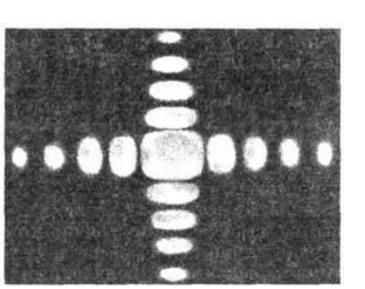
Дифракция Фраунгофера Дифракционная решетка.

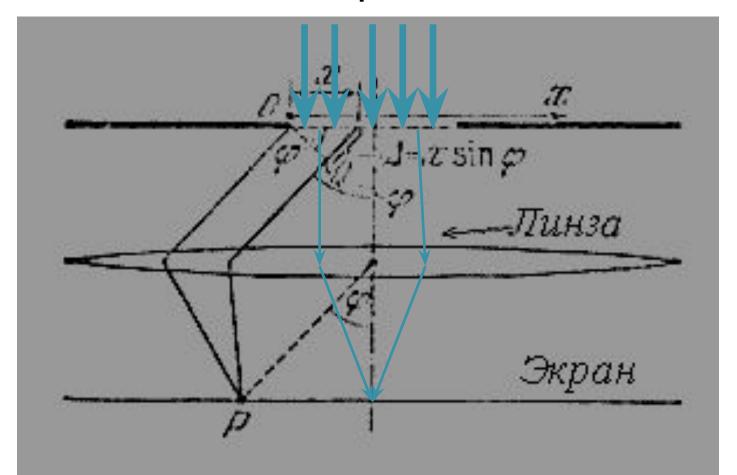


Лекция 9

- Дифракция Френеля- дифракция в сходящихся лучах (сферические волны), картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия.
- Дифракция Фраунгофера дифракция в параллельных луча (плоские волны), источник и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия.

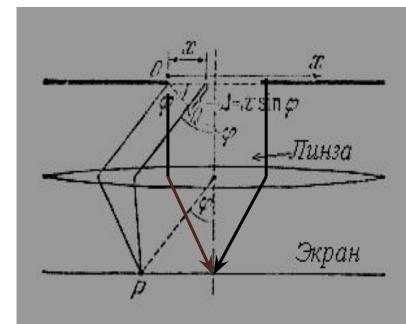
Дифракция от одной щели

Дифракция Фраунгофера – это дифракция плоской волны на препятствии.



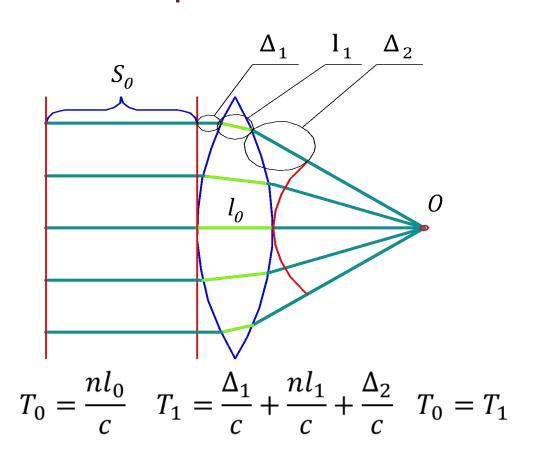
Дифракция от одной щели

- Согласно принципу Гюйгенса-Френеля все точки фронта волны, совпадающего с плоскостью щели, можно рассматривать как точечные когерентные источники вторичных волн.
- При ф = 0 вторичные волны приходят в точку наблюдения с одинаковой фазой и дают максимум интенсивности нулевого порядка.
- Около 90% всей интенсивности дифрагированной волны сосредоточено в пределах центрального максимума, между минимумами первого порядка.



Таутохронизм линз- линза не вносит

дополнительной разности фаз между лучами, проходящими через разные участки линзы. Все лучи после прохождения линзы придут в точку наблюдения за одно время.



- Найдем зависимость интенсивности волны от синуса угла отклонения ф волны от первоначального направления (рассматривается случай нормального падения).
- Разобьем открытую часть волновой поверхности на элементарные зоны шириной dx. Каждая элементарная зона создает в точке Р колебание dE с амплитудой dA = (A₀/b)dx.
- Разность фаз колебаний, возбуждаемых элементарными зонами с координатами О и Х создается на пути Δ= x sinф и равна δ=kΔ.

$$dE = \frac{A_0}{b} dx \exp[i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi)]$$

$$E = \int_{b/2}^{b/2} \frac{A_0}{b} \exp[i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi)] dx =$$

$$=\frac{A_0}{b}\prod^{i\omega t}\int_{-b/2}^{b/2}\prod^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi}dx=\frac{A_0}{b}\prod^{i\omega t}\frac{1}{(-i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\varphi)}\prod^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi}\Big|_{-b/2}^{b/2}=$$

$$= \frac{A_0}{b} \Box^{\omega t} \frac{\Box^{-i\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi} - \Box^{i\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi}}{(-i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\varphi)} = A_0 \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi} \Box^{\omega t} = A(\varphi)\Box^{\omega t}$$

 І. Для точки, лежащей напротив оптического центра линзы

$$\varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0$$

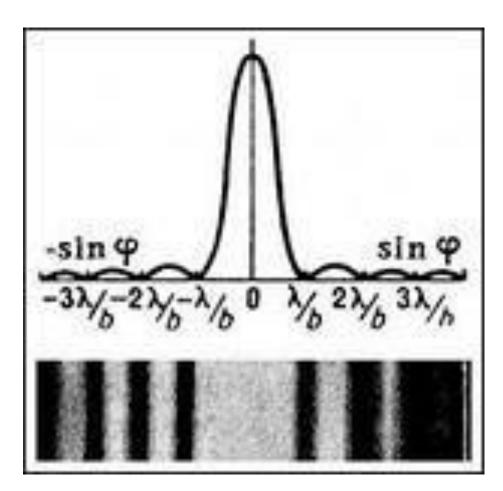
$$A(\varphi = 0) = A_0 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = A_0$$

• При
$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = \pm m\pi$$
 $A(\varphi) = 0$

$$b\sin\varphi = m\lambda \implies \min$$

Распределение интенсивности при дифракции на одной щели

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}\right)^2$$



• Количество интерференционных полос

$$\varphi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \pm \frac{m\lambda}{b} \le 1$$

$$m \le \frac{b}{\lambda}$$

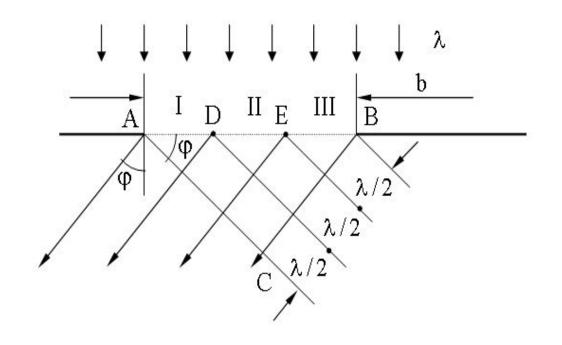
• Угловая ширина центрального максимума определяется из условия

$$\Delta \varphi = \varphi_{1cnpaea} - \varphi_{1cneea} = 2 \arcsin \frac{\lambda}{b}$$

При малых углах дифракции

$$\Delta \varphi = 2\frac{\lambda}{b}$$

- Разделим оптическую разность хода ВС на отрезки λ/2, и проведем перпендикуляры на отрезок АВ.
- На АВ, который является фронтом плоской волны, получим зоны, аналогичные зонам Френеля.
- Число зон Френеля, укладывающихся на щели шириной b, равно N = b sinф/ (λ/2).



Условия дифракционных максимумов и минимумов на одной щели

- Минимум (N-четное)
- Максимум (N-нечетное)

$$\frac{-\sin\varphi}{-3\lambda_{b}^{\prime}-2\lambda_{b}^{\prime}-\lambda_{b}^{\prime}} = \frac{\sin\varphi}{\lambda_{b}^{\prime}} \frac{\sin\varphi}{2\lambda_{b}^{\prime}} \frac{\sin\varphi}{3\lambda_{b}^{\prime}}$$

$$b\sin\varphi=2m\frac{\lambda}{2}=m\lambda,$$

$$m = \pm 1,2,3...$$

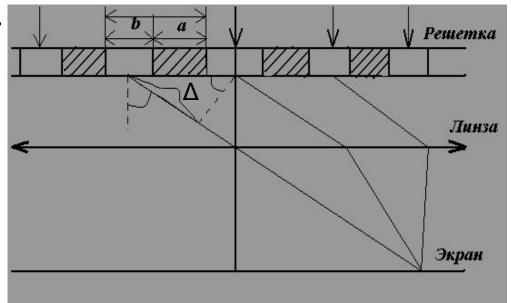
$$b\sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2} = (m+\frac{1}{2})\lambda,$$

$$m = \pm 1, 2, 3...$$

Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Дифракционная решетка - спектральный прибор, состоящий из большого числа ($\bf N$) одинаковых щелей (шириной $\bf b$) в непрозрачном экране, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние ($\bf a$). Величина $\bf d = a + b$ называется

периодом решетки.



- Наблюдаемая при дифракции Фраунгофера на решетке дифракционная картина представляет собой результат суммарной многолучевой интерференции волн от вторичных когерентных источников на каждой щели и на разных щелях.
- Ввиду строго периодического расположения щелей когерентные волны, прошедшие через разные щели, будут интерфирировать между собой и дадут четкую дифракционную картину.
- Разность хода волн, прошедших через соседние щели Δ = d·sinφ, следовательно, разность фаз этих волн δ = 2πΔ / λ = 2πd·sinφ / λ

$$E = A_{1} \Box^{i\omega t} + A_{1} \Box^{i(\omega t + \delta)} + \dots + A_{1} \Box^{i(\omega t + (N-1)\delta)} =$$

$$= A_{1} \Box^{i\omega t} \sum_{m=1}^{N} \Box^{i(m-1)\delta} = A_{1} \Box^{i\omega t} \frac{1 - \Box^{iN\delta}}{1 - \Box^{i}}$$

$$(1 - \Box^{iN\delta}) (1 - \Box^{iN\delta})$$

$$I = E \times E^* = A_1^2 \frac{(1 - \Box^{iN\delta})(1 - \Box^{-iN\delta})}{(1 - \Box^{i\delta})(1 - \Box^{-i\delta})} = A_1^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} =$$

$$= A_1^2 \frac{\sin^2(N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi)}{\sin^2(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi)}$$

Распределение интенсивности при дифракции на дифракционной решетке

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda})^2} \cdot \frac{\sin^2 (N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi)}{\sin^2 (\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi)}$$

- При $\phi = 0$ в центре картины наблюдается главный максимум нулевого порядка. При $\phi = 0$ все волны приходят в точку наблюдения в одной фазе. Амплитуда волны $A = NA_0$, где A_0 амплитуда волны, прошедшей через одну щель. Интенсивность волны $I = N^2 I_0$. Этот результат является следствием интерференции когерентных волн (N некогерентных источников дают интенсивность $I = N I_0$).
- lacktriangle При углах ϕ , удовлетворяющих условию

$$d \cdot \sin \phi = \pm m \lambda ,$$

разность фаз волн, прошедших через соседние щели,

$$\Delta \phi = \pm m \lambda \cdot 2\pi / \lambda = \pm 2\pi m,$$

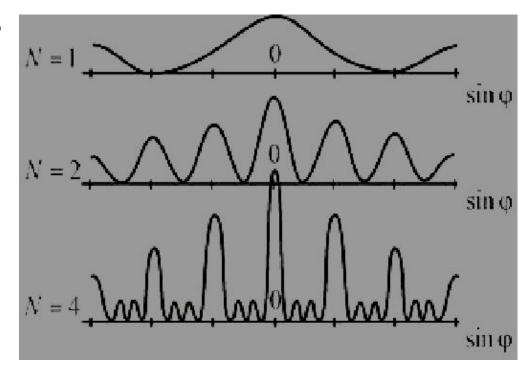
волны приходят в точку наблюдения в одной фазеглавные максимумы *m*-го порядка. Между главными максимумами расположены минимумы (N-1) и побочные максимумы. Условия минимумов:

dsinφ = ± (m +
$$k/N$$
) λ ,
rate $k = 1, 2, 3, ..., N-1$

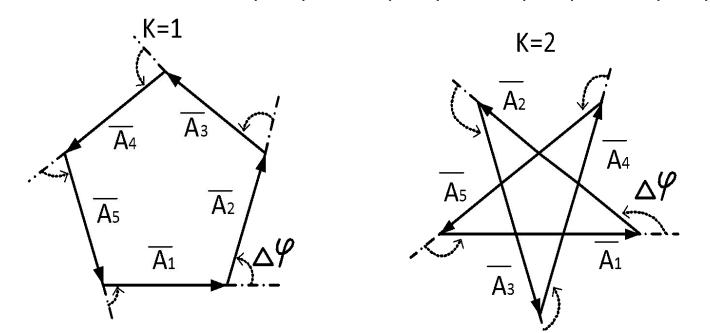
Эти минимумы интерференционные и обусловлены взаимным гашением волн, прошедших через все щели.

 По-прежнему наблюдаются минимумы в направлениях, когда

$$b \sin \phi = \pm m \lambda$$
.



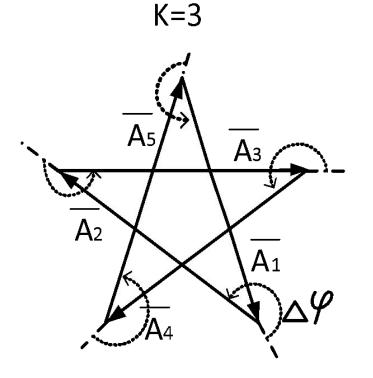
- На векторной диаграмме колебания, приходящие от первой, ..., N-ой щели изобразятся векторами одинаковой длины, разность фаз между которыми будет составлять Δφ = (m + k/N) 2π, при этом конец последнего вектора совпадет с началом первого.
- Решетка с пятью щелями (N=5)
 m=0 и k = I: Δφ = (1/5) 2π, (2/5) 2π, (3/5) 2π, (4/5) 2π;
 m=0 и k = 2: Δφ = (2/5) 2π, (4/5) 2π, (6/5) 2π, (8/5) 2π;

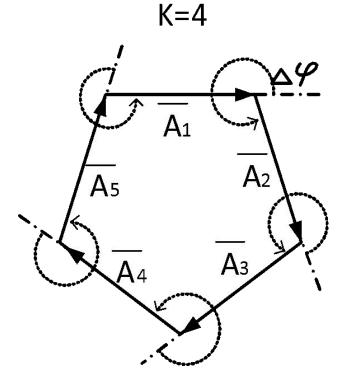


Решетка с пятью щелями (N=5)

m=0 и k = 3: $\Delta \phi$ = (3/5) 2 π , (6/5) 2 π , (9/5) 2 π , (12/5) 2 π ;

m=0 μ k = 4: $\Delta \varphi$ = (4/5) 2π , (2/5) 2π , (3/5) 2π , (4/5) 2π .





Для дифракционной решетки:

Условие главных

максимумов

m=0,1,2,..- номер максимума

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda$$

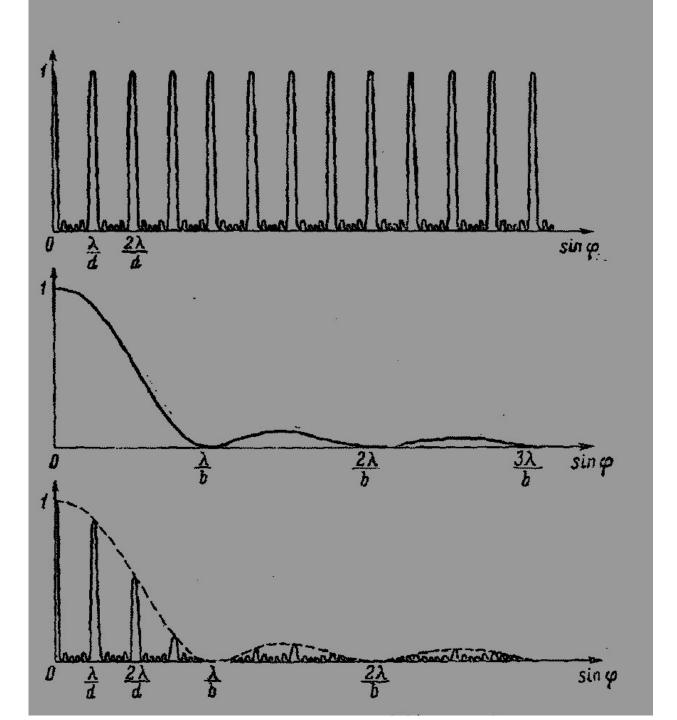
$$b\sin\varphi = \pm m\lambda$$

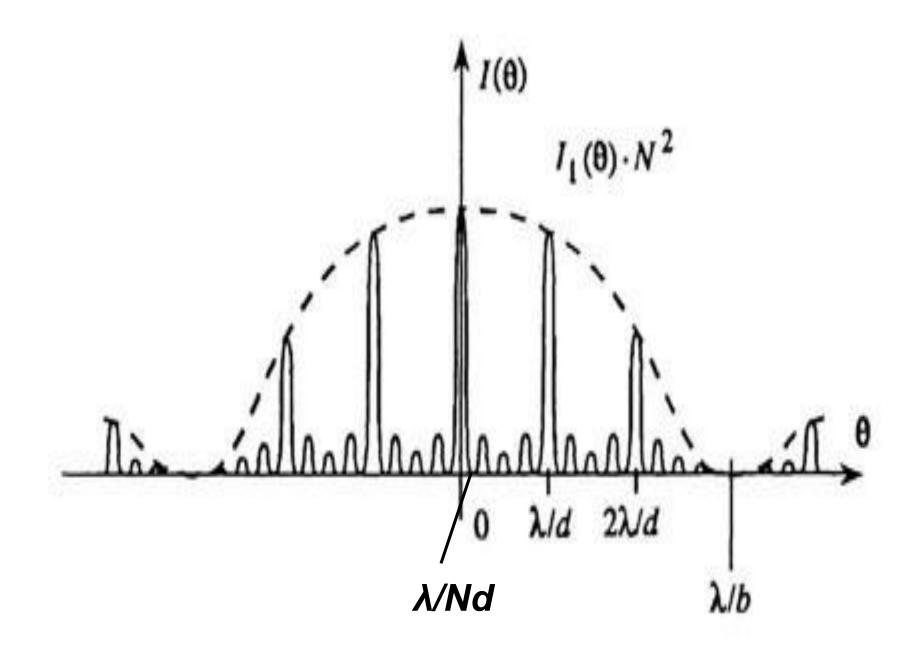
Условие главных m=1,2,..- номер (порядок) минимума минимумов

$$d\sin\phi=\pm(\mathbf{m}+k^{'}/N)\lambda$$
 Условие доп. минимумов

k'- целое число не кратное N

$$k' \neq 2mN$$





Дифракционная картина выражена тем резче, чем больше число щелей N. Действительно, угловая ширина центрального максимума определяется условием первого минимума (4):

 $\Delta \phi = 2 \arcsin(\lambda / Nd),$

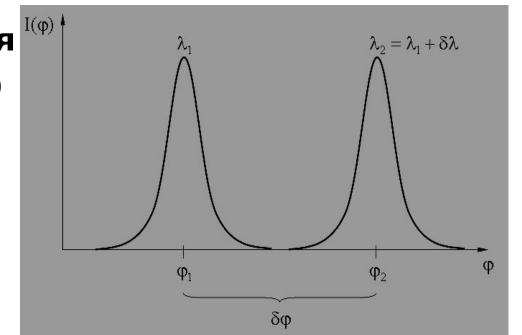
что в *Nd/b* ≈ *N* раз меньше, чем при дифракции на одной щели.

 Положение всех главных максимумов, кроме нулевого, зависит от длины волны. Поэтому главные максимумы различных длин волн будут разделены на экране; таким образом, дифракционная решетка будет производить разложение немонохроматического излучения на спектральные составляющие.

- Дисперсия угловое (или линейное) расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на единицу (например, на 1 мкм).
- Угловая дисперсия

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi} \approx \frac{m}{d}$$

• Линейная дисперсия (расстояние на экране) $D = D_{\varphi} F$, где F фокусное расстояние линзы.

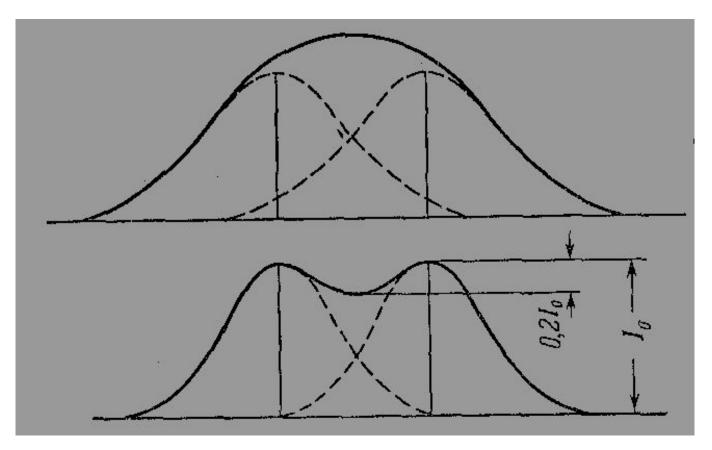


• Разрешающая сила определяется минимальной разностью длин волн, при которой две линии в спектре воспринимаются раздельно.

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda}$$

• Согласно критерию Рэлея две линии в спектре воспринимаются раздельно (считаются разрешенными), если дифракционный максимум первой линии совпадает (или лежит дальше) с минимумом второй линии.

Критерий Рэлея



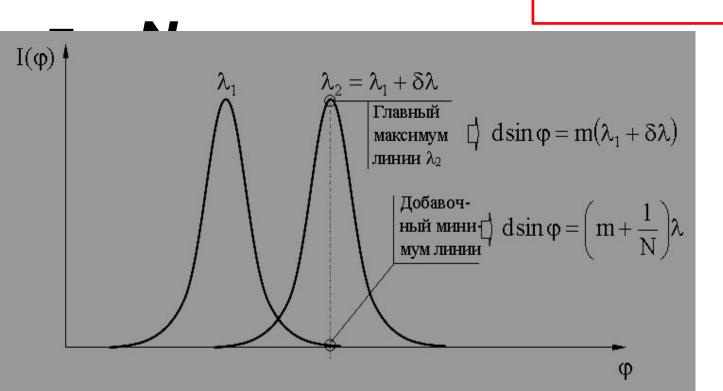
Минимум интенсивности одной линии должен совпадать с максимумом другой.

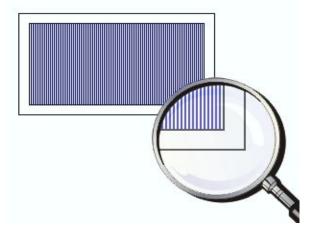
Запишем условие m-го максимума для линии с длиной волны λ + δλ и ближайшего минимума для линии с длиной волны λ:

$$d \cdot sin \phi = m(\lambda + \delta \lambda), \quad d \cdot sin \phi = (m + I/N) \lambda.$$

Откуда $m \delta \lambda = \lambda/N$ и разрешающая сила

$$R = \lambda / \delta \lambda$$





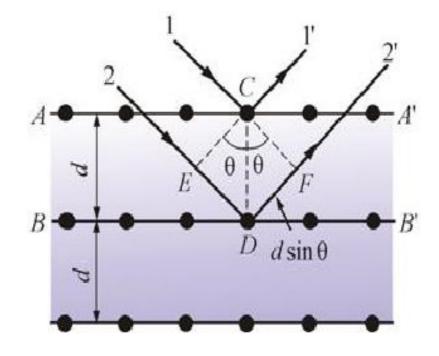
• На стеклянных решетках наблюдения можно производить как в проходящем, так и в отраженном свете, на металлических - только в отраженном. Наиболее типичные дифракционные решетки, которые используются для работы в видимом диапазоне спектра (390 - 780 нм) имеют от 300 до 1600 штрихов/мм.

Дифракция рентгеновских лучей

- Дифракцию рентгеновских лучей можно рассматривать как результат отражения рентгеновских лучей от плоскостей кристалла.
- Это отражение, в отличие от обычного, происходит лишь при таких условиях падения лучей на кристалл, которые соответствуют максимуму интерференции для лучей, отраженных от разных плоскостей.

$$\lambda = 10^{-10} M$$

 $2dsin\Theta=m\lambda$



- Рентгеновская спектроскопия для исследования спектрального состава излучения
- Рентгеноструктурный анализ для изучения структуры кристалла

