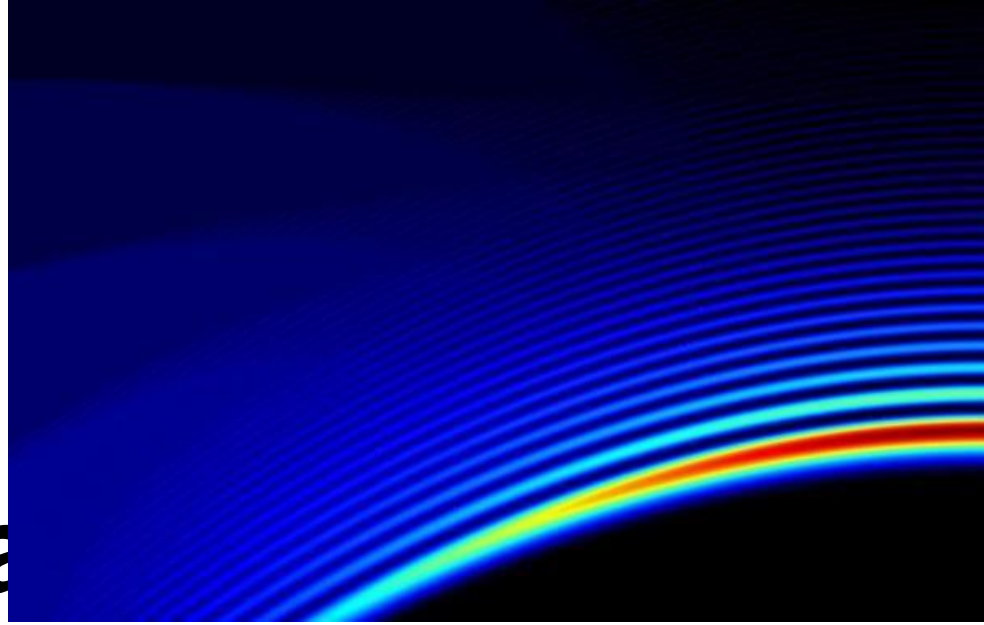
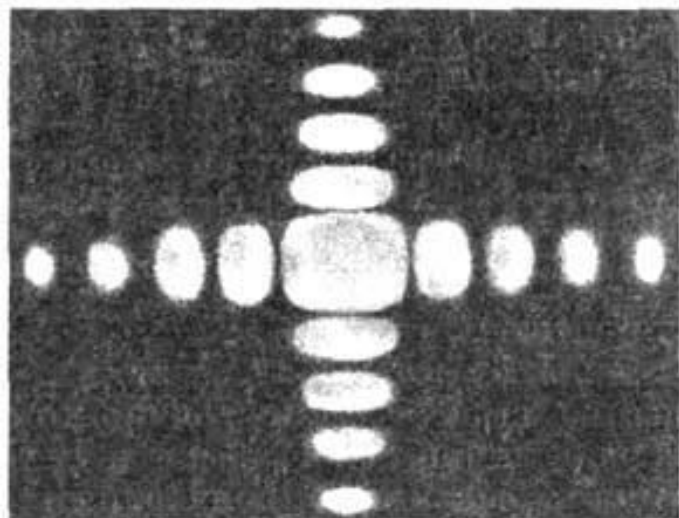


**Дифракция
Фраунгофера**



Дифракционная решетка.



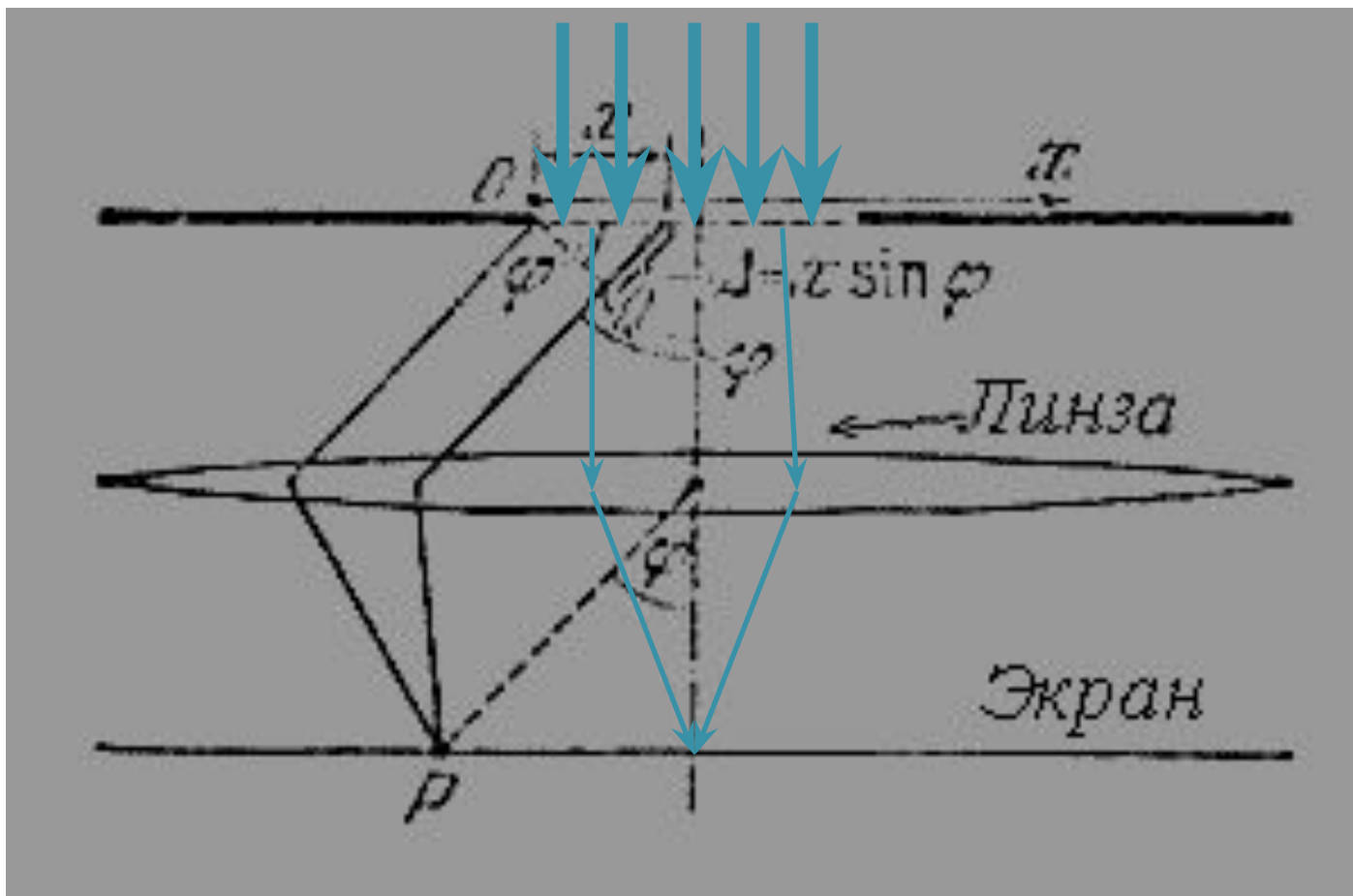
Лекция

9

- **Дифракция Френеля**- дифракция в сходящихся лучах (сферические волны), картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия.
- **Дифракция Фраунгофера** – дифракция в параллельных луча (плоские волны), источник и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия.

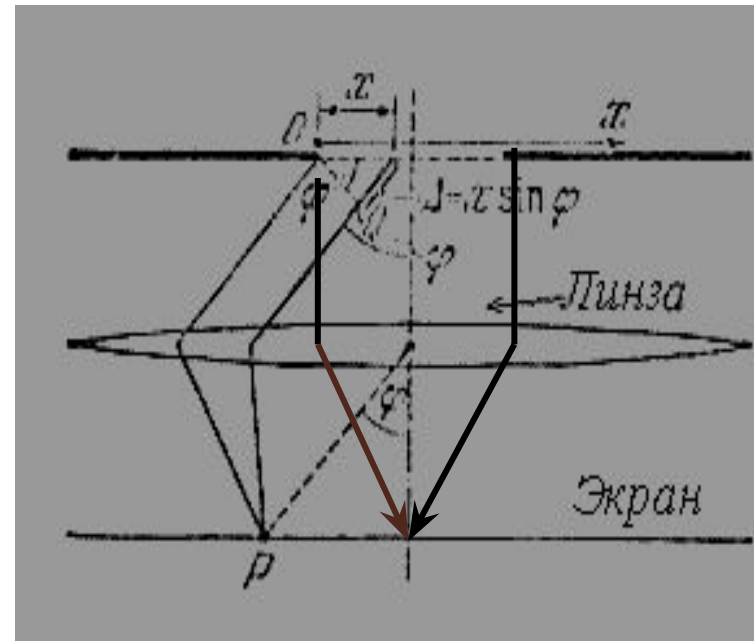
Дифракция от одной щели

Дифракция Фраунгофера – это дифракция плоской волны на препятствии.

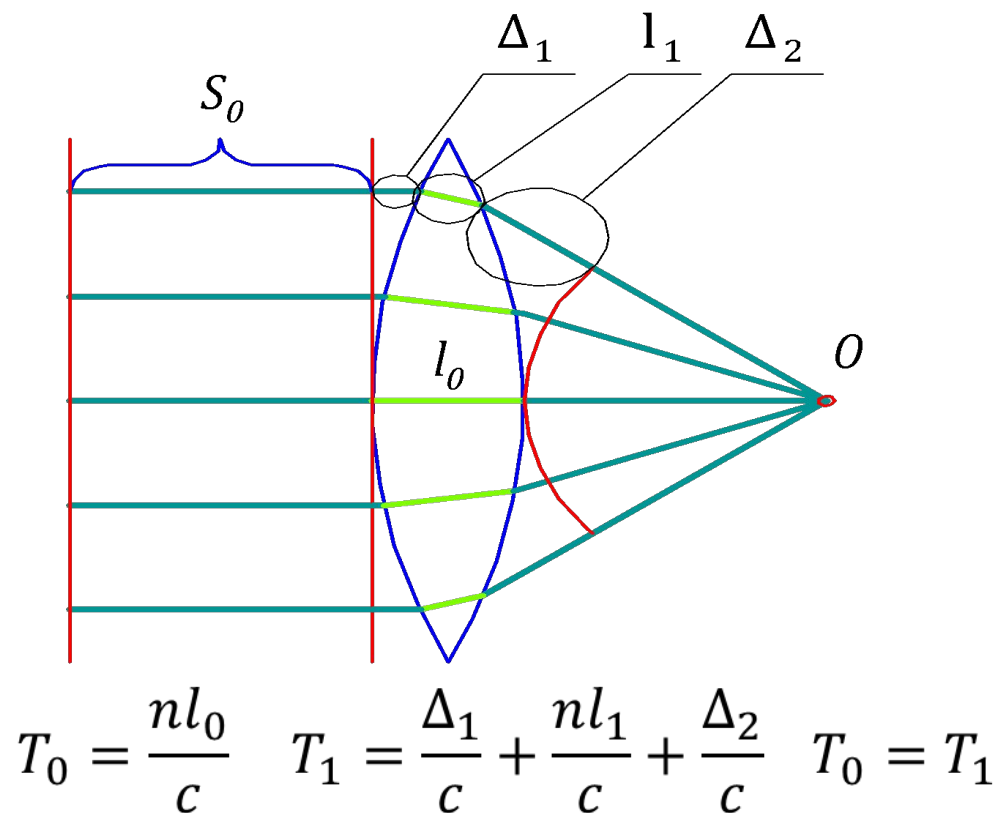


Дифракция от одной щели

- Согласно принципу Гюйгенса-Френеля все точки фронта волны, совпадающего с плоскостью щели, можно рассматривать как точечные когерентные источники вторичных волн.
- При $\phi = 0$ вторичные волны приходят в точку наблюдения с одинаковой фазой и дают максимум интенсивности нулевого порядка.
- Около 90% всей интенсивности дифрагированной волны сосредоточено в пределах центрального максимума, между минимумами первого порядка.



Таутохронизм линз - линза не вносит дополнительной разности фаз между лучами, проходящими через разные участки линзы. Все лучи после прохождения линзы придут в точку наблюдения за одно время.



- Найдем зависимость интенсивности волны от синуса угла отклонения ϕ волны от первоначального направления (рассматривается случай нормального падения).
- Разобьем открытую часть волновой поверхности на элементарные зоны шириной dx . Каждая элементарная зона создает в точке Р колебание dE с амплитудой $dA = (A_0/b)dx$.
- Разность фаз колебаний, возбуждаемых элементарными зонами с координатами O и X создается на пути $\Delta = x \sin\phi$ и равна $\delta = k\Delta$.

$$dE = \frac{A_0}{b} dx \exp\left[i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi)\right]$$

$$E = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{A_0}{b} \exp\left[i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi)\right] dx =$$

$$= \frac{A_0}{b} \exp^{i\omega t} \int_{-b/2}^{b/2} \exp^{-i\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi} dx = \frac{A_0}{b} \exp^{i\omega t} \frac{1}{\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi\right)} \exp^{-i\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi} \Big|_{-b/2}^{b/2} =$$

$$= \frac{A_0}{b} \exp^{i\omega t} \frac{\exp^{-i\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi} - \exp^{i\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi}}{\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi\right)} = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi} \exp^{i\omega t} = A(\varphi) \exp^{i\omega t}$$

- I. Для точки, лежащей напротив оптического центра линзы

$$\varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0$$

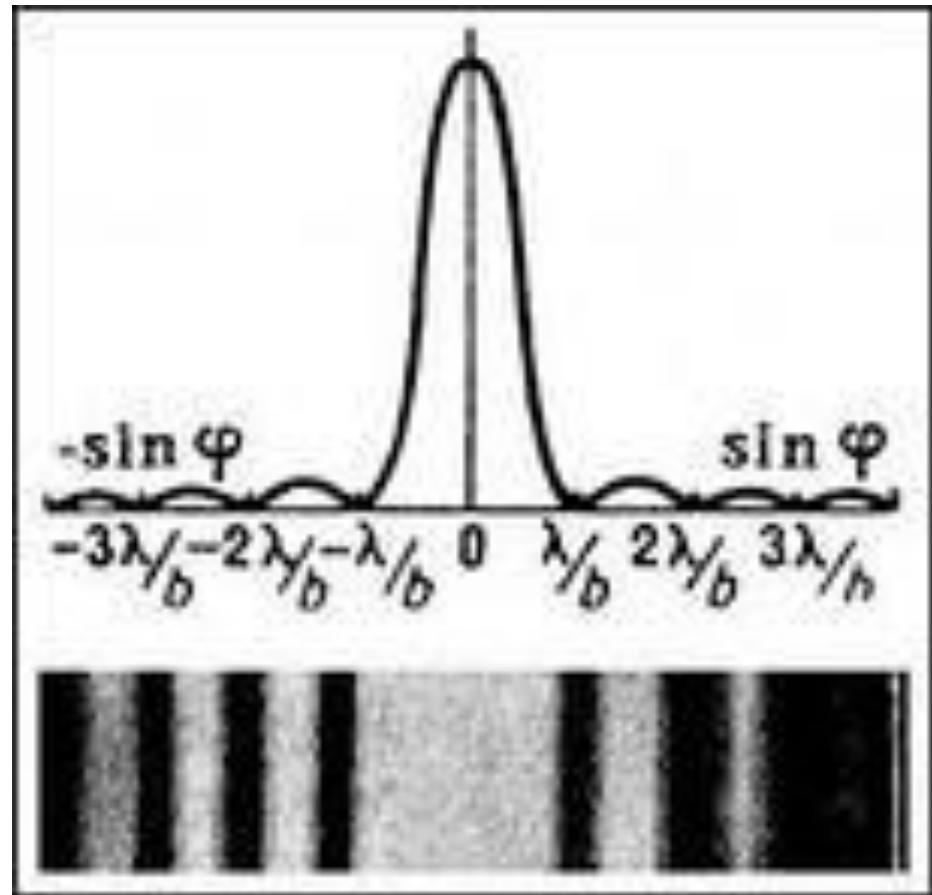
$$A(\varphi = 0) = A_0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = A_0$$

- При $\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = \pm m\pi$ $A(\varphi) = 0$

$$b \sin \varphi = m\lambda \Rightarrow \text{min}$$

Распределение интенсивности при дифракции на одной щели

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \right)^2$$



- Количество интерференционных полос

$$\varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \pm \frac{m\lambda}{b} \leq 1$$

$$m \leq \frac{b}{\lambda}$$

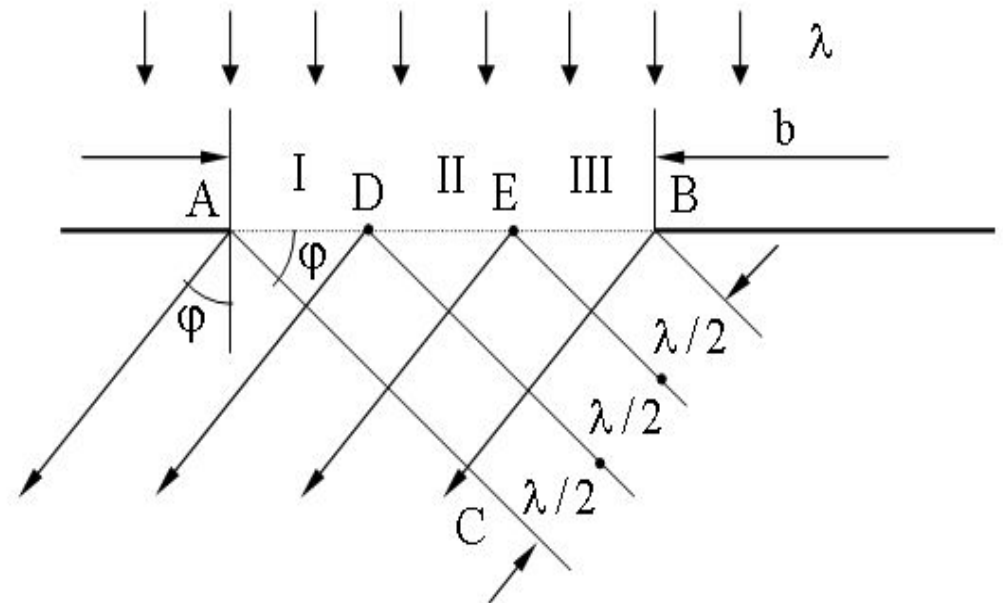
- Угловая ширина центрального максимума определяется из условия

$$\Delta\varphi = \varphi_{1\text{справа}} - \varphi_{1\text{слева}} = 2 \arcsin \frac{\lambda}{b}$$

При малых углах дифракции

$$\Delta\varphi = 2 \frac{\lambda}{b}$$

- Разделим оптическую разность хода BC на отрезки $\lambda/2$, и проведем перпендикуляры на отрезок AB .
- На AB , который является фронтом плоской волны, получим зоны, аналогичные зонам Френеля.
- Число зон Френеля, укладывающихся на щели шириной b , равно $N = b \sin\phi / (\lambda/2)$.



Условия дифракционных максимумов и минимумов на одной щели

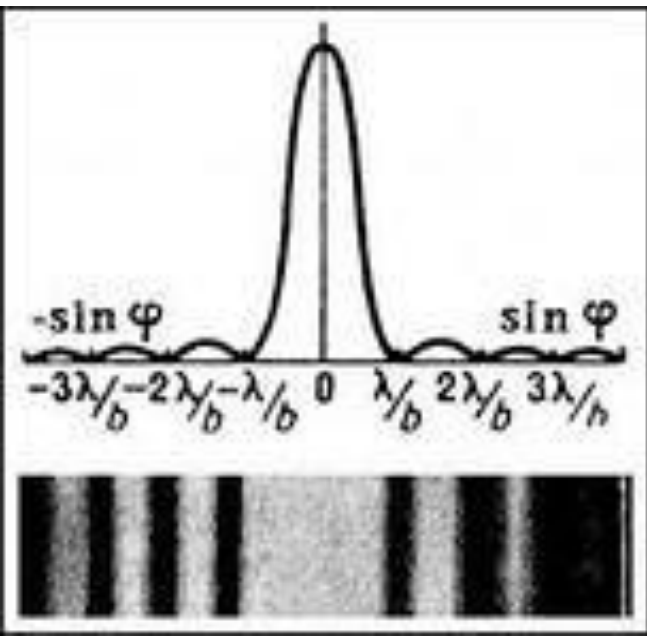
- Минимум
(N-четное)
- Максимум
(N-нечетное)

$$b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

$$m = \pm 1, 2, 3 \dots$$

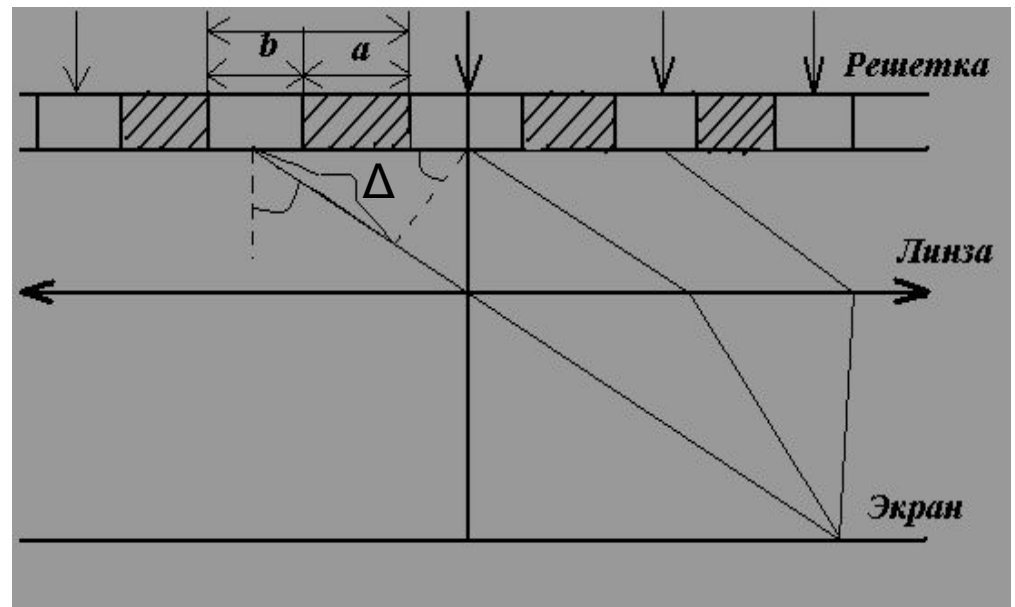
$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} = (m + \frac{1}{2})\lambda,$$

$$m = \pm 1, 2, 3 \dots$$



Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Дифракционная решетка - спектральный прибор, состоящий из большого числа (\mathbf{N}) одинаковых щелей (шириной \mathbf{b}) в непрозрачном экране, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние (\mathbf{a}). Величина $\mathbf{d = a + b}$ называется **периодом решетки**.



- Наблюдаемая при дифракции Фраунгофера на решетке дифракционная картина представляет собой результат суммарной многолучевой интерференции волн от вторичных когерентных источников на каждой щели и на разных щелях.
- Ввиду строго периодического расположения щелей когерентные волны, прошедшие через разные щели, будут интерферировать между собой и дадут четкую дифракционную картину.
- Разность хода волн, прошедших через соседние щели $\Delta = d \cdot \sin\phi$, следовательно, разность фаз этих волн $\delta = 2\pi\Delta / \lambda = 2\pi d \cdot \sin\phi / \lambda$

$$E = A_1 e^{i\omega t} + A_1 e^{i(\omega t + \delta)} + \dots + A_1 e^{i(\omega t + (N-1)\delta)} =$$

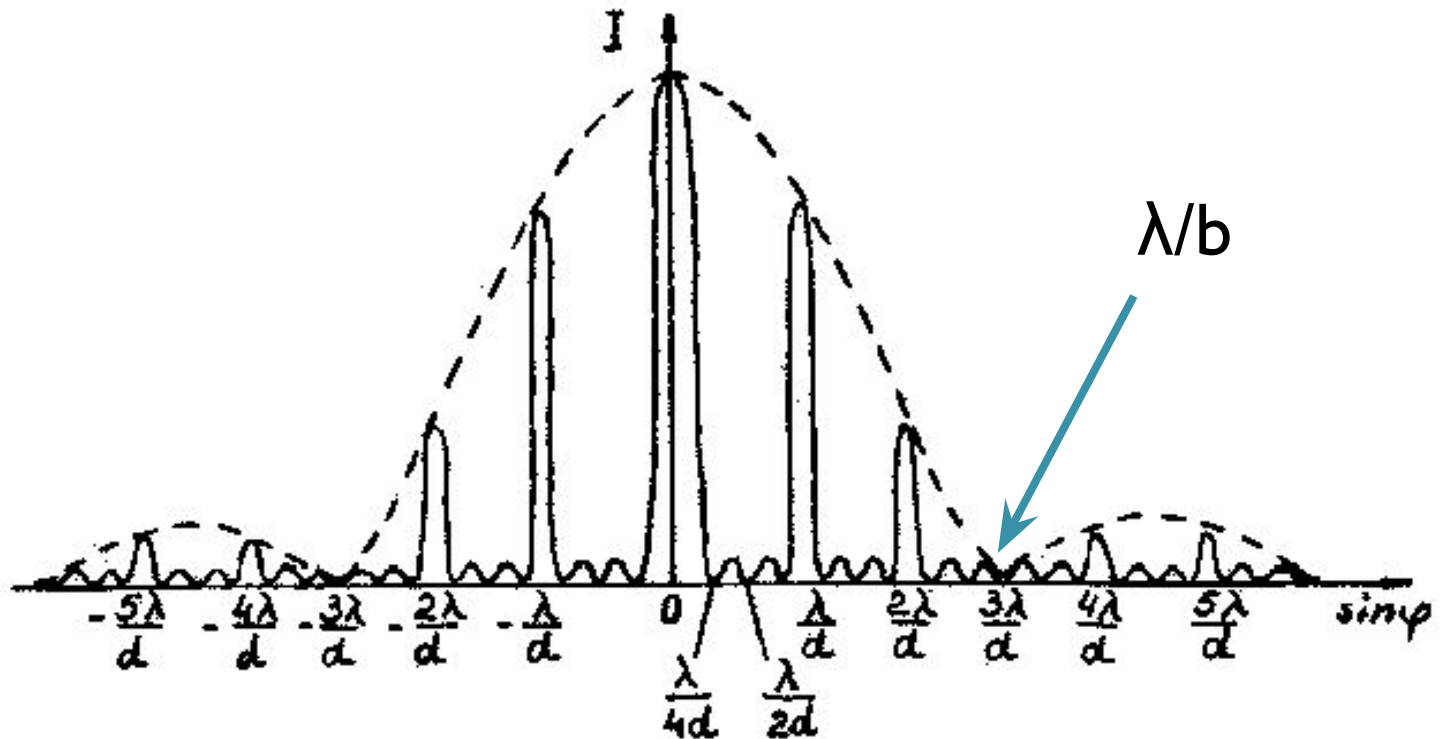
$$= A_1 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)\delta} = A_1 e^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

$$I = E \times E^* = A_1^2 \frac{(1 - e^{iN\delta})(1 - e^{-iN\delta})}{(1 - e^{i\delta})(1 - e^{-i\delta})} = A_1^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} =$$

$$= A_1^2 \frac{\sin^2 \left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)}$$

Распределение интенсивности при дифракции на дифракционной решетке

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}$$



- При $\phi = 0$ в центре картины наблюдается главный максимум нулевого порядка. При $\phi = 0$ все волны приходят в точку наблюдения в одной фазе. Амплитуда волны $A = NA_0$, где A_0 - амплитуда волны, прошедшей через одну щель. Интенсивность волны $I = N^2 I_0$. Этот результат является следствием интерференции когерентных волн (N некогерентных источников дают интенсивность $I = N I_0$).
- При углах ϕ , удовлетворяющих условию

$$d \cdot \sin\phi = \pm m \lambda ,$$

разность фаз волн, прошедших через соседние щели,

$$\Delta\phi = \pm m \lambda \cdot 2\pi / \lambda = \pm 2\pi m,$$

волны приходят в точку наблюдения в одной фазе - **главные максимумы m -го порядка.**

- Между главными максимумами расположены минимумы $(N-1)$ и побочные максимумы. Условия минимумов:

$$d \sin \phi = \pm (m + k/N) \lambda,$$

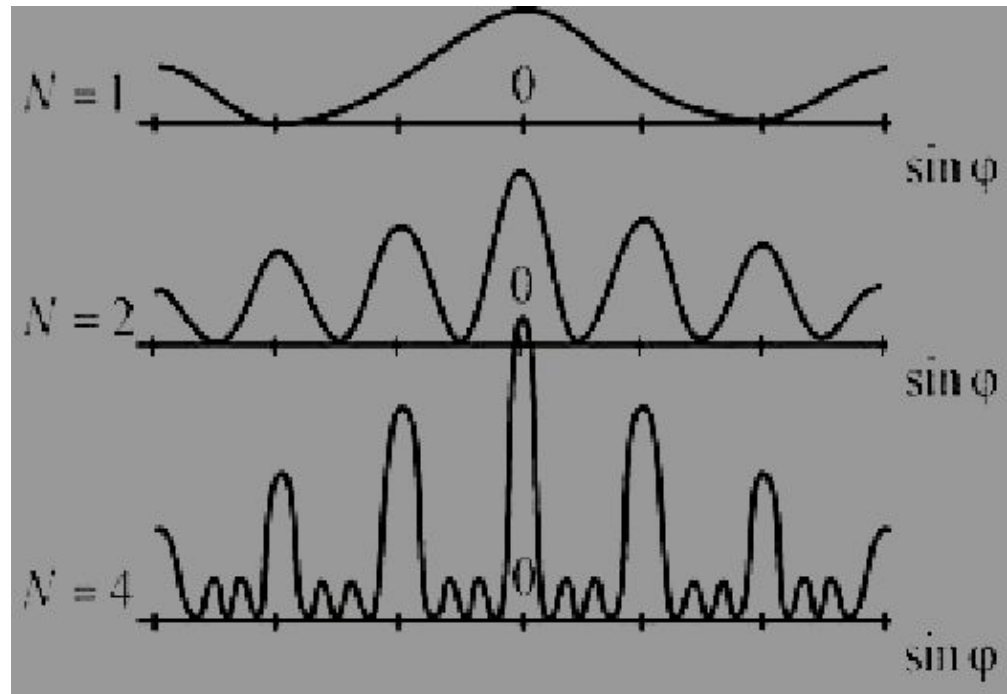
где $k = 1, 2, 3, \dots, N-1$

Эти минимумы интерференционные и обусловлены взаимным гашением волн, прошедших через все щели.

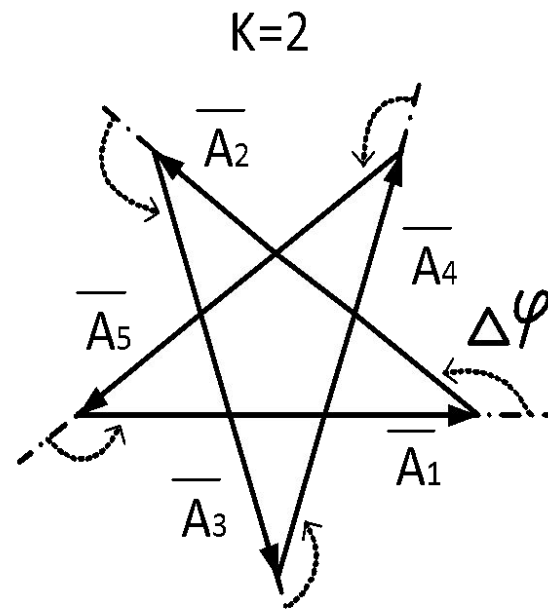
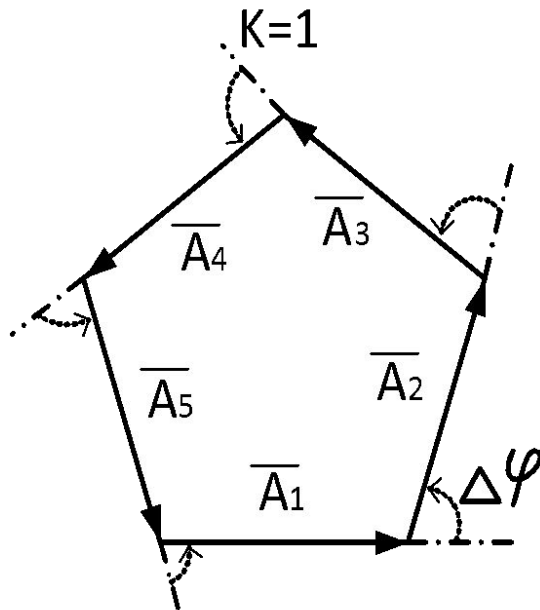
- По-прежнему наблюдаются минимумы в

направлениях, когда

$$b \sin \phi = \pm m \lambda.$$



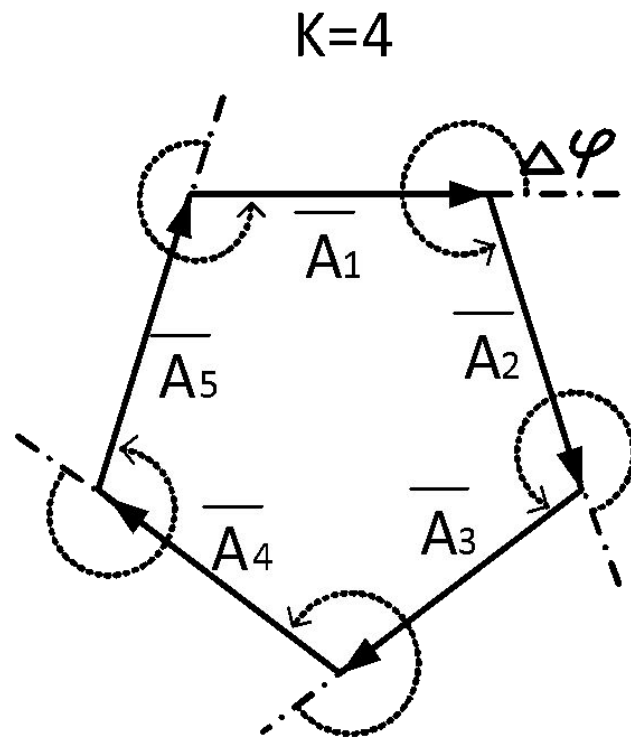
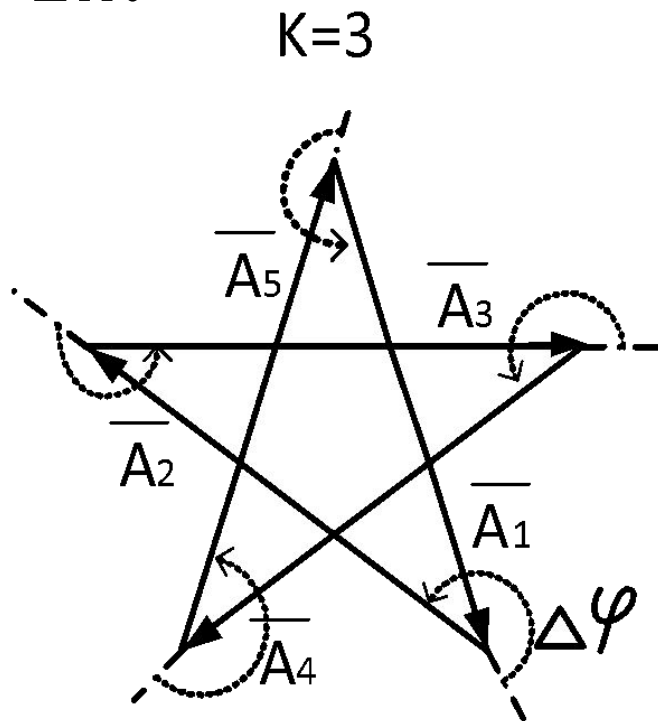
- На векторной диаграмме колебания, приходящие от первой, ..., N-ой щели изобразятся векторами одинаковой длины, разность фаз между которыми будет составлять $\Delta\phi = (m + k/N) 2\pi$, при этом конец последнего вектора совпадет с началом первого .
- Решетка с пятью щелями (N=5)
 - m=0 и k = 1: $\Delta\phi = (1/5) 2\pi, (2/5) 2\pi, (3/5) 2\pi, (4/5) 2\pi$;
 - m=0 и k = 2: $\Delta\phi = (2/5) 2\pi, (4/5) 2\pi, (6/5) 2\pi, (8/5) 2\pi$;



- Решетка с пятью щелями ($N=5$)

$m=0$ и $k = 3$: $\Delta\phi = (3/5) 2\pi, (6/5) 2\pi, (9/5) 2\pi, (12/5) 2\pi$;

$m=0$ и $k = 4$: $\Delta\phi = (4/5) 2\pi, (2/5) 2\pi, (3/5) 2\pi, (4/5) 2\pi$.



Для дифракционной решетки:

Условие главных максимумов

$m=0, 1, 2, \dots$ - номер максимума

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda$$

$$b \sin \varphi = \pm m \lambda$$

Условие главных минимумов

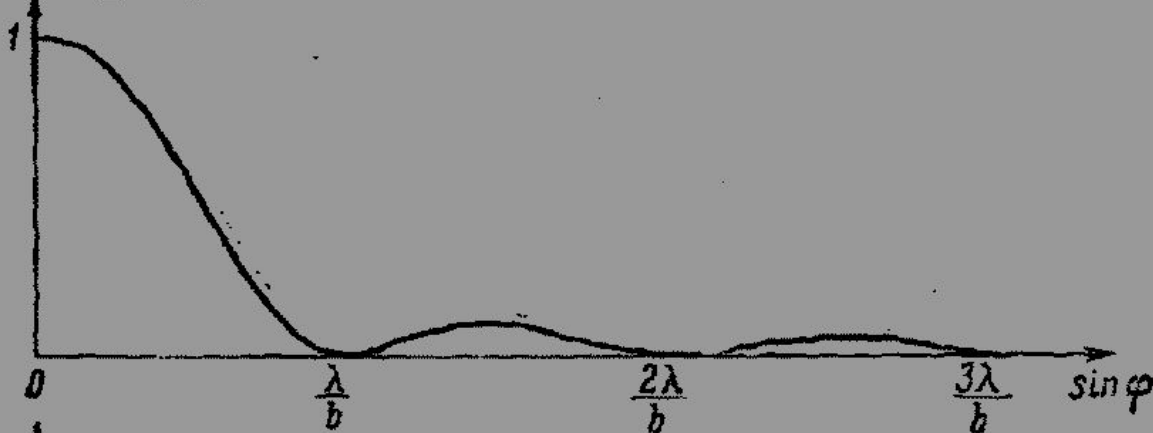
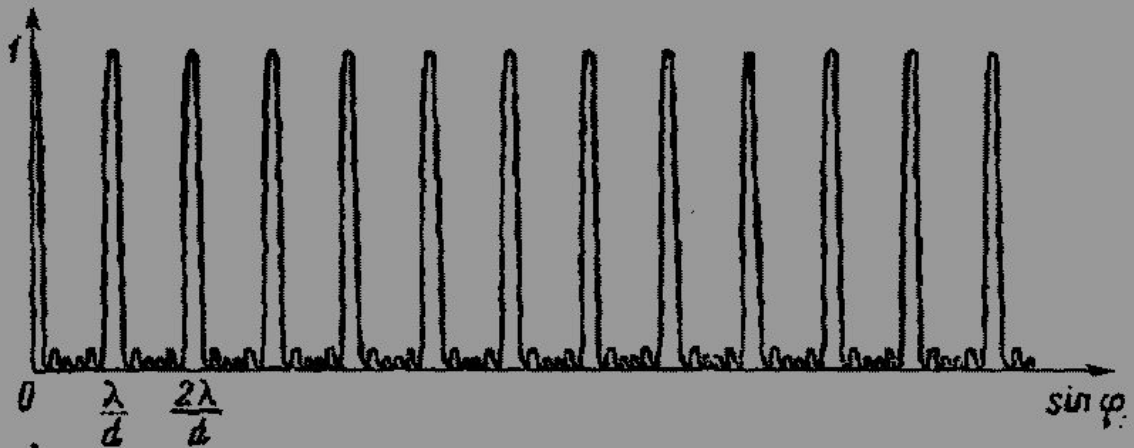
$m=1, 2, \dots$ - номер (порядок) минимума

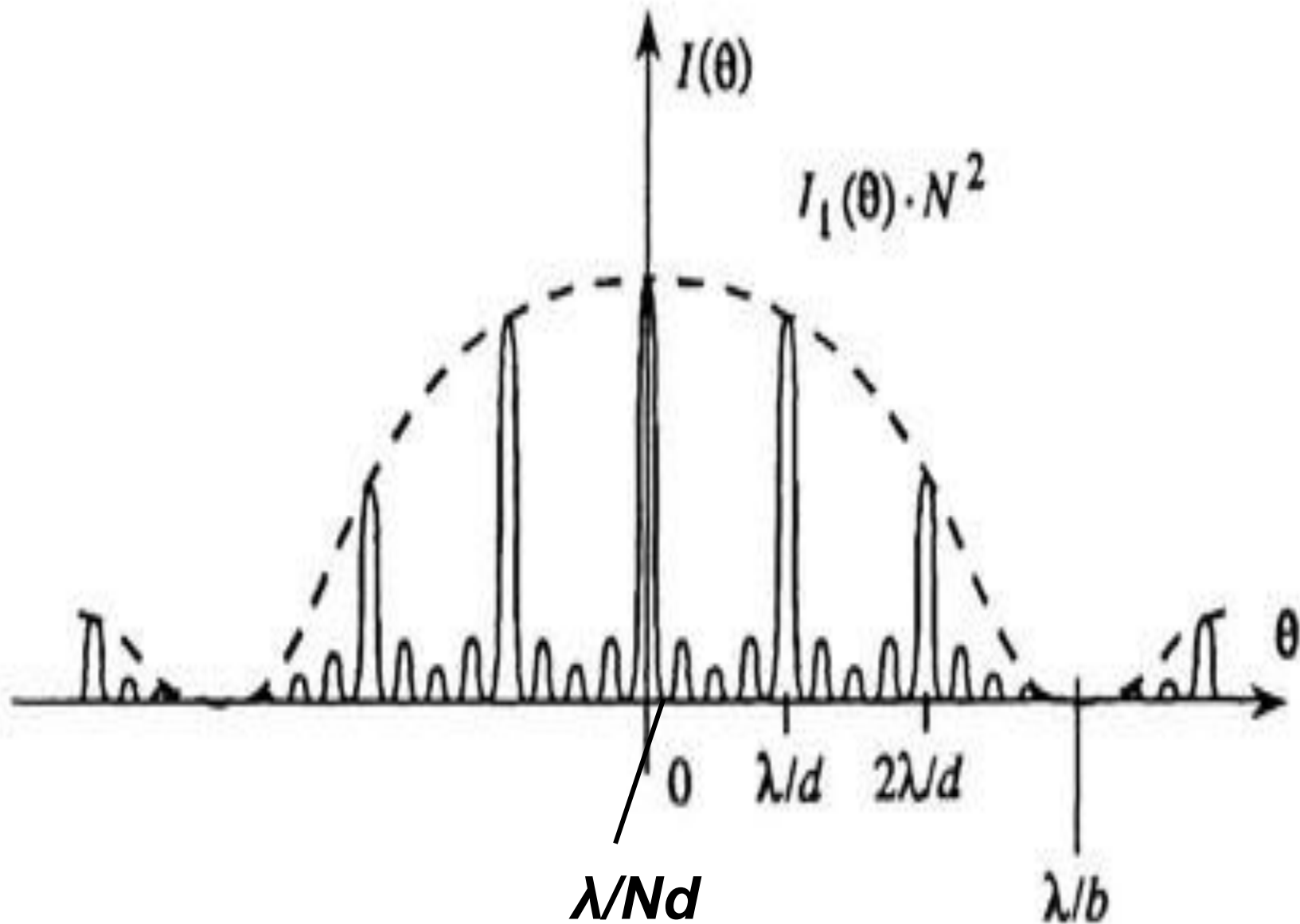
Условие доп. минимумов

k' - целое число не кратное N

$$d \sin \varphi = \pm (m + k' / N) \lambda$$

$$k' \neq 2mN$$





- Дифракционная картина выражена тем резче, чем больше число щелей N . Действительно, **угловая ширина центрального максимума** определяется условием первого минимума (4):

$$\Delta\phi = 2 \arcsin(\lambda / Nd),$$

что в $Nd/b \approx N$ раз меньше, чем при дифракции на одной щели.

- Положение всех главных максимумов, кроме нулевого, зависит от длины волны. Поэтому главные максимумы различных длин волн будут разделены на экране; таким образом, **дифракционная решетка будет производить разложение некогерентного излучения на спектральные составляющие.**

- Дисперсия - угловое (или линейное) расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на единицу (например, на 1 мкм).

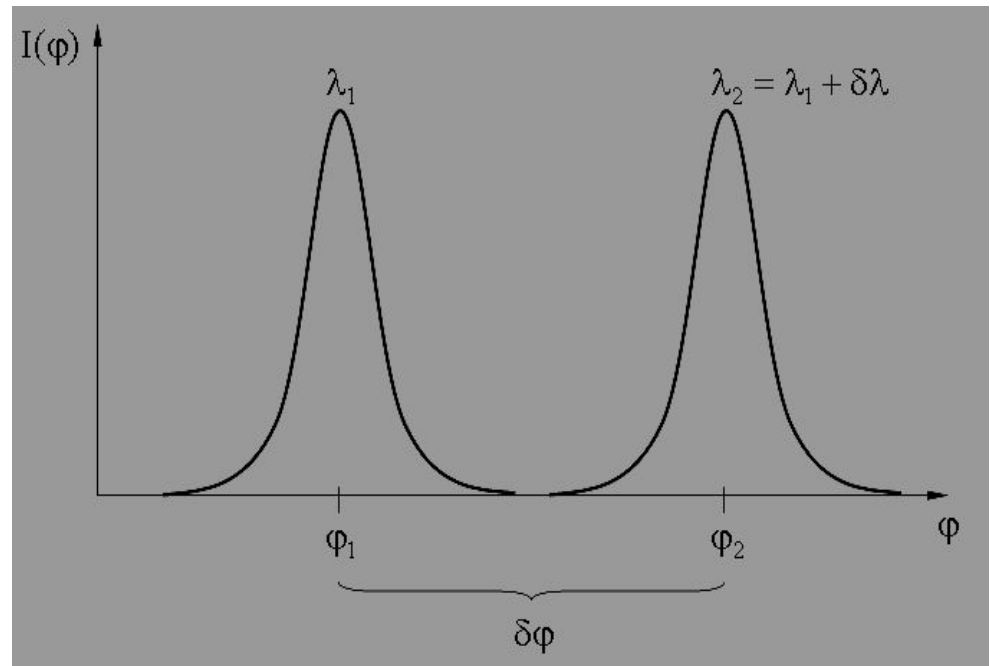
- **Угловая дисперсия**

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} \approx \frac{m}{d}$$

- **Линейная дисперсия**

(расстояние на экране)

$D = D_{\varphi} \cdot F$, где F – фокусное расстояние линзы.

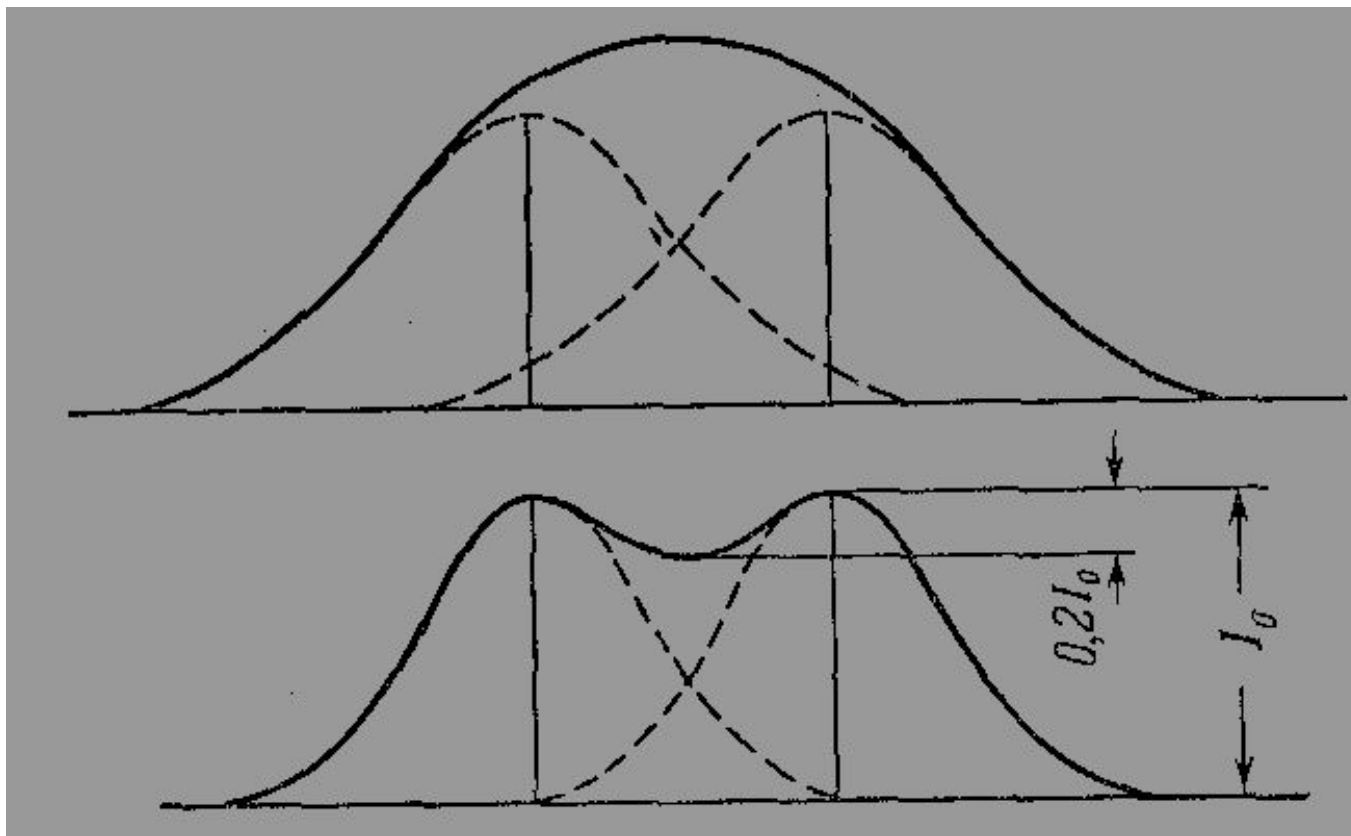


- **Разрешающая сила** определяется минимальной разностью длин волн, при которой две линии в спектре воспринимаются отдельно.

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

- Согласно **критерию Рэля** две линии в спектре воспринимаются отдельно (считаются разрешенными), если дифракционный максимум первой линии совпадает (или лежит дальше) с минимумом второй линии.

Критерий Рэля



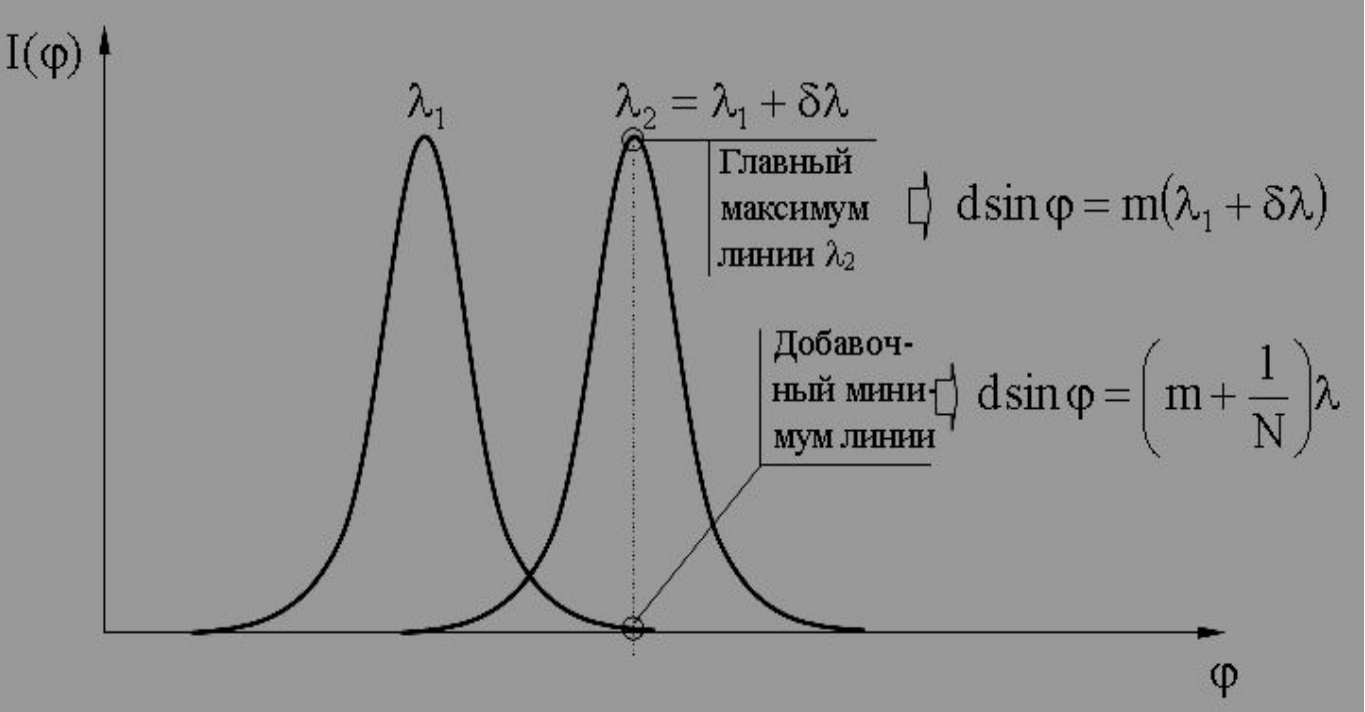
Минимум интенсивности одной линии должен совпадать с максимумом другой.

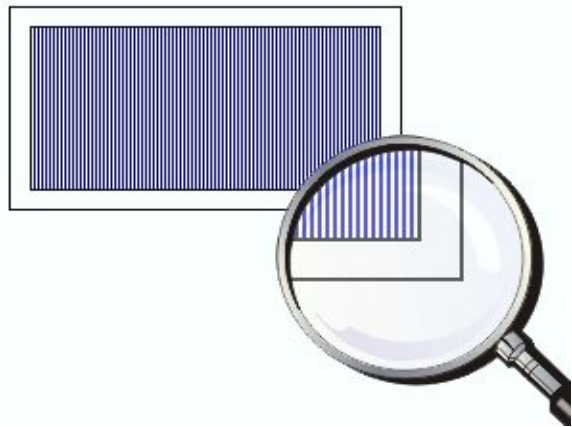
● Запишем условие m -го максимума для линии с длиной волны $\lambda + \delta\lambda$ и ближайшего минимума для линии с длиной волны λ :

$$d \cdot \sin\phi = m(\lambda + \delta\lambda), \quad d \cdot \sin\phi = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

Откуда $m\delta\lambda = \lambda/N$ и разрешающая сила

$$R = \lambda/\delta\lambda$$





- На **стеклянных** решетках наблюдения можно производить как в проходящем, так и в отраженном свете, на **металлических** - только в отраженном. Наиболее типичные дифракционные решетки, которые используются для работы в видимом диапазоне спектра (390 - 780 нм) имеют от 300 до 1600 штрихов/мм.

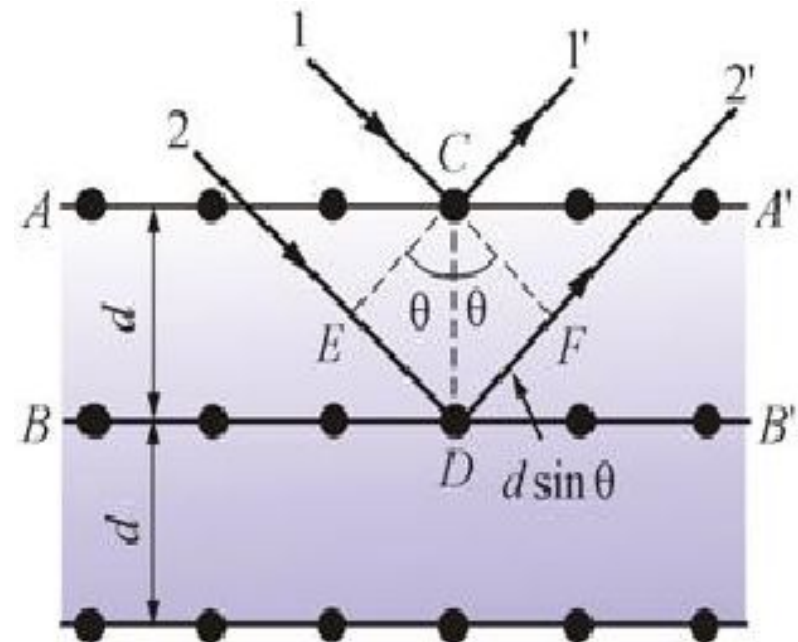
Дифракция рентгеновских лучей

- Дифракцию рентгеновских лучей можно рассматривать как результат отражения рентгеновских лучей от **плоскостей кристалла**.

$$\lambda = 10^{-10} \text{ м}$$

- Это отражение, в отличие от обычного, происходит лишь при таких условиях падения лучей на кристалл, которые соответствуют максимуму интерференции для лучей, отраженных от разных плоскостей.

$$2d \sin \theta = m \lambda$$



- **Рентгеновская спектроскопия** – для исследования спектрального состава излучения
- **Рентгеноструктурный анализ** – для изучения структуры кристалла

