Динамические характеристики инжекционных лазеров.

Модуляция излучения током накачки

Вернемся к системе уравнений, описывающей баланс концентрации носителей и плотности фотонов

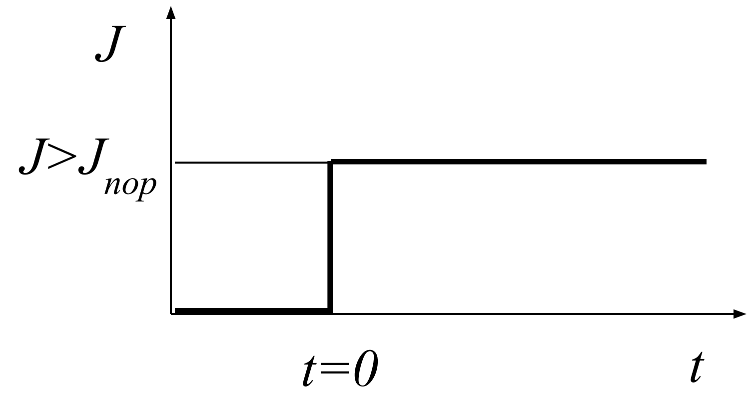
$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{e\,f}\gamma \;\; - \frac{n}{\tau_s} - \sum_m r_{st}(n, \square\omega_m) S_m$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \Gamma\, r_{st}(n, \square\omega_m) S_m - \frac{S_m}{\tau_p} + \Gamma\beta\,(Bn^2)$$

Задержка включения лазера

Рассмотрим реакцию лазера на резкое включение тока накачки:

$$J(t=0) = 0 \quad \text{и} \quad J(t>0) > J_{пор}$$



Возьмем одно из уравнений баланса (для носителей):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{e\,f}\gamma - \frac{n}{\tau_s} \cancel{- v\sum_l g(n, \hbar\omega_l) S_l}$$

(пренебрегаем стимулированным излучением, т.к. в основном мы интересуемся ситуацией ниже порога генерации)

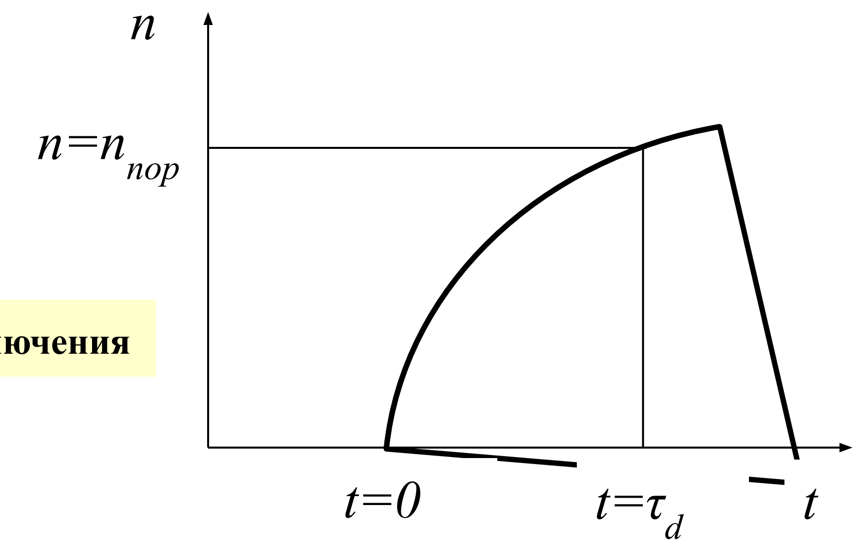
Решение этого «укороченного» уравнения:

$$n = \frac{J\,\gamma\,\tau_s}{e\,f}\left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau_s})\right)$$

Включение произойдет, когда концентрация *n* достигнет порогового уровня, т.е. при *n*=*n*$_{пор}$

$$n_{пор} = \frac{J\gamma\tau_s}{e\,f}\left(1 - \exp(-\frac{t_d}{\tau_s})\right)$$

t_d **- время задержки включения**



Окончательно получаем:

$$\boxed{t_d = -\tau_s \ln \frac{J - J_{пор}}{J}}$$

Оценка времени задержки включения и важные практические следствия из этого

<u>Оценим время задержки включения:</u>

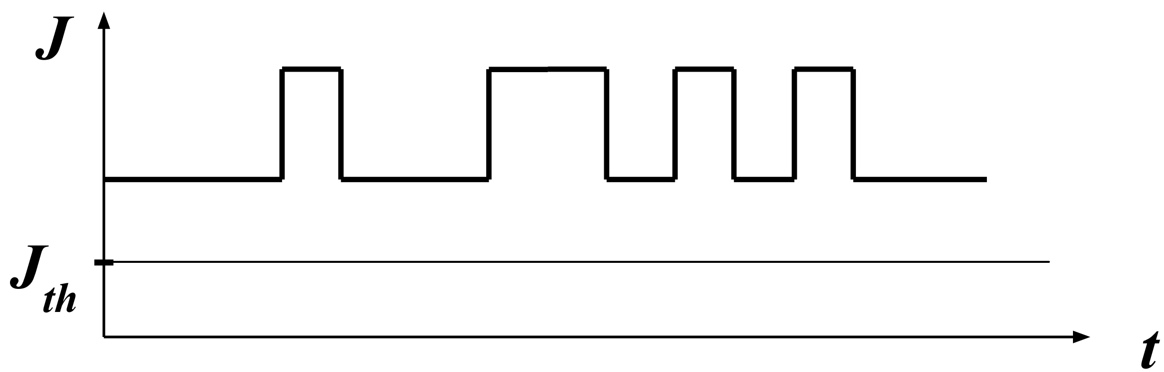
Возьмем: $\tau_s = 10^{-9}$ сек - время спонтанной рекомбинации;

$J = 2\, J_{пор}$ - двойное превышение порога генерации

$$\tau_d = -\tau_s \ln \frac{J - J_{th}}{J} = -10^{-9} \ln \frac{1}{2} = 0,7 \times 10^{-9}\ сек$$

Это очень большая задержка, т.к. обычно лазеры должны передавать сигналы (оптические импульсы) длительностью ~ 100 псек (10^{-10} сек) и меньше !

Поэтому практически при передаче информационных оптических импульсов лазеры накачиваются так, что «нулевой» уровень тока накачки устанавливается ВЫШЕ порога генерации лазера:



Тогда задержки нет и оптические импульсы передаются почти без искажений.

Малосигнальный анализ скоростных уравнений

Рассмотрим систему скоростных уравнений,
для простоты в одномодовом приближении:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{e\,f} - \frac{n}{\tau_s} - v\,g(n)\,S$$

$$\frac{dS}{dt} = \Gamma\,v\,g(n)\,S - \frac{S}{\tau_p} + \Gamma\beta\,\frac{n}{\tau_s}$$

Здесь и в дальнейшем мы для простоты положим $\gamma \approx 1$

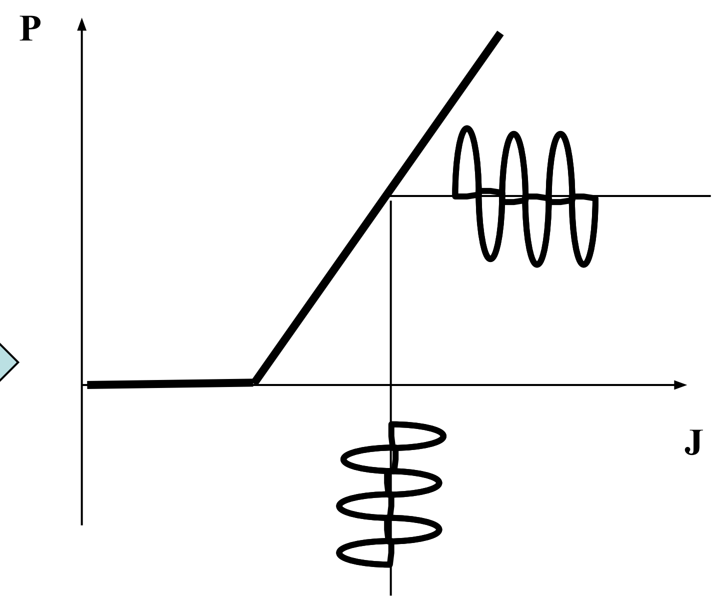
($n/\tau_s \approx Bn^2$ **-** приближение времени жизни)

Предположим, что ток накачки мы модулируем по закону: $J(t)=J_0+\delta J(t) \quad \delta J(t) \ll J_0$

<u>Мы можем ожидать, что отклик будет иметь вид:</u>

$n(t)=n_0+\delta n(t)$ где $\delta n(t) \ll n_0$
$S(t)=S_0+\delta S(t)$ где $\delta S(t) \ll S_0$

Здесь n_0 и S_0 *- есть решения стационарных уравнений при токе накачки* $J_0=const$



В любой динамической системе отклик на малое возмущение должен быть малым
(и линейным, т.е. воспроизводить вид функции возмущения) !

Лианеризация скоростных уравнений

Проще иметь дело с линейными системами дифференциальных уравнений.

Чтобы наша система уравнений стала линейной, надо поработать с функцией g(n).

Запишем:

$g(n) = g(n_0+\delta n) = g_0+g'\delta n$ где $g_0 = g(n_0)$ и $g' = \partial g/\partial n$ - называется

"дифференциальным усилением"

Тогда для произведения gS имеем:

$$g\,S = (g_0+g'\delta\,n)(\,S_0+\delta\,S) = g_0 S_0+g_0\delta\,S+g'S_0\delta\,n+....$$

Теперь подставим $J(t)=J_0+\delta\,J(t)$, $n(t)=n_0+\delta\,n(t)$ *и* $S(t)=S_0+\delta\,S(t)$ **в скоростные уравнения и получим:**

$$\delta\,\dot{n} = \frac{\delta\,J}{e\,f} - \frac{\delta\,n}{\tau_s} - v\,(g_0\,\delta\,S + g'S_0\delta\,n)$$

$$\delta\,\dot{n} = \frac{d\left[\delta\,n(t)\right]}{d\,t}$$

$$\delta\,\dot{S} = \Gamma\,v\,(g_0\,\delta\,S + g'S_0\delta\,n) - \frac{\delta\,S}{\tau_p} + \Gamma\beta\,\frac{\delta\,n}{\tau_s}$$

$$\delta\,\dot{S} = \frac{d\left[\delta\,n(t)\right]}{d\,t}$$

- это линейная система по переменным δ*n* и δ*S*

Гармоническая модуляция тока накачки

Рассмотрим случай гармонической (синусоидальной) модуляции тока накачки.

При этом обычно используют *метод комплексных амплитуд*:

$\delta J(t) = j\, e^{i\omega t}$, $(j=const)$, где ω **есть частота модуляции**

Поскольку отклик любой системы на малое возмущение должен быть линейным, мы должны получить:

$$\delta n = a(\omega)\, e^{i\omega t}\,, \ \ \delta S = b(\omega)\, e^{i\omega t}$$

где $a(\omega)$ **и** $b(\omega)$ **это** ***комплексные амплитуды отклика***

Подставляя все это в нашу систему уравнений получаем:

$$\begin{cases} \left(i\omega + \dfrac{1}{\tau_s} + vg' S_0\right) a(\omega) + vg_0\, b(\omega) = \dfrac{j}{e\,f} \\ -\left(\Gamma\, v\, g'\, S_0 + \Gamma \dfrac{\beta}{\tau_s}\right) a(\omega) + \left(i\omega + \dfrac{1}{\tau_p} - \Gamma v g_0\right) b(\omega) = 0 \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд a(ω) и b(ω)

Гармонический отклик плотности электронов, n(ω)

Решим систему алгебраических уравнений относительно a(ω):

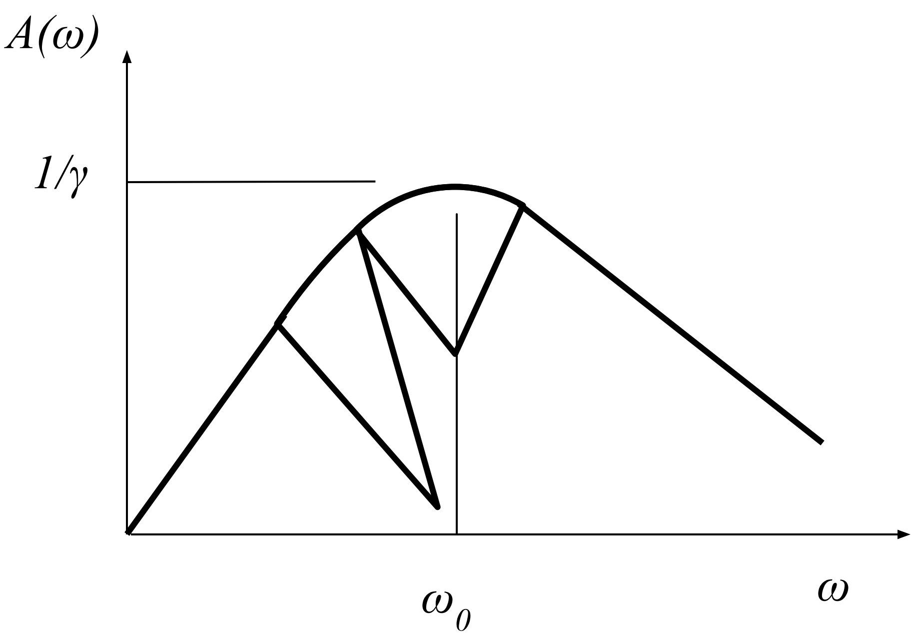
$$a(\omega)\approx\frac{j}{e\,f}\;\frac{-i\omega}{\omega_0^2-\omega^2+\gamma\, i\omega}=\frac{j}{e\,f}\;\underbrace{\frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}}_{=A(\omega)}\;\exp i\underbrace{\left[arctg\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]}_{=\varphi_a(\omega)}$$

<u>Здесь введены обозначения:</u>

$$\omega_0=\sqrt{\frac{vg' S_0}{\tau_p}}$$ **- резонансная частота**

$$\gamma=\frac{1}{\tau_s}+v\,g' S_0$$ **- параметр затухания**

График частотной зависимости *A(ω)* :



<u>Свойства функции *A(ω)*:</u>

1. При *ω*→0 A(*ω*)→0
потому что в статическом режиме концентрация насыщена за порогом!

2. A(*ω*) достигает максимума точно на ω_0
поэтому ω_0 называется резонансной частотой

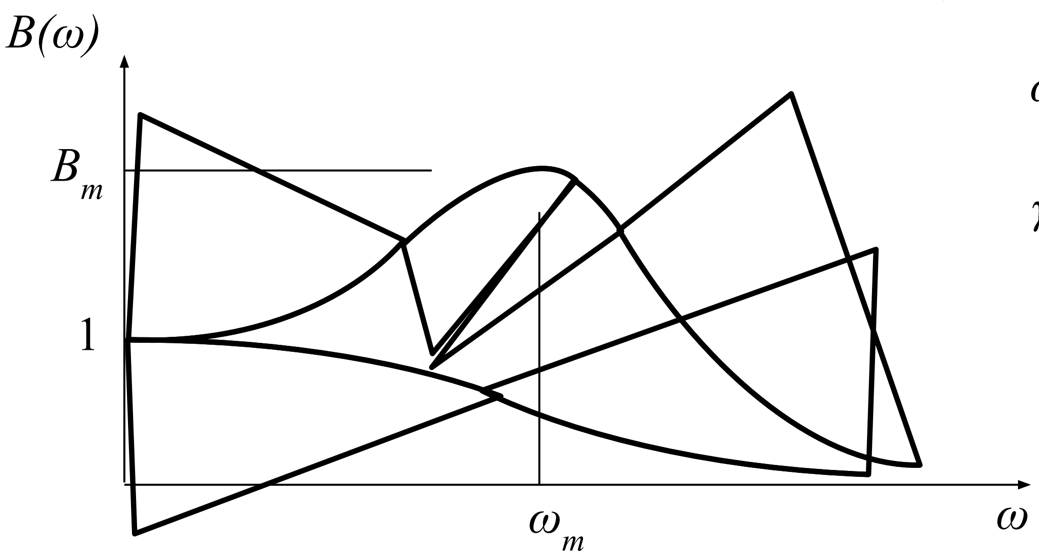
3. Макс. значение функции *A(ω)* есть 1/*γ*,
поэтому γ называется параметром затухания.

Гармонический отклик плотности фотонов, *b(ω)*

Решим систему алгебраических уравнений относительно *b(ω)*:

$$b(\omega) \approx \frac{j\Gamma\tau_p}{e\,f}\;\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2+\gamma\, i\omega} = \frac{j\Gamma\tau_p}{e\,f}\underbrace{\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}}_{=B(\omega)}\exp i\underbrace{\left[arctg\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right]}_{=\varphi_b(\omega)}$$

График частотной зависимости *B(ω)* :



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{vg' S_0}{\tau_p}}$$ - **резонансная частота**

$$\gamma = \frac{1}{\tau_s} + v\,g' S_0$$ - **параметр затухания**

Малое затухание

$\gamma < \sqrt{2}\,\omega_0$

Большое затухание

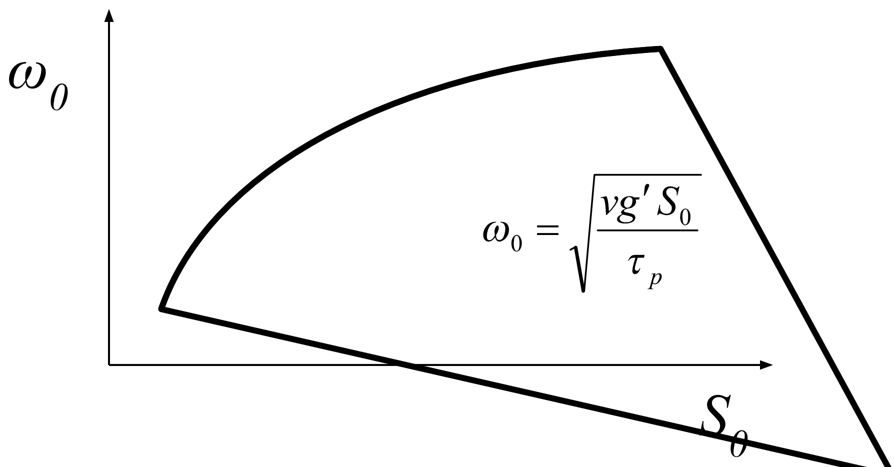
$\gamma > \sqrt{2}\,\omega_0$

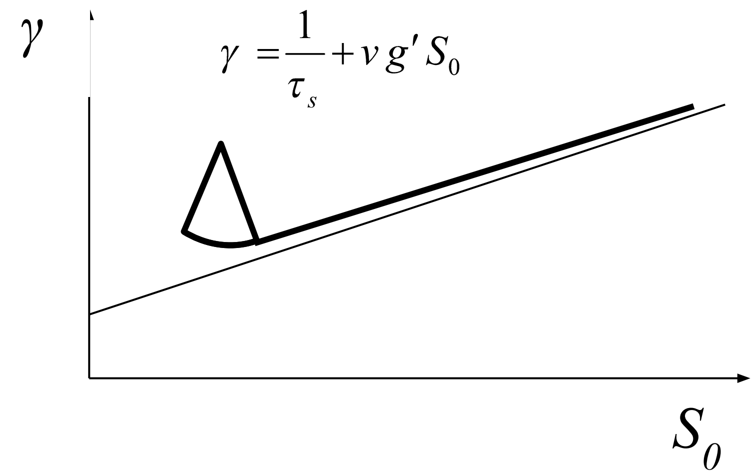
$$B_m = \frac{\omega_0}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}$$

$$\omega_m = \omega_0\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}}$$

Зависимость параметров ω_0 и γ от стационарной плотности фотонов S_0

Однако параметры ω_0 и γ на являются независимыми, они оба зависят от S_0:





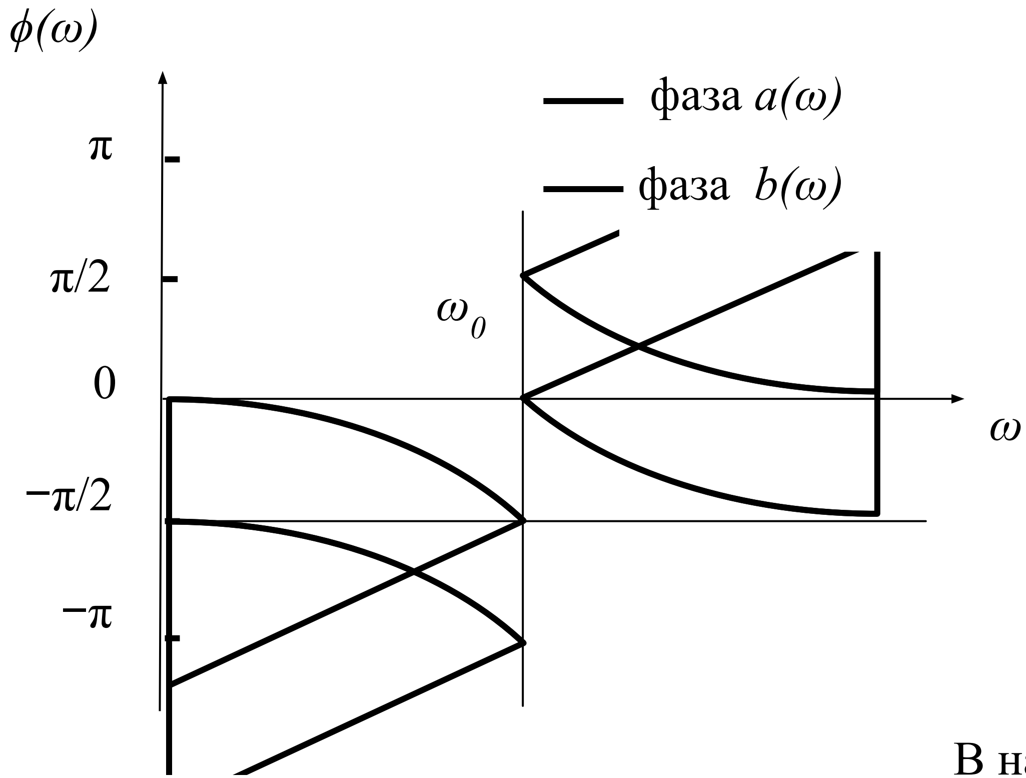
Важно, что выражения для ω_0 и γ *приближенные*, они верны для не слишком малых величин S_0

Обычно вводится понятие граничной частоты модуляции ($\omega_{гр}$). Это частота при которой $B(\omega)$=1/2. Можно показать, что:

$$\omega_{гр} \approx \sqrt{3}\, \omega_m$$

В хороших инжекционных лазерах, которые используются в системах оптической связи, $f_{гр}$ > 10 GHz !

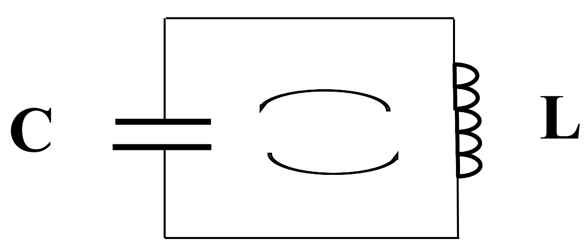
Частотные зависимости фаз *a(ω) и b(ω)*



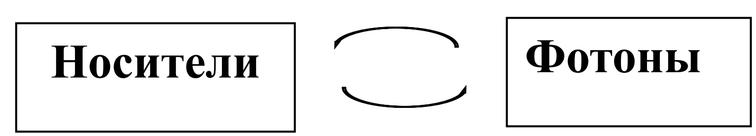
$$\varphi_a(\omega) = \left[arctg\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\varphi_b(\omega) = \left[arctg\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \right]$$

Такое же поведение фаз мы имеем в колебательном контуре:



В нашем случае резонансное поведение определяется перераспределением энергии между носителями и фотонами:



Эквивалентная схема инжекционного лазера

Вернемся к исходной системе уравнений:

$$\delta \dot{n} = \frac{\delta J}{e f} - \frac{\delta n}{\tau_s} - v\, g_0\, \delta S - v\, g' S_0 \delta n \qquad (*)$$

$$\delta \dot{S} = \Gamma v \left(g_0\, \delta S + g' S_0 \delta n\right) - \frac{\delta S}{\tau_p} + \cancel{\Gamma\beta \frac{\delta n}{\tau_s}} \qquad (**)$$

(за порогом это малая добавка)

Наши обозначения:

$$\delta \dot{n} = i\omega\, \delta n \qquad \delta \dot{S} = i\omega\, \delta S$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_s} + v g' S_0$$

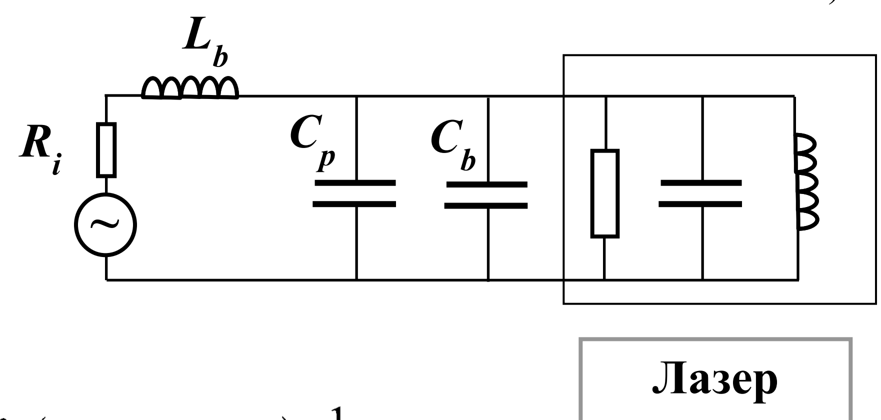
Из (**) получим:

$$\delta S = \frac{\Gamma v\, g' S_0 \delta n}{i\omega - \left(\cancel{\frac{1}{\tau_p} - \Gamma v\, g_0}\right)} \qquad (***)$$

(за порогом это малая величина)

Подставляя (***) в (*) получаем:

$$\frac{\delta J}{e f} = i\omega\, \delta n + \gamma\, \delta n + v\, g_0 \frac{\Gamma v\, g' S_0}{i\omega} \delta n$$



Найдем связь между δn и δV исходя из обычного выражения для p-n перехода:

$$n = n_0 \left[\exp\left(\frac{eV}{bkT}\right) - 1\right] \Rightarrow \delta n \approx \frac{e n}{b k T} \delta V$$

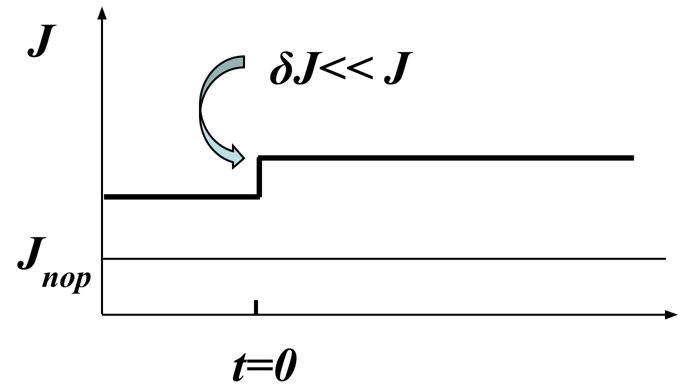
$$\delta J = \underbrace{\frac{e^2 f n}{b k T}\gamma}_{R^{-1}}\, \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{b k T}}_{C} (i\omega)\, \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{b k T}\left(\Gamma v^2 g_0 g' S_0\right)}_{L} \frac{1}{i\omega}\, \delta V$$

Имеем параллельное соединение сопротивления, емкости и индуктивности!

Свободные колебания в системе «носители-фотоны» (релаксационные колебания)

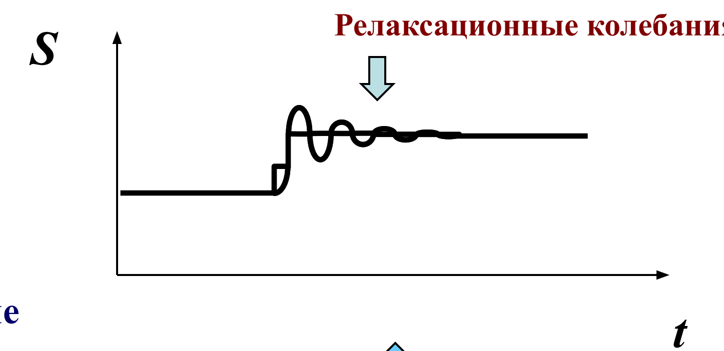
<u>Вопрос:</u> Какой будет реакция излучения лазера на небольшую по амплитуде «ступеньку» тока накачки?
(*δJ<< J*)

<u>Важно:</u> после прохождения «ступеньки», т.е. при t>0, ток не меняется во времени



Для нахождения отклика вернемся к исходной системе, но без вынуждающей силы, т.е. положим *j*=0:

$$\begin{cases} \left(i\omega + \dfrac{1}{\tau_s} + vg'S_0\right) a(\omega) + vg_0\, b(\omega) = 0 \\ -\left(\Gamma v g' S_0 + \Gamma \dfrac{\beta}{\tau_s}\right) a(\omega) + \left(i\omega + \dfrac{1}{\tau_p} - \Gamma v g_0\right) b(\omega) = 0 \end{cases}$$



Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение имеет вид:

$$a(\omega),\ b(\omega) \propto e^{\lambda t}$$

где λ есть корень характеристического уравнения, которое получатся из уравнения det=0 заменой $i\omega \rightarrow \lambda$:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}$$

Отклик имеет вид колебаний, которые происходят на <u>резонансной частоте</u> и затухают с инкрементом γ/2

Эквивалентная схема инжекционного лазера

Наши обозначения:

$$\delta \dot{n} = i\omega\,\delta n \qquad \delta \dot{S} = i\omega\,\delta S$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_s} + v g' S_0$$

Вернемся к исходной системе уравнений:

$$\delta \dot{n} = \frac{\delta J}{e f} - \frac{\delta n}{\tau_s} - v\, g_0\, \delta S - v\, g' S_0 \delta n \qquad (*)$$

$$\delta \dot{S} = \Gamma v \left(g_0\, \delta S + g' S_0 \delta n\right) - \frac{\delta S}{\tau_p} + \cancel{\Gamma\beta \frac{\delta n}{\tau_s}} \qquad (**)$$

(за порогом это малая добавка)

Из (**) получим:

$$\delta S = \frac{\Gamma v\, g'\, S_0 \delta n}{i\omega - \left(\cancel{\frac{1}{\tau_p}} - \Gamma v\, g_0\right)} \qquad (***)$$

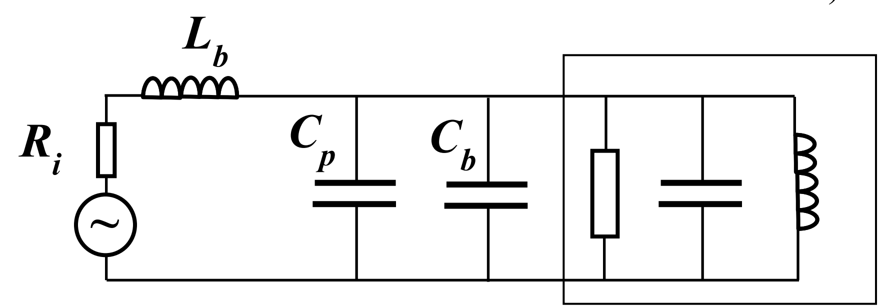
(за порогом это малая величина)

Подставляя (***) в (*) получаем:

$$\frac{\delta J}{e f} = i\omega\,\delta n + \gamma\,\delta n + v\, g_0 \frac{\Gamma v\, g' S_0}{i\omega}\delta n$$

Найдем связь между δn и δV исходя из обычного выражения для p-n перехода:

$$n = n_0\left[\exp\left(\frac{eV}{bkT}\right) - 1\right] \Rightarrow \delta n \approx \frac{e n}{b k T}\delta V$$



Лазер

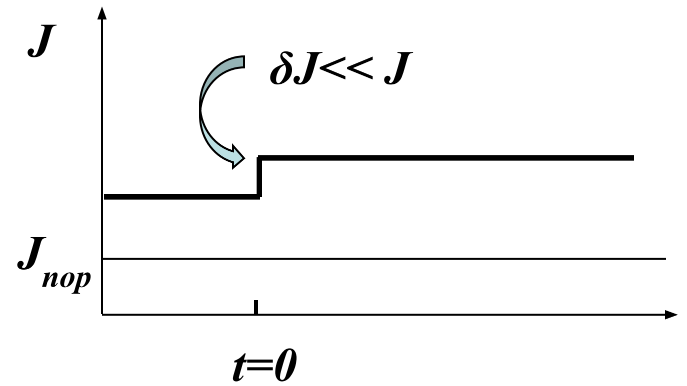
$$\delta J = \underbrace{\frac{e^2 f n}{b k T}\gamma}_{R^{-1}}\ \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{b k T}}_{C}(i\omega)\ \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{b k T}\left(\Gamma v^2 g_0 g' S_0\right)}_{L}\frac{1}{i\omega}\ \delta V$$

Имеем параллельное соединение сопротивления, емкости и индуктивности!

Свободные колебания в системе «носители-фотоны» (релаксационные колебания)

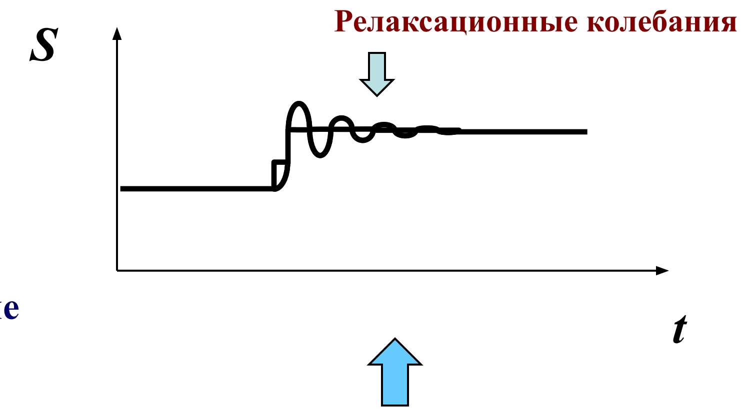
<u>Вопрос:</u> Какой будет реакция излучения лазера на небольшую по амплитуде «ступеньку» тока накачки?
($\delta J \ll J$)

<u>Важно:</u> после прохождения «ступеньки», т.е. при t>0, ток не меняется во времени



Для нахождения отклика вернемся к исходной системе, но без вынуждающей силы, т.е. положим *j*=0:

$$\begin{cases} \left(i\omega + \dfrac{1}{\tau_s} + vg'S_0\right) a(\omega) + vg_0\, b(\omega) = 0 \\ -\left(\Gamma v g' S_0 + \Gamma \dfrac{\beta}{\tau_s}\right) a(\omega) + \left(i\omega + \dfrac{1}{\tau_p} - \Gamma v g_0\right) b(\omega) = 0 \end{cases}$$



Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение имеет вид:

$$a(\omega),\ b(\omega) \propto e^{\lambda t}$$

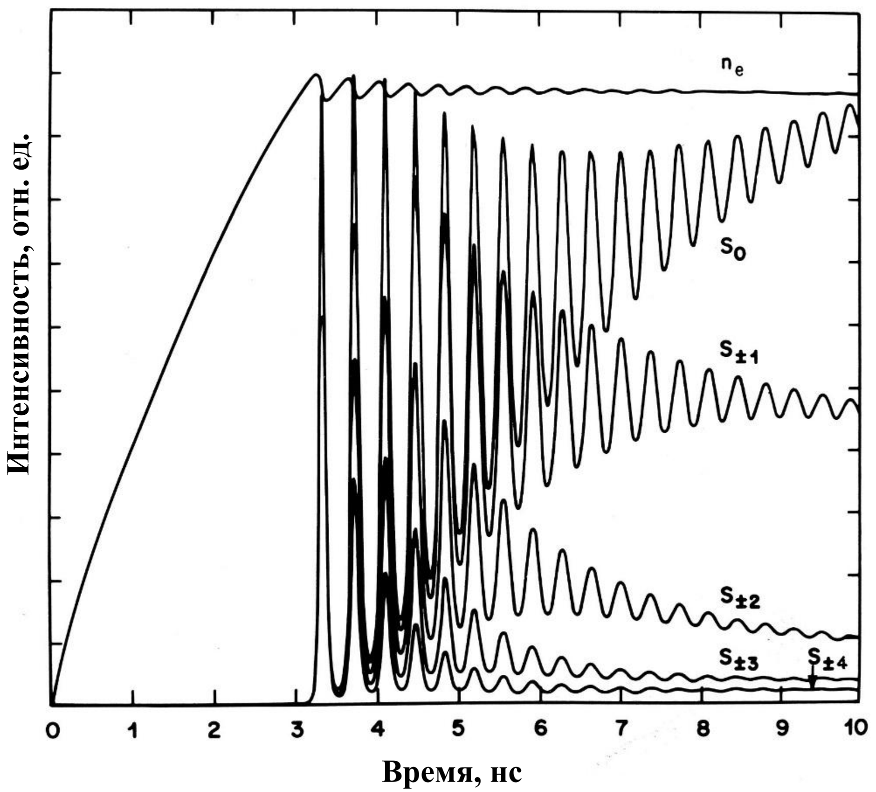
где λ есть корень характеристического уравнения, которое получатся из уравнения det=0 заменой $i\omega \to \lambda$:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}$$

Отклик имеет вид колебаний, которые происходят на <u>резонансной частоте</u> и затухают с инкрементом γ/2

За пределами одномодового приближения

Отклик лазера на резкое включение тока накачки (численное решение):



Важные выводы:

1. **При подаче тока концентрация носителей растет, лазер включается (с задержкой), после чего идут *затухающие колебания* концентрации носителей.**

2. **Затухающие колебания плотности фотонов (интенсивности) всех продольных мод происходят *синхронно*.**

3. **Хорошо виден *сдвиг фаз* колебаний концентрации носителей и плотности фотонов в модах.**

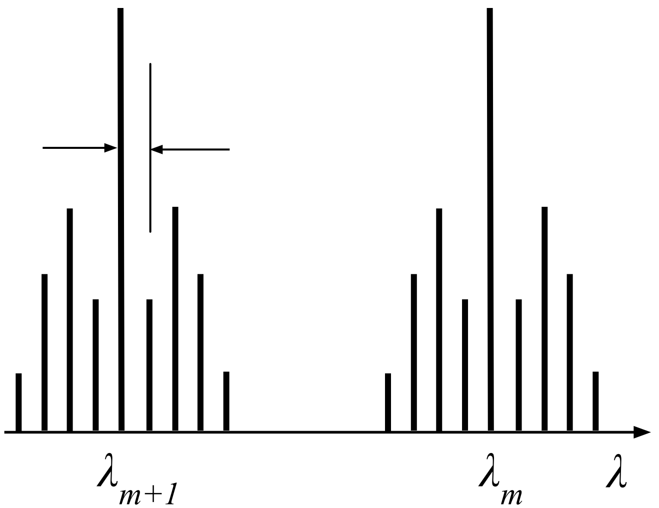
n_e - концентрация носителей в активном слое
S_0 - центральная мода в спектре излучения лазера
$S_{\pm1}$ - две ближайшие боковые моды
$S_{\pm2}$ - следующие две боковые моды … и т.д.

«Чирп» или уширение спектральных линий в режиме гармонической модуляции

Явление “чирп”   (“chirp” - чирикание) связано с динамическим изменением показателя преломления в резонаторе лазера под действием измененяющейся во времени концентрации носителей в активном слое лазера.

Условие определяющее длину волны продольной моды с индексом «m»:

$$m\frac{\lambda_m}{2N} = L \quad \Rightarrow \quad \delta\,\lambda_m = \frac{2L}{m}\frac{\partial N}{\partial n}\delta\, n \qquad \left(\frac{\partial N}{\partial n} < 0\right)$$



Под действием гармонического изменения тока накачки

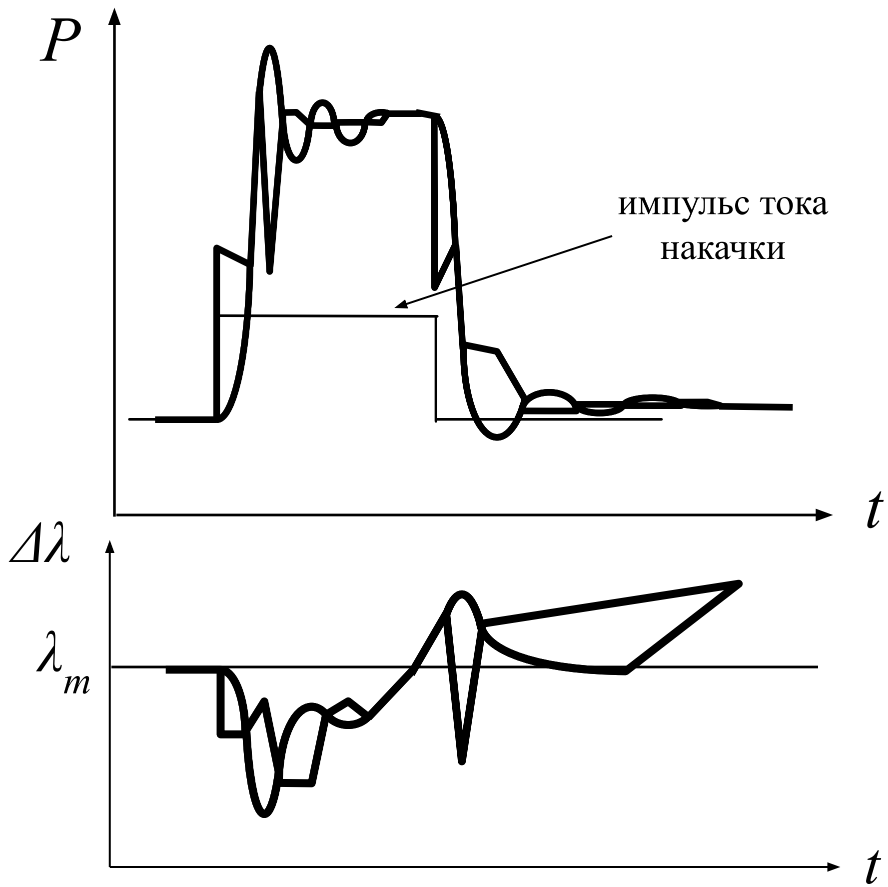
$$J(t) = J_0 + \delta J(t) \quad \textbf{где} \quad \delta J(t) = j\, e^{i\omega t}$$

отклик концентрации носителей

$$n(t) = n_0 + \delta n(t) \quad \textbf{где} \quad \delta n(t) = a(\omega)\, e^{i\omega t}$$

Это приводит к уширению *каждой линии* в спектре излучения лазера - появляются гармоники сдвинутые на частоту модуляции тока накачки.

Реакция излучения лазера на импульсы тока накачки и импульсный чирп



1. Форму отклика на импульс тока накачки можно найти прямым решением скоростных уравнений

2. Время нарастания и спада интенсивности света в импульсе:

$$\tau \approx 1/\,4\, f_{гр}$$

$f_{гр}$ - **граничная частота модуляции**

3. Период осцилляций интенсивности

$$T \approx 2\pi/\omega_0$$

4. Импульсный чирп:

$$\boxed{\Delta\lambda \propto -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}}$$