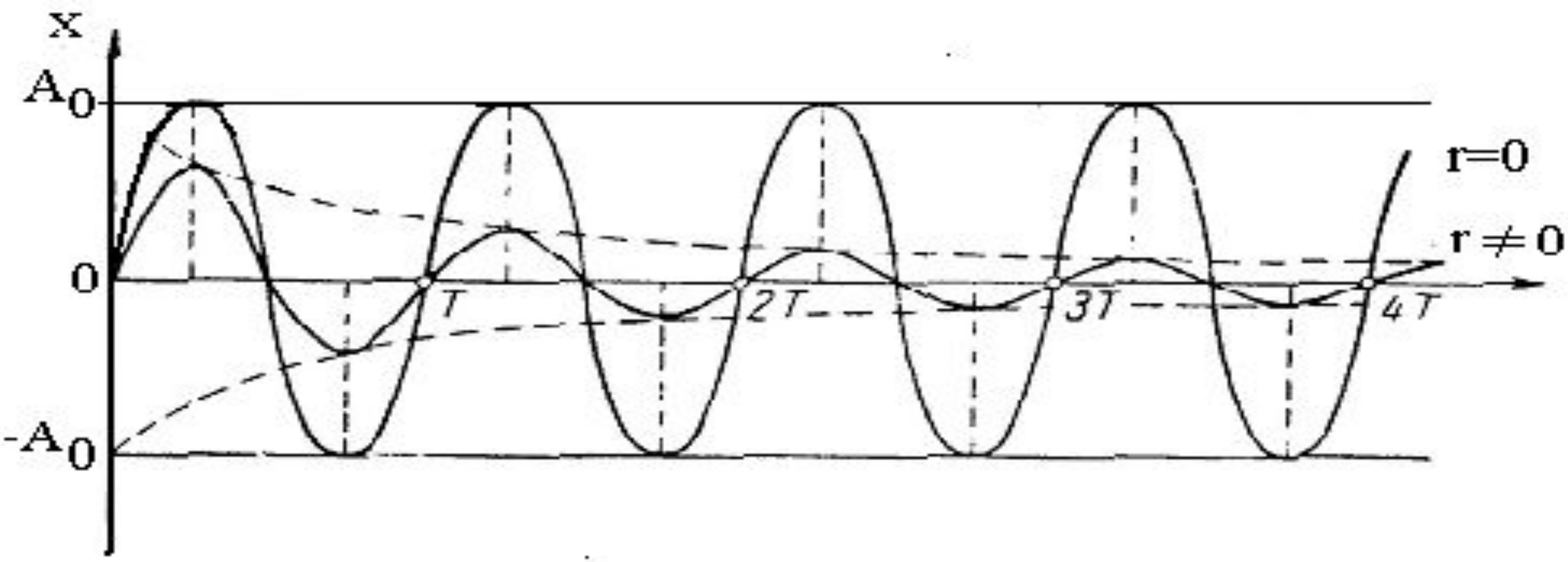
Амплитуда затухающих колебаний:

$$A = A_0 e^{-\delta t}$$

Промежуток времени τ, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется ***временем релаксации***:

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

Затухающее колебание не является периодическим, и тем более гармоническим.



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Характеристики колебательной системы:

✔ ***Декремент затухания:***

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}.$$

✔ ***Логарифмический декремент затухания:***

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

N_e – число колебаний, совершаемых за время $t=\tau$, в течение которого амплитуда A уменьшается в e раз.

✔<u>*Добротность*</u>:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Q равна с точностью до π числу колебаний N_e, совершаемых системой за время релаксации τ.

Q равна произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебательной системы в момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t + T$:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – незатухающие колебания, возникающие под действием периодической силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t$$

Для механических колебаний роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t$$

Для простейшего пружинного маятника, на который действует внешняя сила:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

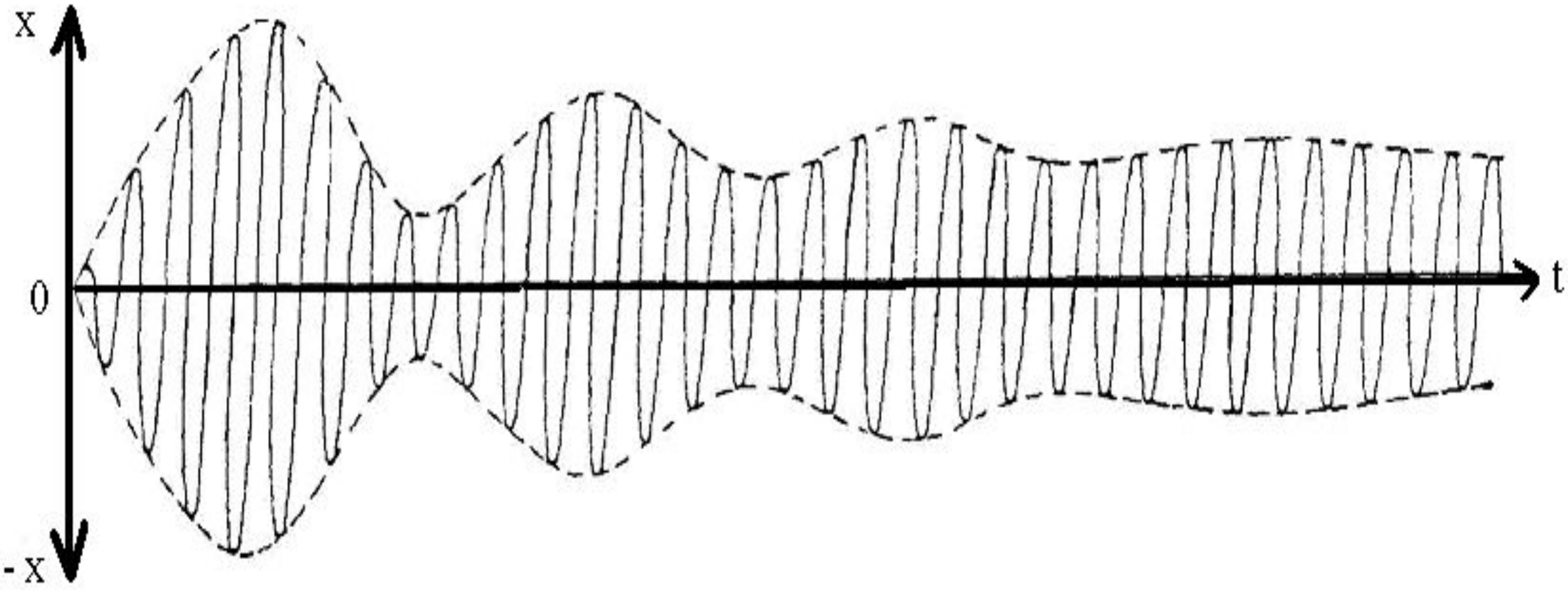
Амплитуда установившихся вынужденных колебаний:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

В установившемся режиме вынужденные колебания являются гармоническими, происходят с частотой внешней гармонической силы.

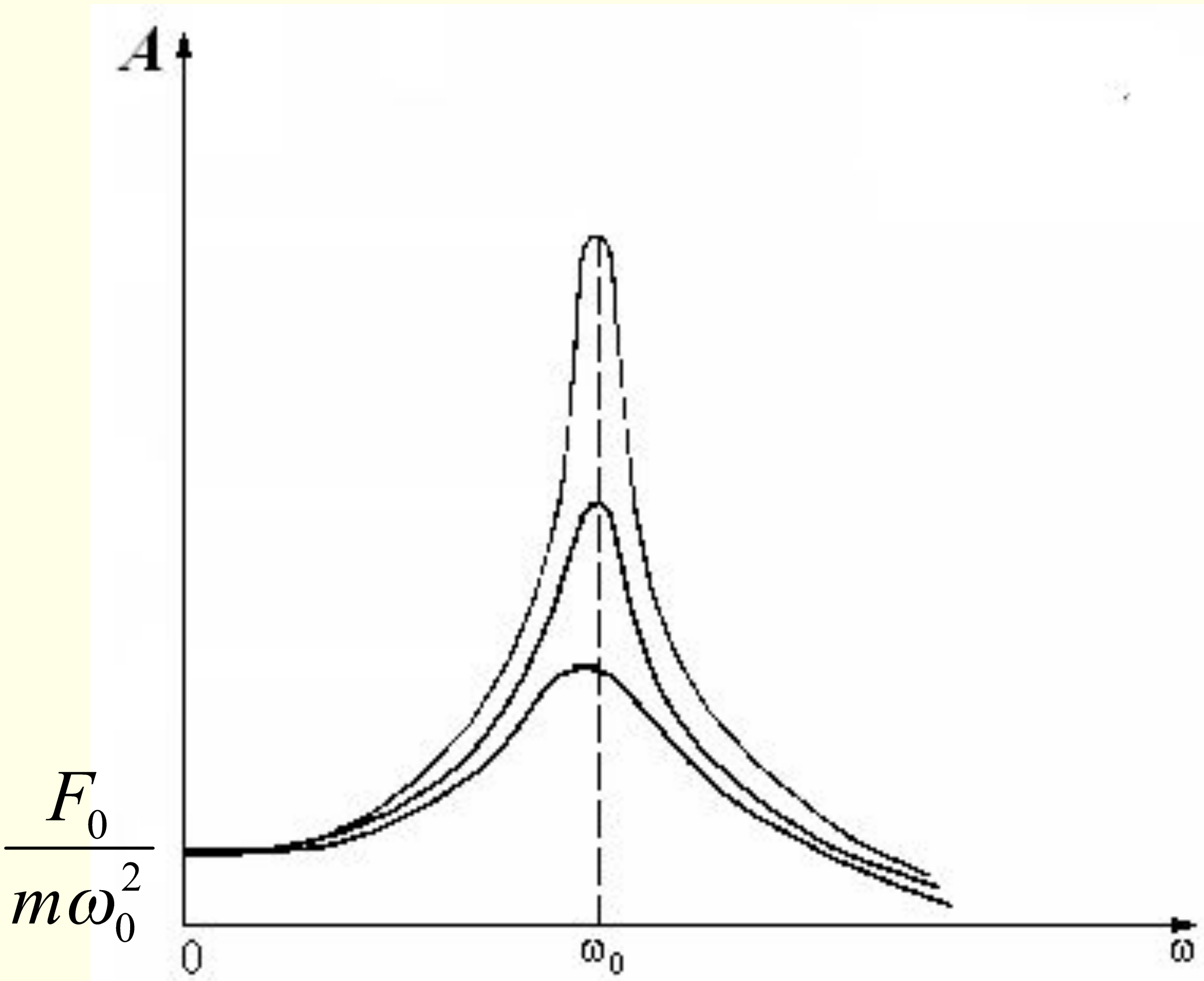


В случае установившихся колебаний при некоторой частоте внешней силы – ***резонансной частоте*** $\omega_{рез}$ – амплитуда смещения достигает максимального значения:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется ***механическим резонансом***.

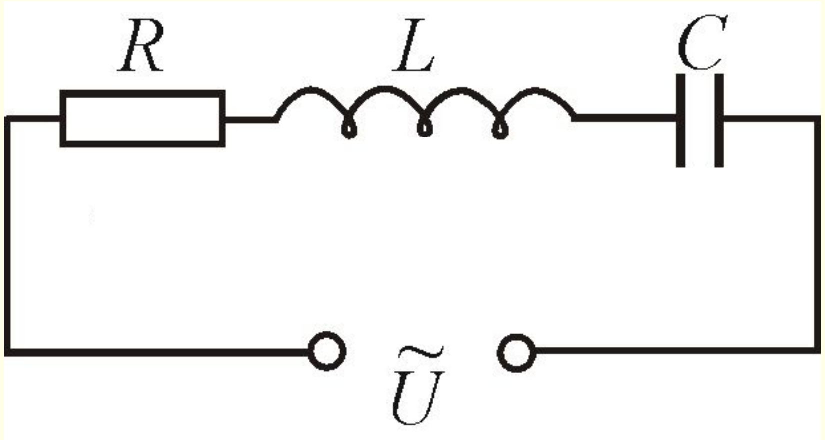
$$A_{\max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$



ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

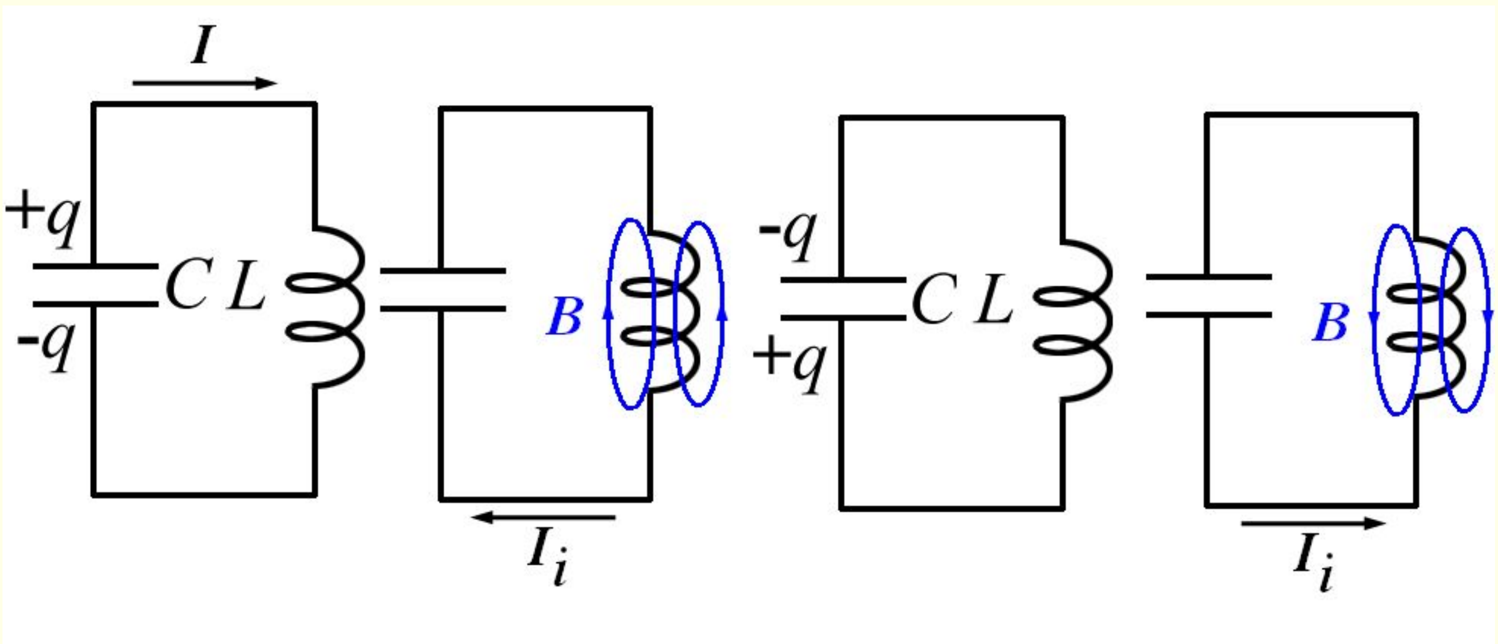
Квазистационарные токи. Процессы в колебательном контуре

Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший ***колебательный контур.***



Для простейшего колебательного контура $R = 0$.

При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора C в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда конденсатора и тока в катушке. ($R = 0$)



$$W_{эл.п.} = \frac{Q^2}{2C} \qquad W_{м.п.} = \frac{L\dot{Q}^2}{2} \qquad W_{эл.п.} = \frac{Q^2}{2C} \qquad W_{м.п.} = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$$

Энергия электрического поля запасается между обкладками конденсатора C:

$$W_{эл.п.} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Энергия магнитного поля сосредоточена в катушке L:

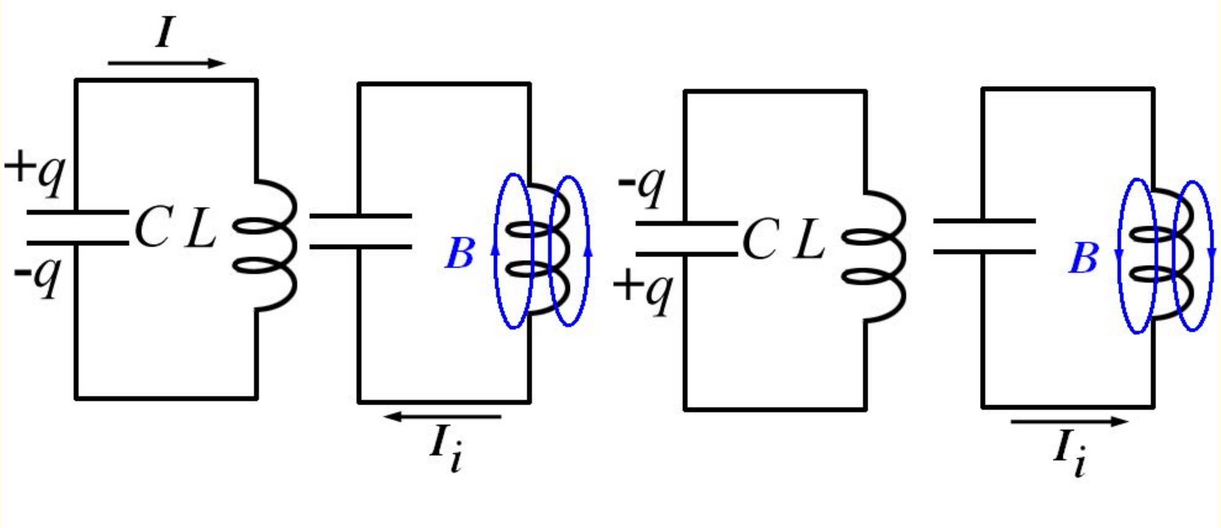
$$W_{м.п.} = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\dot{Q}^2}{2}.$$

Если $R \to 0$, тогда полная энергия:

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = const.$$

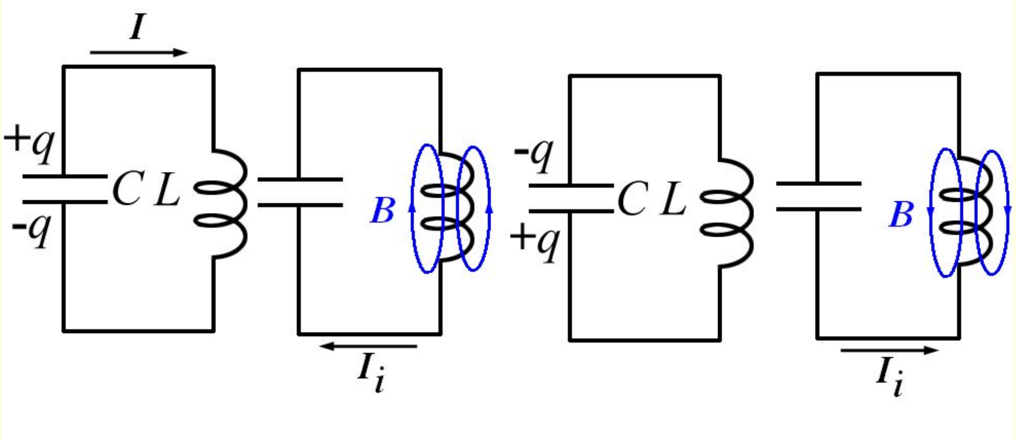
Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью равной скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Если ***l*** – линейные размеры контура не велики (***l* ‹‹ *c* / *v*, *v*** – частота колебаний в контуре), то в каждый момент времени сила тока во всех частях контура одинакова. Такой переменный ток называется **квазистационарным.**

Правило Ленца: индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им переменное магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот индукционный ток, т.е. когда конденсатор C разрядился (энергия магнитного поля и ток в цепи максимальные), то в этот момент ток I начинает убывать.



Следовательно, магнитное поле в катушке ослабевает, и в катушке возникает индукционный ток I_i, который препятствует уменьшению магнитного поля.

Направление I_i совпадает с направлением первоначального тока, и положительные заряды продолжают идти в том же направлении, заряжая положительно другую обкладку конденсатора C.



Закон Ома для контура: $\underbrace{IR}_{U_R} + \underbrace{U_C}_{Q/C} = \underbrace{\mathcal{E}_S}_{-L\frac{dI}{dt}}$. (1)

U_C – разность потенциалов (напряжение) на обкладках конденсатора C, $\mathcal{E}s$ – э.д.с. самоиндукции.

Из закона сохранения заряда следует, что сила квазистационарного тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}.$$

Уравнение (1):

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0.$$

$$\boxed{\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta}\dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}Q = 0} \qquad (2) \qquad –$$

дифференциальное уравнение колебаний заряда Q в контуре – дифференциальное ***уравнение затухающих колебаний***.

- $R = 0 \rightarrow \qquad \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$

дифференциальное ***уравнение гармонических колебаний.***

Свободные электрические колебания в колебательном контуре являются *гармоническими*.

Уравнение гармонических колебаний:

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (3)$$

Q_m – амплитуда заряда на конденсаторе C,
ω_0 – собственная частота гармонических колебаний.

Из уравнения (2) следует

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$$ - формула Томсона.

$$I = \dot{Q} = \underbrace{-\omega_0 Q_m}_{I_m} \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

$$I_m = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}}$$ – амплитуда тока.

$$U_C = \frac{Q}{C} = \underbrace{\frac{Q_m}{C}}_{U_m} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (5)$$

$$U_m = \frac{Q_m}{C}$$ - амплитуда напряжения

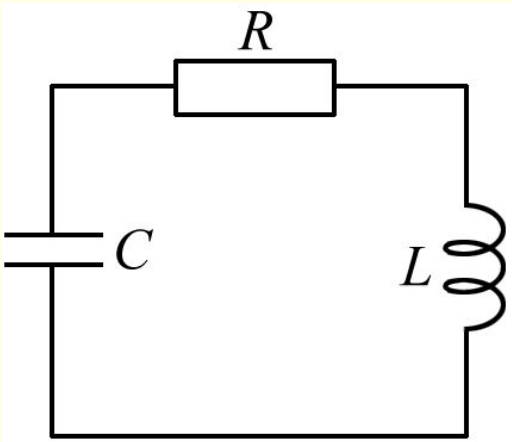
Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что:

- ***энергия электрического поля* аналогична**

  потенциальной энергии упругой деформации

- ***энергия магнитного поля* аналогична *кинетической энергии*;**
- Индуктивность L играет роль массы m
- $1/C$ – роль коэффициента жесткости k
- Заряду q соответствует смещение маятника x
- Силе тока $I \sim$ скорость υ
- Напряжению $U \sim$ ускорение a

Затухающие электрические колебания



В реальном контуре $R \neq 0$, следовательно, есть потеря энергии и затухание колебаний, которое характеризуется коэффициентом затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

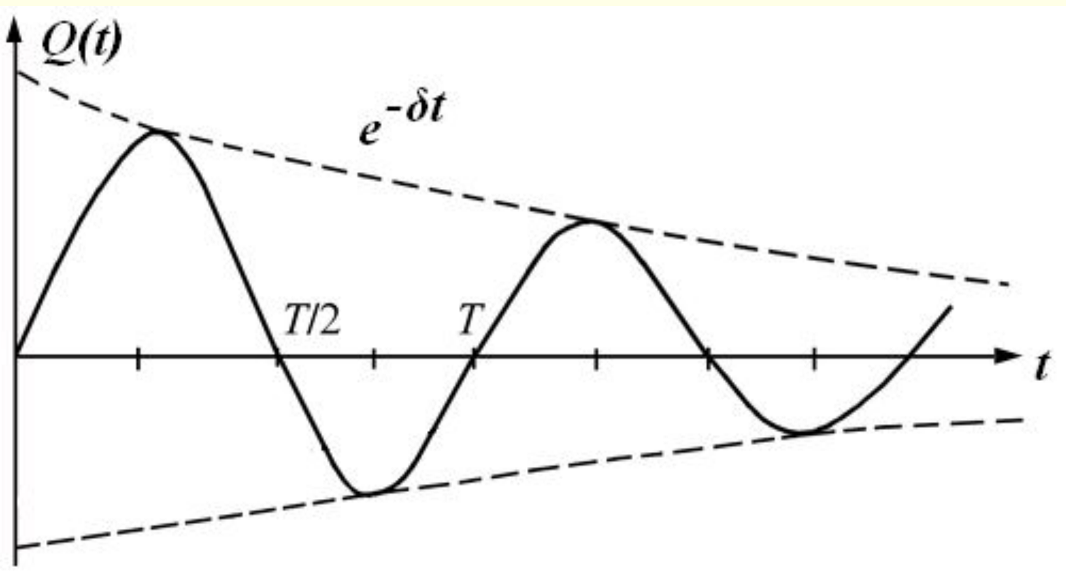
$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta}\dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}Q = 0$$

– дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.$$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний:

$$Q = Q_m e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi),$$



$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

- частота затухающих колебаний.

При $R = 0$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$ – собственной частоте контура.

Логарифмический декремент затухания:

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC}\,\dfrac{R}{L}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$W(t)$ – энергия колебательной системы в момент времени t,

$W(t) - W(t+T)$ – убыль энергии за промежуток времени от t до $T+t$.

Вынужденные электрические колебания

возникают в контуре при включении внешней э.д.с.

$$U = U_m \cos\omega t. \qquad (1)$$

Закон Ома:

$$IR + \underbrace{U_C}_{Q/C} = \underbrace{\mathcal{E}_S}_{-L\frac{dI}{dt}} + U. \qquad (2)$$

$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta}\dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}Q = \underbrace{\frac{U_m}{L}}_{X_0}\cos\omega t \qquad (3)$$

– дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

При установившихся вынужденных колебаниях заряд конденсатора колеблется гармонически с циклической частотой внешней э.д.с. – ω

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha), \qquad (4)$$

где α – сдвиг фаз между Q и внешней э.д.с.,

$$Q_m = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{4R^2}{4L^2}\omega^2}} =$$

$$= \frac{U_m}{L\sqrt{\frac{\omega^2}{L^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \frac{\omega^2}{L^2}R^2}} = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (5)$$

$$I = \dot{Q} = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = \underbrace{\omega Q_m}_{I_m} \cos\left(\omega t \underbrace{-\alpha + \frac{\pi}{2}}_{-\varphi}\right). \qquad (6)$$

$$I_m = \omega Q_m. \qquad (7)$$

Подставив уравнение (5) в уравнение (7), получим

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (8)$$

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ – полное сопротивление цепи.

Из уравнения для внешней э.д.с. (1) и уравнения (6) видно, что между током в контуре I и внешней э.д.с. U есть сдвиг фаз

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний дает

$$tg\alpha = tg\left(arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} =$$

$$= \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{\omega}{L}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \qquad (10)$$

Из уравнений (9), (10) следует

$$tg\varphi = tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{tg\alpha} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (11)$$

ωL – реактивное индуктивное сопротивление,

$\dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

Если $\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$, то $\varphi > 0$, т.е. ток I отстает по фазе от U,

если $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$, то $\varphi < 0$, т.е. ток I опережает по фазе U.

Уравнение (2) запишем в виде:

$$IR + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_m \cos\omega t \qquad (12) \Rightarrow$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos\omega t. \qquad (13)$$

Сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени внешней э.д.с.

$$U_R = RI = RI_m \cos\left(\omega t \underbrace{- \alpha + \frac{\pi}{2}}_{-\varphi}\right) = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \qquad (14)$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \underbrace{\frac{Q_m}{C}}_{U_{Cm}} \cos\left(\omega t - \underbrace{\alpha}_{\varphi + \frac{\pi}{2}}\right) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (15)$$

$$U_{Cm} = \frac{Q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}. \qquad (16)$$

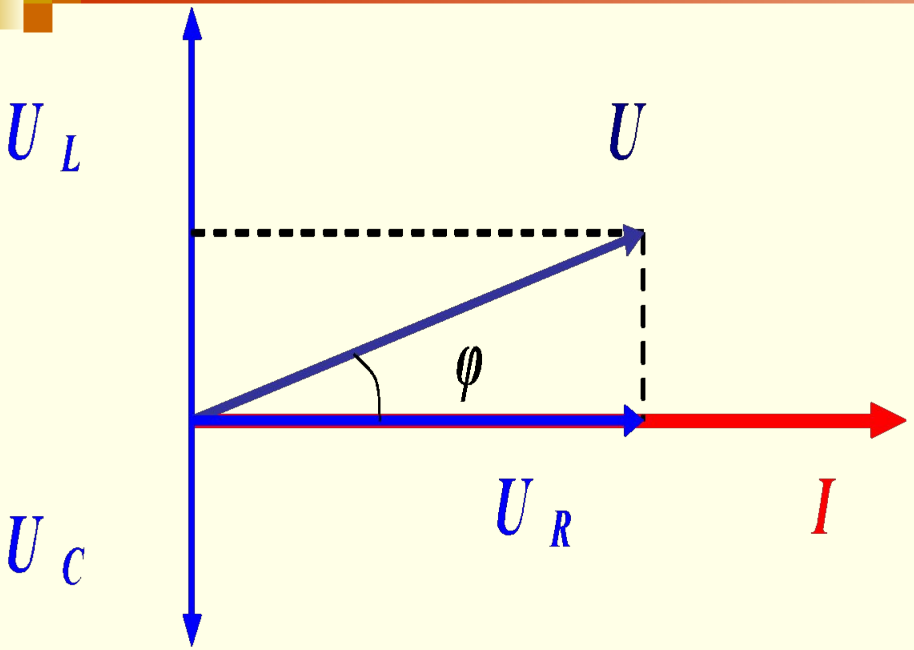
$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\underbrace{\omega L I_m}_{U_{Lm}} \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm}\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (17)$$

Сравнивая формулы для I, U_R, U_C, U_L , можно сделать вывод

U_R изменяется в фазе с током I,

U_C отстает от I, U_R по фазе на $\frac{\pi}{2}$

U_L опережает I по фазе на $\frac{\pi}{2}$

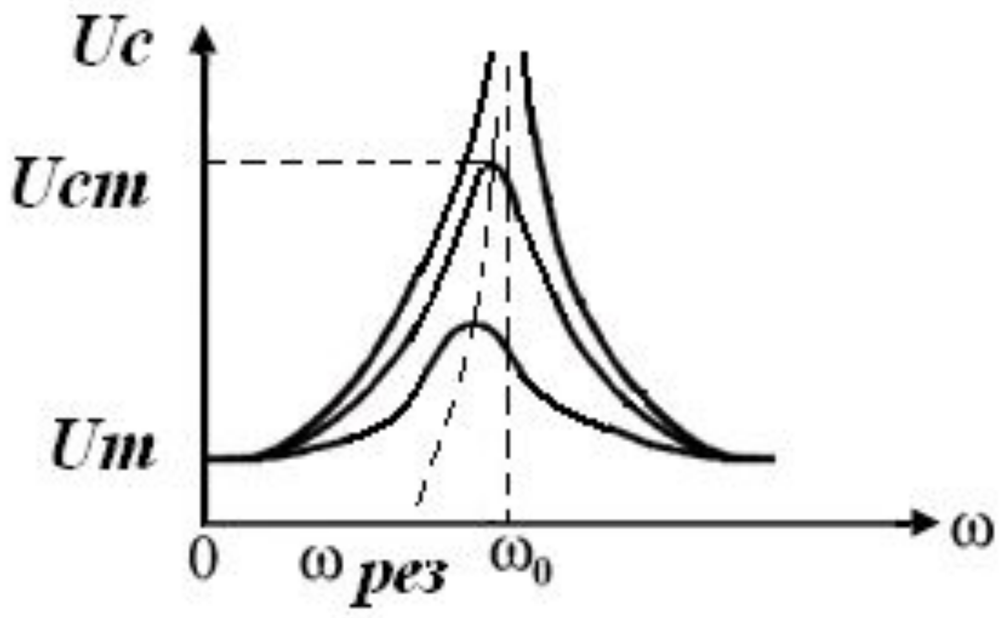


Фазовые соотношения представляются векторной диаграммой

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C + \vec{U}_L.$$

Резонансная частота для заряда Q и напряжения U_C.

$$\omega_Q = \omega_{Uc} = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0.$$



На рисунке изображены резонансные кривые для напряжения U_C.

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

– коэффициент затухания.

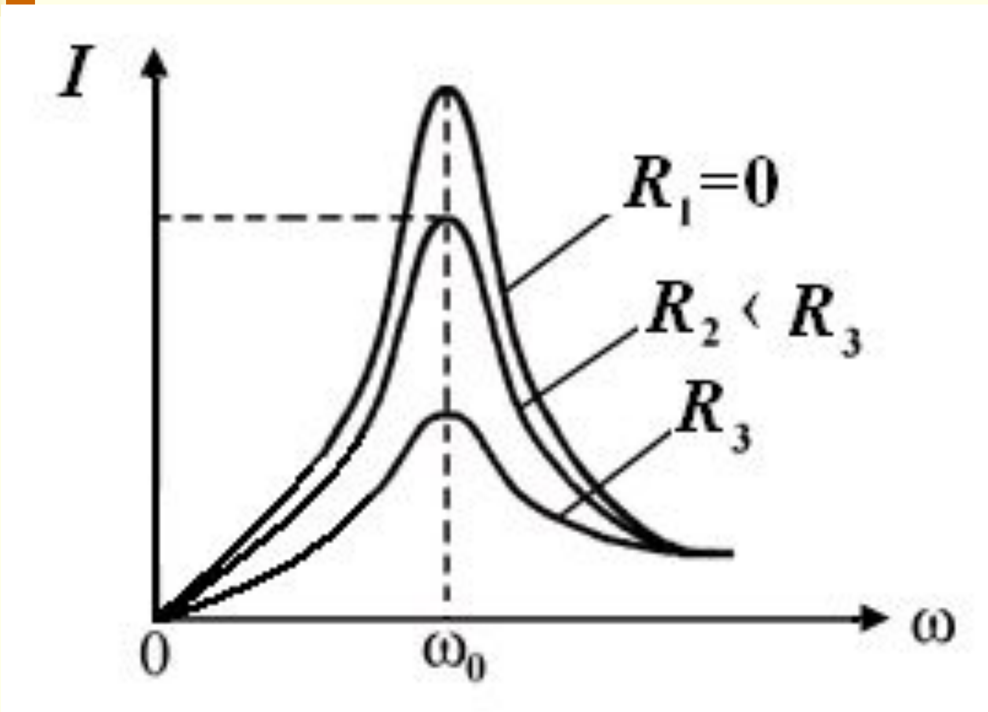
Чем меньше R и больше L, тем выше и острее максимум при резонансе.

$$U_{cm} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Резонанс для тока возникает при $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0.$

В этом случае угол сдвига фаз между током и напряжением $\varphi = 0$ ($tg\varphi = 0$), изменение тока и напряжения происходит синфазно.

$$\omega_I = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$



Полное сопротивление цепи Z становится минимальным $(Z = R)$, а ток становится максимальным.

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}_{\to 0}}}.$$

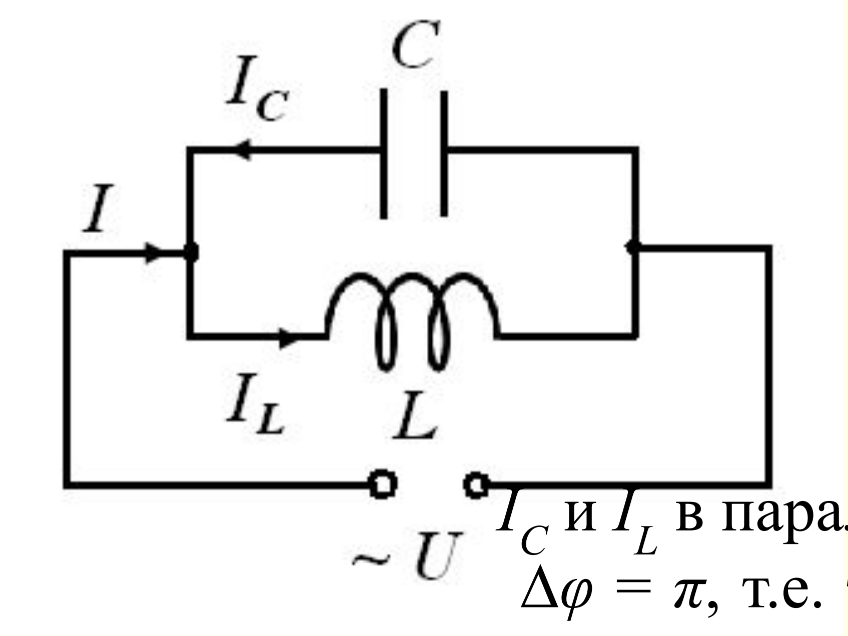
Резонансные кривые для тока сходятся в 0, т.к. при постоянном напряжении (ω = 0) ток в цепи, содержащей конденсатор, не течет.

Ток в цепи определяется активным сопротивлением R и принимает максимально возможное при данном U_m значение. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи $U_R = U$, а падение напряжения на конденсаторе U_C и катушке индуктивности U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется ***резонансом напряжений*** или ***последовательным резонансом***.

Явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определённой частоты (для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура – радиоприёмник).

Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчёте изоляции электрических цепей (линий), содержащих C и L с целью предотвращения её пробоя.

✔***Резонанс токов (параллельный резонанс)*** наблюдается в цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные конденсатор C и катушку индуктивности L, при приближении частоты приложенного напряжения к резонансной частоте



$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

В этом случае разность фаз токов I_C и I_L в параллельных ветвях $\Delta\varphi = \pi$, т.е. токи в ветвях противоположны по фазе, а амплитуда тока $I = I_m = I_{Cm} + I_{Lm}$ во внешней (неразветвлённой) цепи равно нулю.

При активном сопротивлении цепей $R \neq 0$ разность фаз токов $\Delta\varphi \neq \pi$ амплитуда силы тока $I_m \neq 0$, но будет иметь наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов токи I_C и I_L компенсируются, а сила тока I в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через R. Может оказаться, что сила тока $I << I_C$ и I_L.

Такой контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к $\omega_{рез}$.

Используется в резонансных усилителях; индукционных печах, в которых C и L подбирают таким образом, чтобы при частоте генератора сила тока через нагревательную катушку была гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

Переменный ток

Установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей R, L, C, переменного тока, обусловленного переменным напряжением $U = U_m \cos\omega t.$ (1)

Этот ток изменяется по закону $I = I_m \cos(\omega t - \varphi).$ (2)

$$I_m(U_m, C, L, R, \omega) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (3)$$

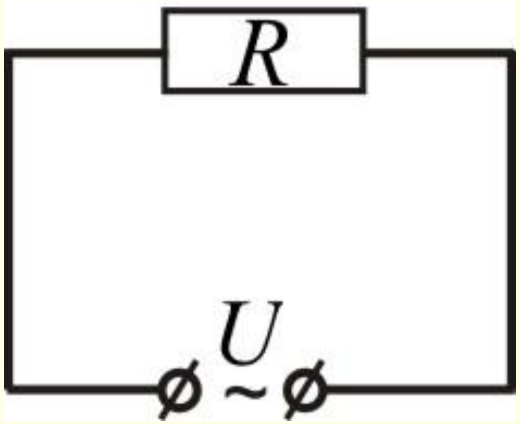
Ток I отстает по фазе от напряжения U на φ, определяемую выражением

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (4)$$

Полное электрическое сопротивление (импеданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (5)$$

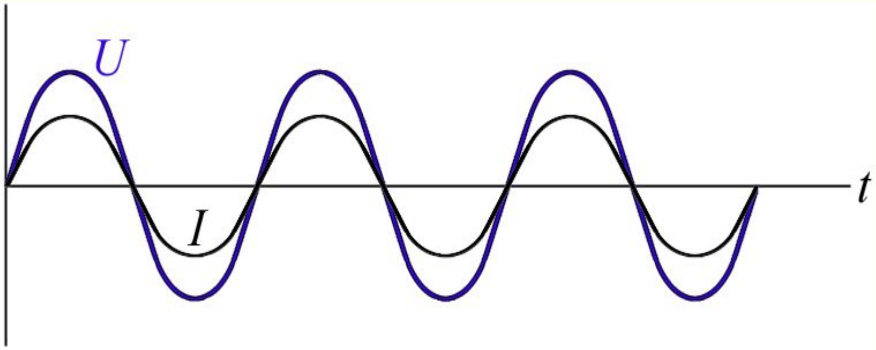
✔Переменный ток, текущий через *R* .



$L \to 0, C \to 0$

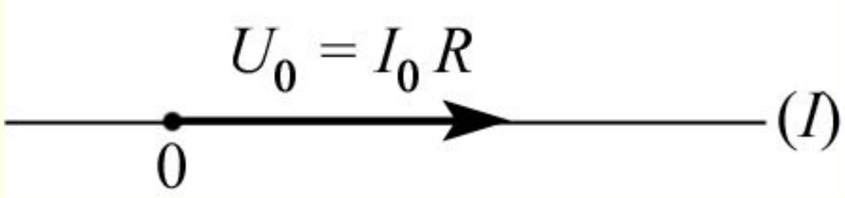
Закон Ома: $IR = U = U_m \cos \omega t.$

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

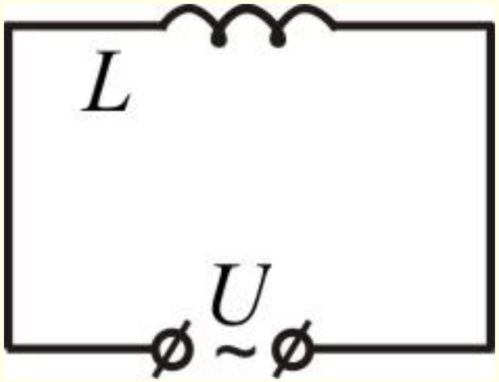


Следовательно, ток изменяется в фазе с напряжением и $\varphi = 0.$

Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



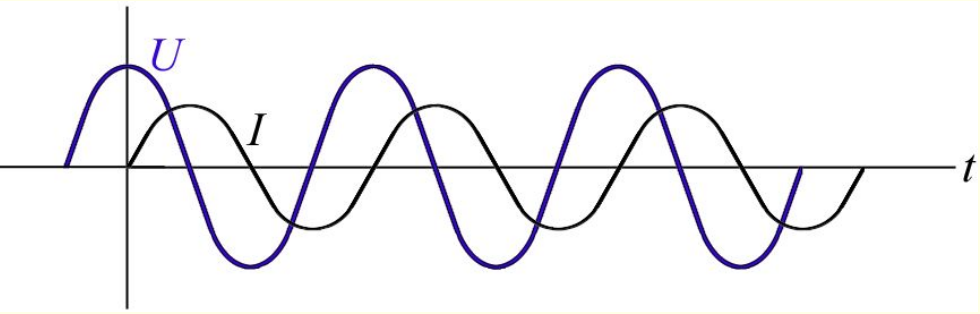
✔Переменный ток, текущий через L



$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \qquad tg\varphi = \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_L = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$R \to 0,\ C \to 0$

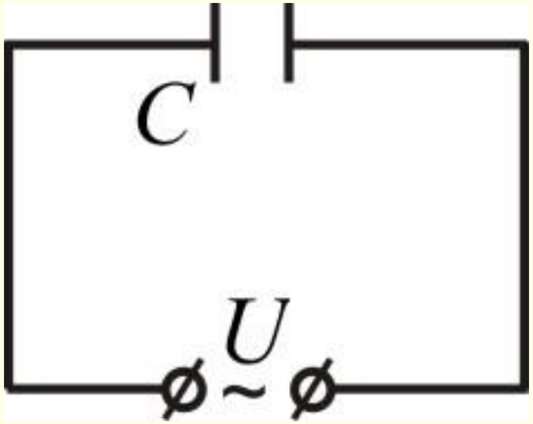


I_L отстает от U_L на $\dfrac{\pi}{2}$

$R_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление.

Постоянному току ($\omega = 0$) индуктивность не оказывает сопротивление.

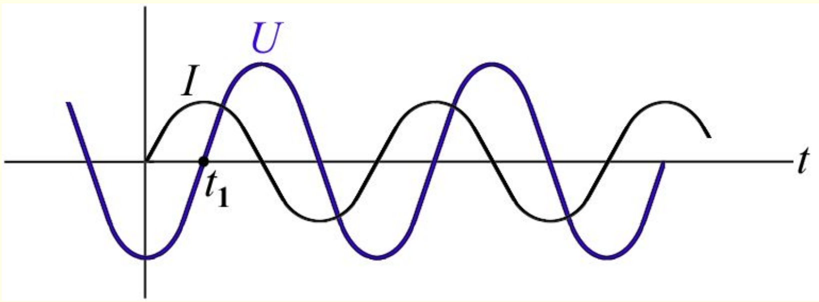
✔Переменный ток, текущий через *C*



$R \to 0, L \to 0$

$$I_m = \frac{U_m}{\dfrac{1}{\omega C}}, \qquad tg\varphi = -\infty \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

$$I_C = I_m \cos\left(\omega t - (-\frac{\pi}{2})\right),$$



I_C опережает U_C на $\dfrac{\pi}{2}$

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$ – реактивное емкостное сопротивление.

При $R = 0$ $$I_m = \frac{U_m}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}.$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = R_L - R_C$$ – реактивное сопротивление.

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$ – полное сопротивление.

$$tg\varphi = \frac{X}{R}$$ – фаза:

Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений $U(t)$ и $I(t)$

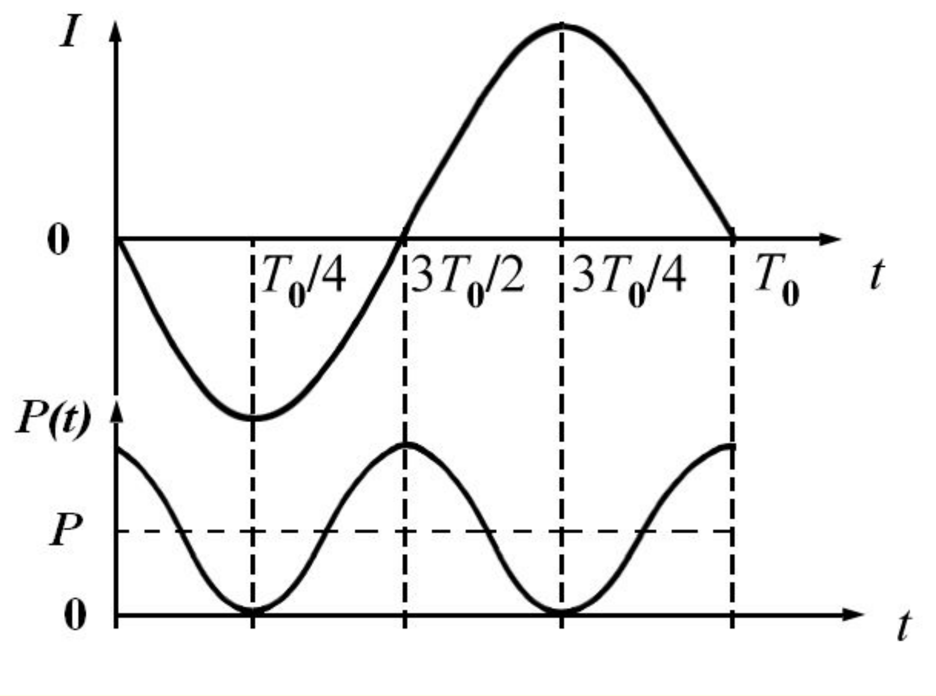
$$\left.\begin{aligned} &P(t) = U(t)\cdot I(t) = U_m \cos\omega t I_m \cos(\omega t - \varphi). \\ &\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta). \end{aligned}\right\}$$

$$P(t) = \underbrace{\frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi}_{\text{сред.знач.}} + \frac{1}{2}U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi).$$

Среднее значение $\langle\cos(2\omega t - \varphi)\rangle = 0.$

Практическое значение представляет ***среднее значение мощности***

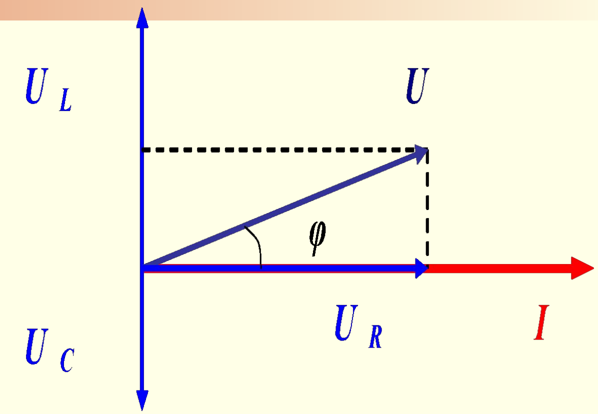
$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi.$$



$$P(t) \sim \cos 2\omega t,$$

т.е. мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой в 2 раза превышающей частоту тока.

Из векторной диаграммы видно, что



$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \frac{R}{Z}.$$

Подставляем это выражение в формулу для среднего значения мощности:

$$P = \frac{1}{2}\frac{U_m I_m R}{Z} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{U_m}{Z}}_{I_m} I_m R = \frac{R I_m^2}{2}.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$ – ***действующее (эффективное) значение силы тока.***

Аналогично, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ – ***действующее значение напряжения.***

Уравнение средней мощности можно записать в виде:

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos\varphi = UI \cos\varphi.$$

$\cos\varphi$ называется ***коэффициент мощности***.

В технике стремятся сделать $\cos\varphi$ максимальным.

Если $\cos\varphi$ мал, то для выделения в цепи требуемой мощности надо иметь большой ток, что приводит к росту потерь в проводах.

Для промышленных установок $\cos\varphi \geq 0{,}85.$

Распространение колебаний в упругой среде. Поперечные и продольные волны

Волновой процесс (волна) – процесс распространения колебаний в среде (волны на поверхности жидкости, упругие волны, электромагнитные волны).

Основное свойство волны: перенос энергии без переноса вещества, т.к. при распространении волны частицы среды не двигаются вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия.

Упругие (механические) волны – механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

Тело называется упругим, а его деформации, вызываемые внешними воздействиями, называются ***упругими деформациями***, если они полностью исчезают после прекращения этих воздействий.

Газ, жидкость обладают только *объёмной упругостью*, т.е. способностью сопротивляться изменению объёма.

Твёрдое тело – объёмная упругость и *упругость формы*.

Звуковые (акустические) волны – упругие волны малой интенсивности.

$f = 16 \div 2 \cdot 10^4$ Гц – слышимый звук,

$f < 16$ Гц – инфразвук,

$f > 2 \cdot 10^4$ Гц – ультразвук,

$f > 10^9$ Гц – гиперзвук.

Интенсивность звука (сила звука) – величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны:

$$I = \frac{W}{St}, \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right].$$

Интенсивность звука – объективная характеристика звуковой волны.
Чувствительность человеческого уха различна для различных частот, поэтому вводят субъективную характеристику звука, связанную с его интенсивностью, и зависящую от частоты: ***громкость звука.***

Физиологический закон Вебера – Фехнера: с ростом интенсивности звука громкость возрастает по логарифмическому закону.

По измеренному значению интенсивности звука (объективная характеристика) вводят объективную оценку громкости звука (субъективная характеристика) – ***уровень интенсивности звука***:

$$L = lg\frac{I}{I_0}, \quad [\text{бел} = 10 \cdot \text{децибел}],$$

I_0 – интенсивность звука на пределе слышимости, $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2.

Упругая волна называется ***продольной***, если частицы среды колеблются в направлении распространении волны.

Продольные волны связаны с объёмной деформацией упругой среды, следовательно, могут распространяться в любой среде – **твёрдой, жидкой, газообразной**.

Упругая волна называется ***поперечной***, если частицы среды колеблются, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волн.

Они связаны с деформацией сдвига упругой среды, следовательно, распространяются в средах, обладающих упругостью формы, т.е. твёрдых телах.

Поверхностные волны – волны, распространяющиеся вдоль свободной поверхности (жидкости). Возмущения этой поверхности возникают под влиянием внешних воздействий.

Бегущая волна

Бегущая волна – волна, которая в отличие от стоячих волн, переносит энергию в пространстве.

Луч – линия, касательная к которой в каждой её точке совпадает с направлением распространения волны.

Уравнение упругой волны – зависимость от координаты и времени скалярных или векторных величин, характеризующих колебания среды при прохождении в ней волны.

Механические возмущения распространяются в упругой среде с конечной скоростью v. Поэтому возмущение достигает произвольной точки среды через время

$\Delta t = \dfrac{l}{v}$, где l – расстояние от источника волны до точки. Следовательно, колебания в точке отстают по фазе от колебаний источника волн.

Волновой фронт – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t.

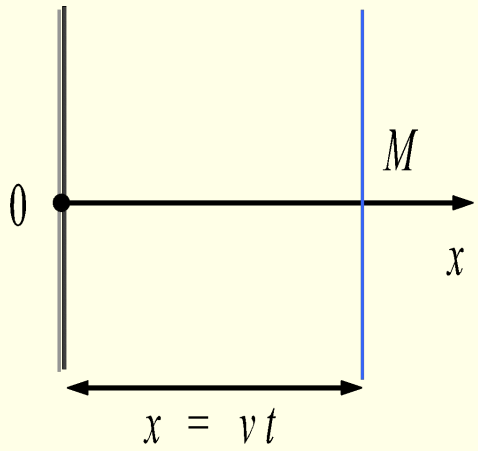
Волновая поверхность – геометрическое место точек, в которых фаза колебаний имеет одно и то же значение (в простейшем случае плоская или сферическая).

В однородной изотропной среде волновые поверхности ортогональны лучам.

Уравнение плоской волны

Волна называется ***плоской***, если её волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

✔***Уравнение плоской волны распространяющейся вдоль оси x.***



Величина S, характеризующая колебательное движение среды, зависит только от времени t и координаты x.

Колебания в точке M отличаются от колебаний в точке 0 только тем, что они сдвинуты по времени на x/v. Следовательно, S является функцией $(t - x/v)$ и уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль x, принимает вид:

$$S = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль x:

$$S = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

Расстояние $\lambda = vT$, на которое распространяется волна за время равное периоду T, называется ***длиной волны*** – расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в одной фазе.

Для характеристики волн используется волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

Тогда:

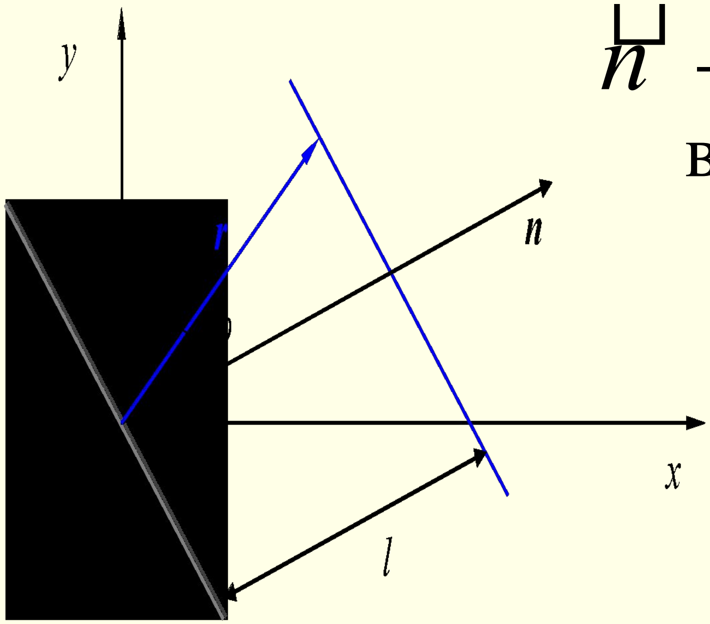
$$S = A\cos\left[\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right) + \varphi_0\right] = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Скорость распространения гармонической волны характеризуется ***фазовой скоростью***. Она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующих любому фиксированному значению фазы гармонической волны.

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const} \Rightarrow x = \frac{\omega t}{k} + \text{const} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

Это скорость перемещения фазы волны, поэтому её и называют фазовой скоростью.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении



$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к волновой поверхности, $|\vec{n}| = 1.$

$$S = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{v}\right) + \varphi_0\right],$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 1 \cdot r\cos\varphi = l.$$

$$S = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega \vec{n}\vec{r}}{v} + \varphi_0\right) = A\cos\left(\omega t - \underbrace{k\vec{n}}_{\vec{k}}\vec{r} + \varphi_0\right)$$

$$S = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right).$$

$\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор.

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$

Физический смысл имеет только действительная часть комплексной функции $\widetilde{S}$: $\mathrm{Re}\widetilde{S} = A\cos(\omega t + \varphi).$

$$S = Ae^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)}.$$

Такая запись уравнения волны удобна для дифференцирования.

Распространение волн в однородной изотропной среде (физические свойства среды одинаковы во всех точках и во всех направлениях) описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое называется ***волновым уравнением***:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta S=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2},$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – оператор Лапласа.

В частности это уравнение описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Энергия упругой волны. Вектор Умова

Рассмотрим продольную плоскую волну в твердой среде:

Деформация среды в плоскости x:
(взят символ частной производной, т.к. $s = s(x,t)$)

$$\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}$$

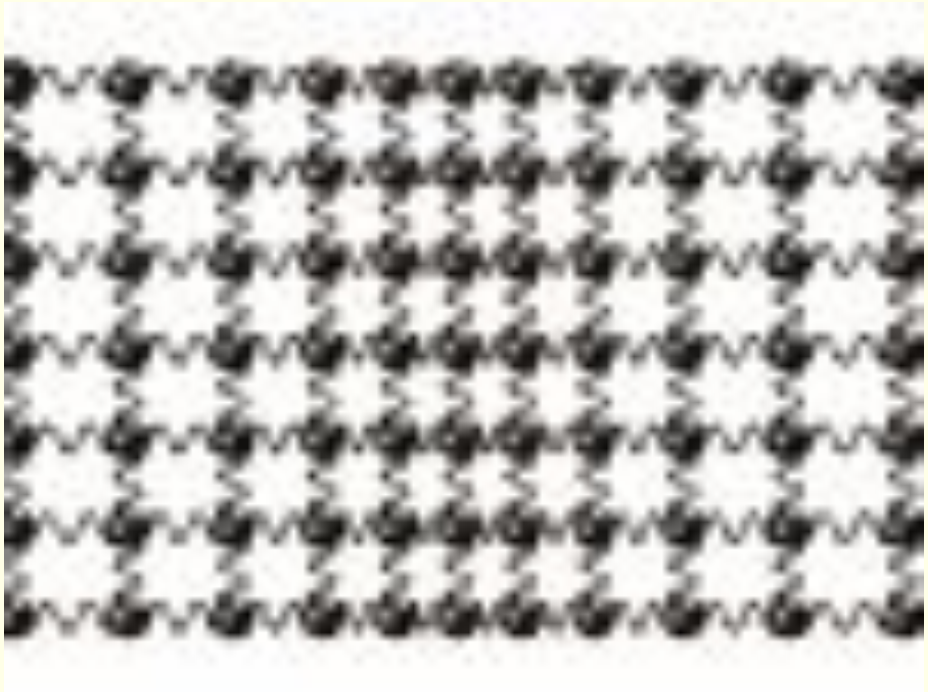
Нормальное напряжение пропорционально деформации (для малых деформаций):

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial s}{\partial x}$$

где E – ***модуль Юнга*** среды.

•В положениях максимального отклонения частиц от положения равновесия ($\partial s/\partial x = 0$)   **$\varepsilon$ = 0, σ = 0**

• В местах прохождения частиц через положения равновеси **ε, σ - максимальны**   (с чередованием $\pm\varepsilon$, т.е. растяжений и сжатий)



Процесс распространения продольной упругой волны

Скорость продольной волны связана с характеристиками среды следующим образом:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$, где ρ – плотность среды.

Скорость поперечной волны $\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, G – модуль сдвига.

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)$$

- ***плотность энергии*** упругой волны (как поперечной, так и продольной) в каждый момент времени в разных точках пространства различна.

Среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega_0^2 .$$

Скорость переноса энергии волной равна скорости перемещения в пространстве поверхности, соответствующей максимальному значению объёмной плотности волны w.

Для гармонической волны эта скорость равна фазовой скорости.

Поток энергии $d\Phi_w$ сквозь малую площадку dS – отношение энергии dW, передаваемой через эту площадку за малый промежуток времени dt, к его величине dt:

$$d\Phi_w = \frac{dW}{dt}.$$

Поток $$d\Phi_w = \frac{dW}{dt} = w(\vec{\upsilon}\, d\vec{S}) = \vec{j}\, d\vec{S},$$

где $\vec{j} = w\vec{\upsilon}$ – **вектор плотности потока энергии (вектор Умова)**

Интенсивность волны – среднее значение плотности потока энергии, переносимой волной (среднее значение вектора Умова).

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \vec{\upsilon} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega_0^2 \vec{\upsilon}.$$

Преобразование энергии волны в другие виды энергии, происходящее при распространении волны в среде, называется ***поглощением волн***.

$$A(x) = A_0 e^{-\alpha x},$$

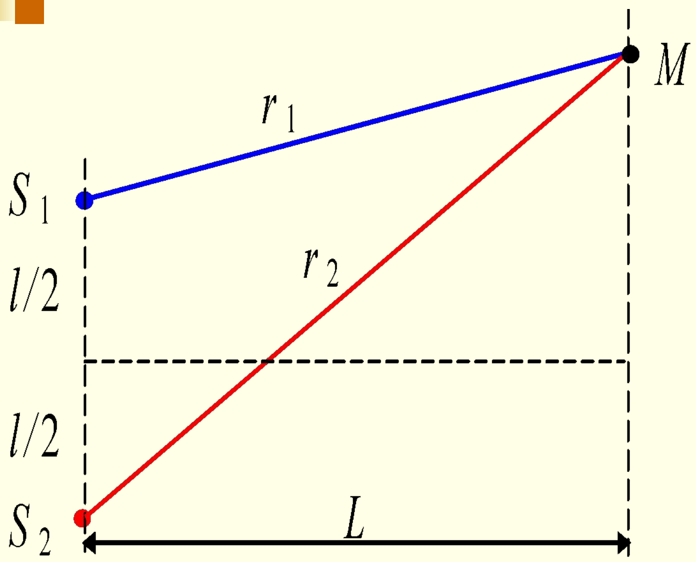
α – линейный коэффициент поглощения, зависит от свойств среды и частоты волн.

Дисперсия волн – зависимость фазовой скорости гармонической волны в среде от их частоты.

Интерференция волн. Стоячие волны

Две волны называются ***когерентными***, если разность их фаз не зависит от t.

Интерференция волн – явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усилие в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.



Сферические волны, возбуждаемые точечными когерентными источниками:

$$S_1 = A_1 \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1),$$
$$S_2 = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2).$$

Амплитуда результирующей волны в точке M:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Для когерентных источников разность начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{const}$, следовательно, амплитуда A результирующей волны зависит от разности хода волн $\Delta = r_1 - r_2$.

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi, \quad m = 0,1,2...$$

– интерференционный максимум $A = A_1 + A_2$.

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm(2m+1)\pi$$

— интерференционный минимум $A = A_1 - A_2$.

Частным случаем интерференции волн являются ***стоячие волны*** – волны, образующиеся в результате наложения 2-х бегущих гармонических волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые A и ω.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= A\cos(\omega t - kx), \\ S_2 &= A\cos(\omega t + kx). \end{aligned}\right\}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2A\cos kx \cos\omega t = \underbrace{2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}}_{A_{ст}}\cos\omega t.$$

$A_{ст}(x)$ – амплитуда стоячей волны, в отличие от амплитуды бегущей волны, является функцией только координаты

$$A_{ст} = \left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|.$$

Точки среды, где $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi, \quad A_{cm} = 2A - \max,\end{array}\right.$

называются ***пучностями***.

Точки среды, где $\dfrac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi, \quad A_{cm} = 0 - \min,$

называются ***узлами***.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Координаты пучностей} & x_n = \pm m\dfrac{\lambda}{2}. \\ \text{Координаты узлов} & x_{узл} = \pm\left(m \pm \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}.\end{array}\right\}$$

Расстояние между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковое и равно $\lambda/2$.

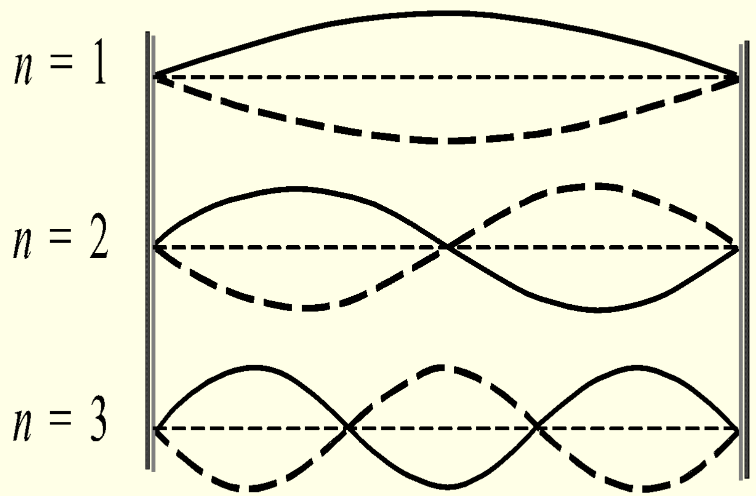
При переходе через узел фаза колебаний меняется на π.

В отличие от бегущей волны у стоячей волны все точки между двумя соседними узлами колеблются с различными A, но с одинаковыми фазами, т.е. ***синфазно.***

Колебание струны

В закреплённой с обоих концов струне устанавливаются стоячие волны. В местах закрепления струны – узлы. Следовательно, в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только колебания, полуволна которых ($\lambda/2$) укладывается на длине струны целое число раз.

$$l = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1,2...$$



v – фазовая скорость волны; определяется силой натяжения и линейной плотностью струны.

v – фазовая скорость волны; определяется силой натяжения и линейной плотностью струны.

$$\upsilon_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}n$$

– собственные частоты, им соответствуют собственные колебания – ***гармоники.***

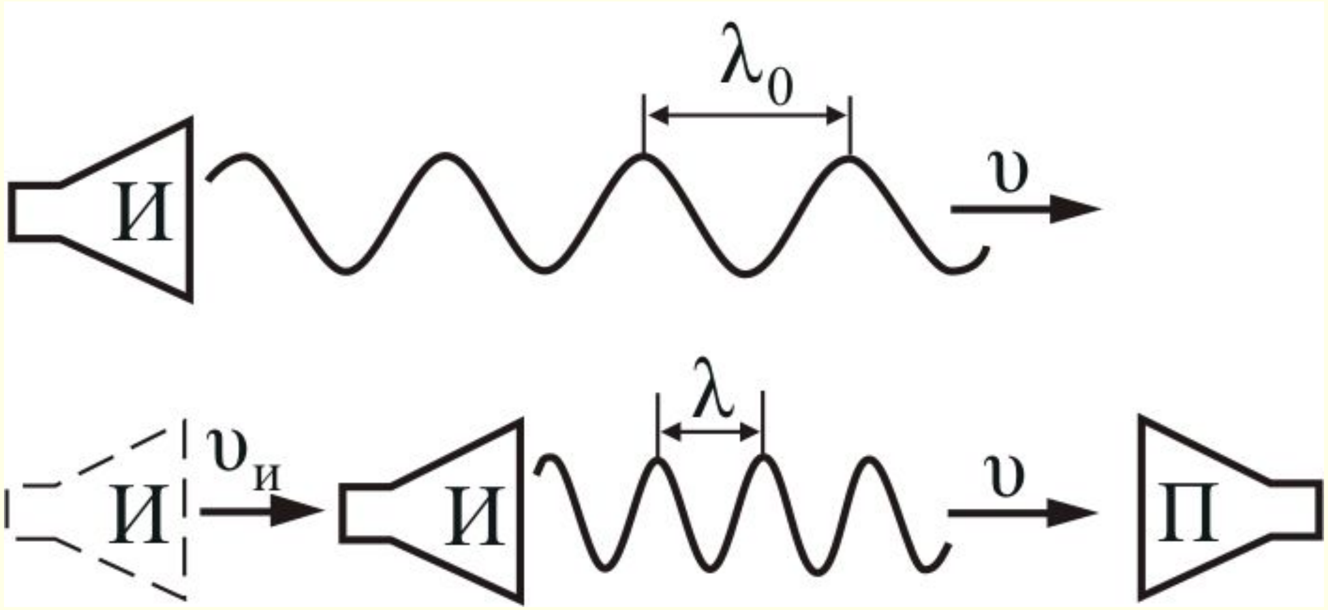
$$\upsilon_1 = \frac{v}{2l}$$

– основная частота (самая низкая частота).

Эффект Доплера в акустике

Эффект Доплера – изменение частоты волн, регистрируемых приёмником, при движении источника волн и приёмника друг относительно друга.

(При приближении поезда тон его звука становится выше, при удалении – ниже.)



Источник и приёмник покоятся $\upsilon_{ист} = \upsilon_{пр} = 0.$

Длина волны $\lambda_0 = \upsilon T = \dfrac{\upsilon}{\nu_0},$ υ – скорость звука в среде (фазовая скорость).

Частота волн, регистрируемых приёмником,

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda_0} = \frac{\upsilon}{\upsilon T} = \nu_0.$$

Частота звука ν, которую зарегистрирует приемник, равна частоте ν_0, с которой звуковая волна излучается источником.

✔Приёмник приближается к источнику

$\upsilon_{пр} > 0, \upsilon_{ист} = 0.$

Длина волны в среде $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{\upsilon}{\nu_0}.$

Скорость распространения волн относительно приёмника равна $\upsilon + \upsilon_{пр}$.

$$\nu = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\lambda_0} = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon T} = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon}\nu_0 = \nu_0\left(1 + \frac{\upsilon_{пр}}{\upsilon}\right) > \nu_0,$$

т.е. частота колебаний, воспринимаемых приемником, больше частоты колебаний источника