Содержание

- **Лекция 1.**

Введение в динамику. Законы и аксиомы динамики материальной точки. Основное уравнение динамики. Дифференциальные и естественные уравнения движения. Две основные задачи динамики. Примеры решения прямой задачи динамики

- **Лекция 2.**

Решение обратной задачи динамики. Общие указания к решению обратной задачи динамики. Примеры решения обратной задачи динамики. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха.

- **Лекция 3.**

Прямолинейные колебания материальной точки. Условие возникновения колебаний. Классификация колебаний. Свободные колебания без учета сил сопротивления. Затухающие колебания. Декремент колебаний. Вынужденные колебания материальной точки. Резонанс. Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.

- **Лекция 4.**

Относительное движение материальной точки. Силы инерции. Частные случаи движения для различных видов переносного движения. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел. Работа, мощность силы. Кинетическая энергия. Теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки и системы. Пример решения задач на использование теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.

Лекция 1

Динамика

Динамика материальной точки | Динамика механической системы

Аналитическая механика

- **Динамика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение с самой общей точки зрения. Движение рассматривается в связи с действующими на объект силами.

Раздел состоит из трех отделов:

- **Динамика точки –** изучает движение материальной точки с учетом сил, вызывающих это движение.

Основной объект - материальная точка – материальное тело, обладающей массой, размерами которого можно пренебречь.

- **Динамика механической системы –** изучает движение совокупности материальных точек и твердых тел, объединяемых общими законами взаимодействия, с учетом сил, вызывающих это движение.
- **Аналитическая механика –** изучает движение несвободных механических систем с использованием общих аналитических методов.

Основные допущения:

– существует **абсолютное пространство** (обладает чисто геометрическими свойствами, не зависящими от материи и ее движения .
– существует **абсолютное время** (не зависит от материи и ее движения).
Отсюда вытекает:
– **существует абсолютно неподвижная система отсчета**.
– **время не зависит от движения системы отсчета**.
– **массы движущихся точек не зависят от движения системы отсчета.**

Эти допущения используются в классической механике, созданной Галилеем и Ньютоном. Она имеет до сих пор достаточно широкую область применения, поскольку рассматриваемые в прикладных науках механические системы не обладают такими большими массами и скоростями движения, для которых необходим учет их влияния на геометрию пространства, время, движение, как это делается в релятивистской механике (теории относительности).

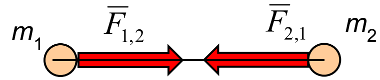
- **Основные законы динамики –** впервые открытые Галилеем и сформулированные Ньютоном составляют основу всех методов описания и анализа движения механических систем и их динамического взаимодействия под действием различных сил.
- **Закон инерции (закон Галилея-Ньютона)** – **Изолированная материальная точка тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, приложенные силы не заставят ее изменить это состояние**. Отсюда следует эквивалентность состояния покоя и движения по инерции (закон относительности Галилея). Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется **инерциальной**. Свойство материальной точки стремиться сохранить неизменной скорость своего движения (свое кинематическое состояние) называется **инертностью**.
- **Закон пропорциональности силы и ускорения (Основное уравнение динамики - II закон Ньютона)** – **Ускорение, сообщаемое материальной точке силой, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе этой точки**:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{1}{m}\bar{F}} \quad \text{или} \quad \boxed{m\bar{a} = \bar{F}.}$$

Здесь m – масса точки (мера инертности), измеряется в кг, численно равна весу, деленному на ускорение свободного падения: $m = \dfrac{G}{g}.$

F – действующая сила, измеряется в Н (1 Н сообщает точке массой 1 кг ускорение 1 м/с^2, 1 Н = 1/9.81 кг-с).

■ **Закон равенства действия и противодействия (III закон Ньютона)** – **Всякому действию соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие**: $\boxed{\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}}$



Закон справедлив для любого кинематического состояния тел. Силы взаимодействия, будучи приложенные к разным точкам (телам) не уравновешиваются.

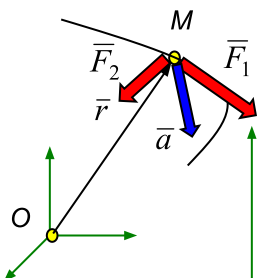
■ **Закон независимости действия сил** – **Ускорение материальной точки под действием нескольких сил равно геометрической сумме ускорений точки от действия каждой из сил в отдельности:** $\boxed{\bar{a}(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ...) = \bar{a}_1(\bar{F}_1) + \bar{a}_2(\bar{F}_2) + ...}$ или $\boxed{\bar{a}(\bar{R}) = \bar{a}_1(\bar{F}_1) + \bar{a}_2(\bar{F}_2) + ...}$

■ **Основное уравнение динамики** : $\boxed{m\bar{a} = \sum \bar{F}_i .}$ **- соответствует векторному способу задания движения точки.**

■ **Дифференциальные уравнения движения материальной точки:**

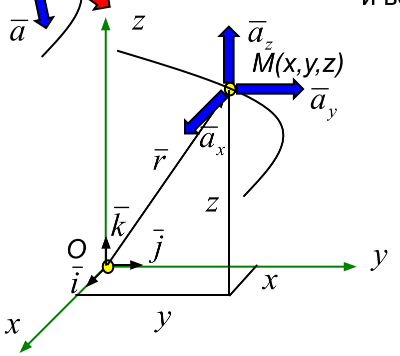
Подставим ускорение точки при векторном задании движения $\boxed{\bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.}$ в основное уравнение динамики: $\boxed{m\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_i \quad (1).}$

- дифференциальное уравнение движения точки в векторном виде.



В координатном виде: Используем связь радиуса-вектора с координатами и вектора силы с проекциями:

$\boxed{\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}}$ $\boxed{\bar{F}_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}}$



$$m\frac{d^2}{dt^2}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \sum (X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}).$$

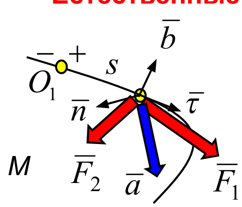
После группировки векторное соотношение распадается на три скалярных уравнения:

$$(x): m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_i; \qquad (y): m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_i; \qquad (z): m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_i.$$

или: $\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i; \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i; \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}}$ **- дифференциальные уравнения движения точки в координатном виде.**

Этот результат может быть получен формальным проецированием векторного дифференциального уравнения (1).

■ **Естественные уравнения движения материальной точки** – получаются проецированием векторного дифференциального уравнения движения на естественные (подвижные) оси координат:



$$(\tau): ma_{\tau\tau} = \sum F_{i\tau}; \qquad (n): ma_n = \sum F_{in}; \qquad (b): m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

или: $\boxed{\begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau}; \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum F_{in}. \end{aligned}}$ **- естественные уравнения движения точки.**

Лекция 1 (продолжение – 1.3)

- **Две основные задачи динамики:**

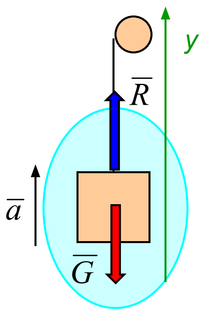
1. Прямая задача: Задано движение (уравнения движения, траектория). Требуется определить силы, под действием которых происходит заданное движение.

2. Обратная задача: Заданы силы, под действием которых происходит движение. Требуется найти параметры движения (уравнения движения, траекторию движения).

Обе задачи решаются с помощью **основного уравнения динамики** и проекции его на координатные оси. Если рассматривается движение несвободной точки, то как и в статике, используется **принцип освобождаемости от связей**. В результате реакции связей включаются в состав сил, действующих на материальную точку. Решение первой задачи связано с операциями дифференцирования. Решение обратной задачи требует интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений и это значительно сложнее, чем дифференцирование. Обратная задача сложнее прямой задачи.

- **Решение прямой задачи динамики** - рассмотрим на примерах:

Пример 1. Кабина весом ***G*** лифта поднимается тросом с ускорением ***a*** . Определить натяжение троса.



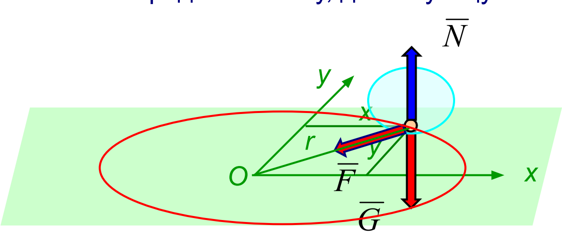
1. Выбираем объект (кабина лифта движется поступательно и ее можно рассматривать как материальную точку).
2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.
3. Составляем основное уравнение динамики: $m\overline{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{R}.$
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y*: $(y): \; ma_y = R - G.$

Определяем реакцию троса: $R = G + ma_y = G + \dfrac{G}{g}a_y = G(1 + \dfrac{a_y}{g}).$

Определяем натяжение троса: $\overline{T} = -\overline{R}; \;\; T = R = G(1 + \dfrac{a_y}{g}).$

При равномерном движении кабины $a_y = 0$ и натяжение троса равно весу: $T = G$.
При обрыве троса $T = 0$ и ускорение кабины равно ускорению свободного падения: $a_y = -g$.

Пример 2. Точка массой *m* движется по горизонтальной поверхности (плоскости Оху) согласно уравнениям: $x = a \cdot \cos kt$, $y = b \cdot \cos kt$. Определить силу, действующую на точку.



Таким образом, величина силы пропорциональна расстоянию точки до центра координат и направлена к центру по линии, соединяющей точку с центром.
Траектория движения точки представляет собой эллипс с центром в начале координат:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2\cos^2 kt; \\ y^2 &= b^2\sin^2 kt. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Определяем проекции силы:

$$F_x = m\ddot{x} = -mak^2\cos kt = -mk^2x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mak^2\sin kt = -mk^2y.$$

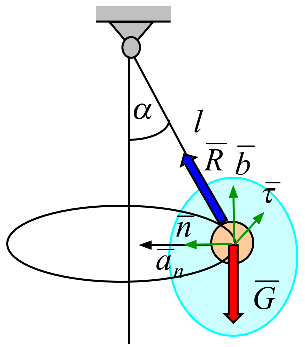
$(y): \; m\ddot{y} = F_y.$

Модуль силы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \\ = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\overline{F}, x.) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\overline{F}, y.) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$



Пример 3: Груз весом ***G*** подвешен на тросе длиной l и движется по круговой траектории в горизонтальной плоскости с некоторой скоростью. Угол отклонения троса от вертикали равен α. Определить натяжение троса и скорость груза.

1. Выбираем объект (груз).

2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.

3. Составляем основное уравнение динамики: $m\overline{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{R}.$

4. Проецируем основное уравнение динамики на оси τ,*n*, *b*:

$$(\tau): \quad ma_\tau = 0;$$
$$(n): \quad ma_n = R\sin\alpha;$$
$$(b): \quad 0 = R\cos\alpha - G.$$

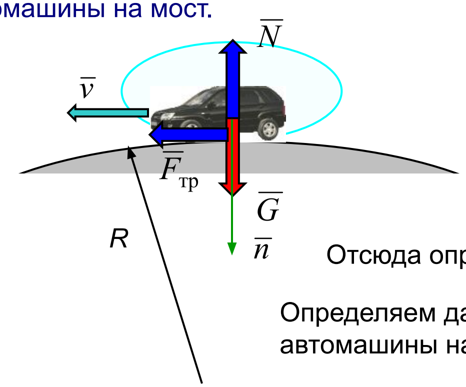
Из третьего уравнения определяем реакцию троса: $R = \dfrac{G}{\cos\alpha}.$

Определяем натяжение троса: $\overline{T} = -\overline{R}; \quad T = R = \dfrac{G}{\cos\alpha}.$

Подставляем значение реакции троса, нормального ускорения во второе уравнение и определяем скорость груза: $\dfrac{G}{g}\dfrac{v^2}{l\sin\alpha} = \dfrac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha.$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.}$$

Пример 4: *Автомашина весом G движется по выпуклому мосту (радиус кривизны равен R) со скоростью V*. Определить давление автомашины на мост.



1. Выбираем объект (автомашина, размерами пренебрегаем и рассматриваем как точку).

2. Отбрасываем связь (шероховатую поверхность) и заменяем реакциями ***N*** и силой трения ***F***$_{тр}$.

3. Составляем основное уравнение динамики: $m\overline{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{тр}.$

4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *n*: $(n): \quad ma_n = G - N.$

Отсюда определяем нормальную реакцию: $N = G - ma_n = G - m\dfrac{v^2}{R} = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Определяем давление автомашины на мост: $\overline{Q} = -\overline{N}; \quad Q = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Отсюда можно определить скорость, соответствующую нулевому давлению на мост (Q = 0): $v = \sqrt{gR}.$

Лекция 2

- **Решение обратной задачи динамики** – В общем случае движения точки силы, действующие на точку, являются переменными, зависящими от времени, координат и скорости. Движение точки описывается системой трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\ddot{x} = \sum X_i; \quad m\ddot{y} = \sum Y_i; \quad m\ddot{z} = \sum Z_i.$$

После интегрирования каждого из них будет **шесть постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_6$:

$$\dot{x} = f_1(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{y} = f_2(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{z} = f_3(t, C_1, C_2, C_3).$$

$$x = f_4(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad y = f_5(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad z = f_6(t, C_1, C_2, \ldots, C_6).$$

Значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$ находятся из шести начальных условий при $t = 0$:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0;$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

После подстановки найденных значений постоянных получаем:

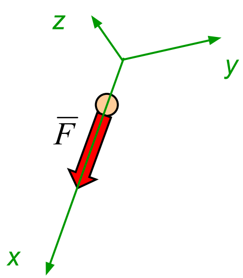
$$\dot{x} = f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{y} = f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{z} = f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

$$x = f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad y = f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad z = f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, **под действием одной и той же системы сил материальная точка может совершать целый класс движений, определяемых начальными условиями**.

Начальные координаты учитывают исходное положение точки. Начальная скорость, задаваемая проекциями, учитывает влияние на ее движение по рассматриваемому участку траектории сил, действовавших на точку до прихода на этот участок, т.е. начальное кинематическое состояние.

Пример 1 решения обратной задачи: Свободная материальная точка массы *m* движется по действием силы ***F***, **постоянной по модулю и величине.** . В начальный момент скорость точки составляла v_0 и совпадала по направлению с силой. Определить уравнение движение точки.



1. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const}.$

2. Выберем декартову систему отсчета, направляя ось x вдоль направления силы и спроецируем основное уравнение динамики на эту ось: $(x):\ ma_x = F_x = F.$ или $m\ddot{x} = F.$

3. Понижаем порядок производной: $m\dfrac{dv_x}{dt} = F.$

4. Разделяем переменные: $dv_x = \dfrac{F}{m}dt.$

5. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int dv_x = \int \dfrac{F}{m}dt.$ ⇒ $v_x = \dfrac{F}{m}t + C_1.$

6. Представим проекцию скорости как производную координаты по времени: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F}{m}t + C_1.$

7. Разделяем переменные: $dx = (\dfrac{F}{m}t + C_1)dt.$

8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int dx = \int (\dfrac{F}{m}t + C_1)dt.$ ⇒ $x = \dfrac{F}{m}\dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$

9. Для определения значений постоянных C1 и C2 используем начальные условия $t = 0$, $v_x = v_0$, $x = x_0$:

$$v_x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\cdot 0 + C_1 = v_0. \qquad x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^2}{2} + C_1\cdot 0 + C_2 = x_0.$$

⇒ $C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.$

В итоге получаем уравнение равнопеременного движения (по оси *x*): $x = \dfrac{F}{m}\dfrac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$

Лекция 2 (продолжение 2.2)

- **Общие указания к решению прямой и обратной задачи. Порядок решения:**

1. Составление дифференциального уравнения движения:

1.1. **Выбрать систему координат** – прямоугольную (неподвижную) при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) при известной траектории, например, окружность или прямая линия. В последнем случае можно использовать одну прямолинейную координату. Начало отсчета совместить с начальным положением точки (при $t = 0$) или с равновесным положением точки, если оно существует, например, при колебаниях точки.

1.2. **Изобразить точку** в положении, соответствующем произвольному моменту времени (при $t > 0$) так, чтобы координаты были положительными ($s > 0$, $x > 0$). При этом считаем также, что проекция скорости в этом положении также положительна. В случае колебаний проекция скорости меняет знак, например, при возвращении к положению равновесия. Здесь следует принять, что в рассматриваемый момент времени точка удаляется от положения равновесия. Выполнение этой рекомендации важно в дальнейшем при работе с силами сопротивления, зависящими от скорости.

1.3. **Освободить материальную точку от связей**, **заменить** их действие реакциями, **добавить** активные силы.

1.4. **Записать основной закон динамики** в векторном виде, **спроецировать** на выбранные оси, **выразить** задаваемые или реактивные силы через переменные время, координаты или скорости, если они от них зависят.

2. Решение дифференциальных уравнений:

2.1. **Понизить производную**, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду. например: $\ddot{x} = \dfrac{dv_x}{dt}$, или $\ddot{s} = \dfrac{dv_\tau}{dt}$.

2.2. **Разделить переменные**, например: $\dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{1}{m}kv_x, \Rightarrow \dfrac{dv_x}{v_x} = -\dfrac{1}{m}kdt$ или $\dfrac{dv_\tau}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v_\tau^2, \Rightarrow \dfrac{dv_\tau}{g - \dfrac{k}{m}v_\tau^2} = dt.$

2.3. Если в уравнении три переменных, то **сделать замену переменных**, например: $\dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{1}{m}cx, \Rightarrow \dfrac{dv_x dx}{dtdx} = \dfrac{v_x dv_x}{dx} = -\dfrac{1}{m}cx$ и затем разделить переменные.

2.4. **Вычислить неопределенные интегралы** в левой и правой частях уравнения, например: $\int \dfrac{dv_x}{v_x} = -\int \dfrac{1}{m}kdt \Rightarrow \ln v_x = -\dfrac{1}{m}kt + C_1$

Используя начальные условия, например, $t = 0$, $v_x = v_{x0}$, **определить постоянную интегрирования**: $\ln v_x\big|_{v_{x0}} = -\dfrac{1}{m}kt\big|_0 + C_1; \quad C_1 = \ln v_{x0}.$

Замечание. Вместо вычисления неопределенных интегралов можно **вычислить определенные интегралы с переменным верхним пределом**. Нижние пределы представляют начальные значения переменных (начальные условия) .Тогда не требуется отдельного нахождения постоянной, которая автоматически включается в решение, например:

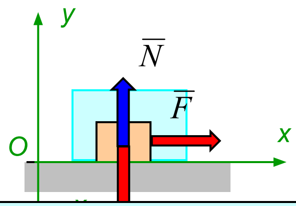
$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m}kdt. \Rightarrow \ln v_\tau\Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = -\frac{1}{m}kt\Big|_0^t; \Rightarrow \ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m}kt - 0; \quad \ln v_\tau = -\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}.$$

2.5. **Выразить скорость** через производную координаты по времени, например, $v_\tau = \dfrac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}}$ и **повторить пункты 2.2 -2.4**

Замечание. Если уравнение приводится к каноническому виду, имеющему стандартное решение, то это готовое решение и используется. Постоянные интегрирования по прежнему находятся из начальных условий. См., например, колебания (лекция 4, стр.8).

Лекция 2 (продолжение 2.3)

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от времени.** Груз весом ***P*** начинает двигаться по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы ***F***, величина которой пропорциональна времени (*F* = *kt*). Определить пройденное расстояние грузом за время *t*.



1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Принимаем объект движения за материальную точку (тело движется поступательно), освобождаем от связи (опорной плоскости) и заменяем реакцией (нормальной реакцией гладкой поверхности):
3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}.$
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : $(x):\ ma_x = F$ или kt $\boxed{\ddot{x} = \frac{k}{m}t.}$

6. Разделяем переменные: $\frac{v_y dv_y}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}.$ ⇒ $v_y dv_y = -\frac{gR^2}{y^2}dy.$

7. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int_{v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = -\int_R^y \frac{gR^2}{y^2}dy.$ ⇒ $\left.\frac{v_y^2}{2}\right|_{v_{y0}}^{v_y} = -gR^2\left.\left(-\frac{1}{y}\right)\right|_R^y.$

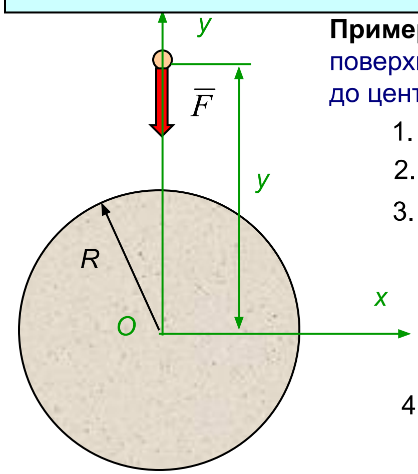
8. Подставляем пределы: $\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_{y0}^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right).$

В итоге получаем выражение для скорости в функции от координаты *y* : $\boxed{v_y = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)}.}$

Максимальная высота полета →∞ при обращении знаменателя в нуль: $\boxed{2gR = v_{y0}^2}$

Отсюда при постановке радиуса Земли и ускорения свободного падения получается II космическая скорость: $\boxed{v_{y0} = \sqrt{2gR} = 11.2 км/с}$

Максимальную высоту полета можно найти приравнивая скорость нулю: $\frac{v_{y0}^2}{2gR^2} = -\left(\frac{1}{H_{\max}} - \frac{1}{R}\right)$ ⇒ $\frac{1}{H_{\max}} = \frac{1}{R} - \frac{v_{y0}^2}{2gR^2}$ ⇒ $\boxed{H_{\max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_{y0}^2}.}$



Пример 3 решения обратной задачи: **Сила зависит от координаты.** Материальная точка массой *m* брошена вверх с поверхности Земли со скоростью v_0. Сила притяжения Земли обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до центра тяготения (центра Земли). Определить зависимость скорости от расстояния *y* до центра Земли.

1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}.$
3. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y* : $(y):\ ma_y = -F$ или $-\frac{k}{y^2}$ $m\ddot{y} = -\frac{k}{y^2}.$

Коэффициент пропорциональности можно найти, используя вес точки на поверхности Земли: $F = P$ при $y = R.$

$\frac{k}{R^2} = mg.$ ⇒ $k = mgR^2.$

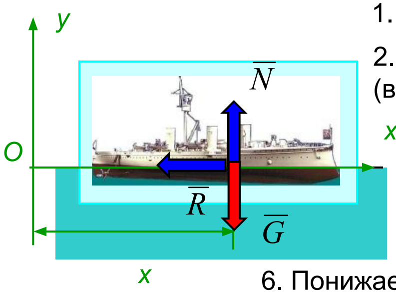
Отсюда дифференциальное уравнение имеет вид: $m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2}$ или $\boxed{\ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2}.}$

4. Понижаем порядок производной: $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{gR^2}{y^2}.$

5. Делаем замену переменной: $\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y dy}{dydt} = \frac{v_y dv_y}{dy}.$

Лекция 2 (продолжение 2.4)

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от скорости**. Судно массы *m* имело скорость *v*0. Сопротивление воды движению судна пропорционально скорости. Определить время, за которое скорость судна упадет вдвое после выключения двигателя, а также пройденное расстояние судном до полной остановки.



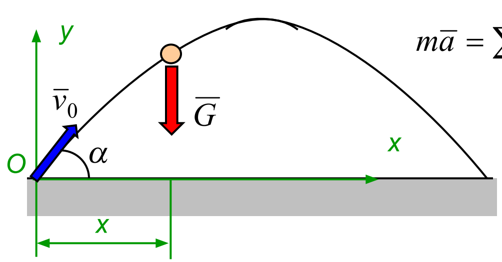
1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Принимаем объект движения за материальную точку (судно движется поступательно), освобождаем от связей (воды) и заменяем реакцией (выталкивающей силой – силой Архимеда), а также силой сопротивления движению.
3. Добавляем активную силу (силу тяжести).
4. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N}.$
5. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : $(x):\ ma_x = -R$ или $-\mu v_x$ $\quad \boxed{\ddot{x} = -\frac{\mu}{m} v_x.}$
6. Понижаем порядок производной: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m} v_x.$
7. Разделяем переменные: $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\mu}{m} dt.$
8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int\limits_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int\limits_0^t \frac{\mu}{m} dt.$ $\Rightarrow$ $\ln v_x \Big|_{v_{x0}}^{v_x} = -\frac{\mu}{m} t \Big|_0^t .$
9. Подставляем пределы: $\ln v_x - \ln v_{x0} = -\frac{\mu}{m} t.$

Исключив время из уравнений движения получаем уравнение траектории: $\boxed{y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.}$

Время полета определяем приравниванием координаты *y* нулю: $y = v_0 \sin\alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2} = 0;$ $\boxed{T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$

Дальность полета определяем подстановкой времени полета: $\boxed{x = v_0 \cos\alpha \cdot T = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L;}$

- **Движение точки, брошенной под углом к горизонту, в однородном поле силы тяжести без учета сопротивления воздуха**



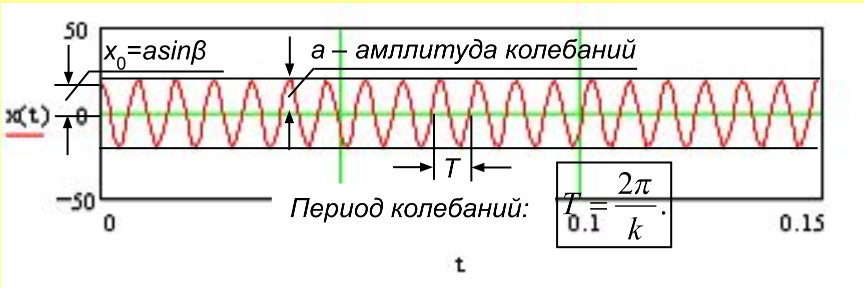
$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G}.$ $\Rightarrow$ $(x):\ m\ddot{x} = 0;$ $(y):\ m\ddot{y} = -G = -mg;$ $\Rightarrow$ $\frac{dv_x}{dt} = 0;$ $\frac{dv_y}{dt} = -g;$ $\Rightarrow$ $dv_x = 0;$ $dv_y = -gdt;$

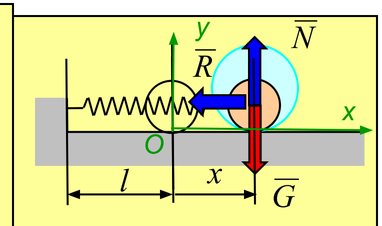
$\int\limits_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = 0;$ $\int\limits_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -\int\limits_0^t gdt;$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_x = v_{x0} = v_0 \cos\alpha;}$ $\boxed{v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin\alpha - gt;}$

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha;$ $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt;$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = v_0 \cos\alpha \cdot t;}$ $\boxed{y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2};}$

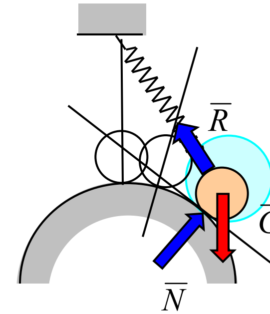
Лекция 3

- **Прямолинейные колебания материальной точки** – Колебательное движение материальной точки происходит при условии: имеется **восстанавливающая сила, стремящая вернуть точку в положение равновесия** при любом отклонении ее из этого положения.





Восстанавливающая сила есть, положение равновесия устойчивое



Необходим анализ

Итак, уравнение свободных колебаний имеет вид: $x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt.$

Причиной возникновения свободных колебаний является начальное смещение x_0 и/или начальная скорость v_0.

Уравнение можно представить одночленным выражением: $x = a\sin(kt+\beta).$ где a – амплитуда, β - начальная фаза.

Новые константы a и β - связаны с постоянными C_1 и C_2 соотношениями: $C_1 = a\sin\beta;$ $C_2 = a\cos\beta.$

Определим a и β : $C_1^2 = a^2\sin^2\beta;$ $C_2^2 = a^2\cos^2\beta.$ $+$ $C_1^2 + C_2^2 = a^2.$ ⇒ $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}.$

$\frac{C_1}{C_2} = \frac{a\sin\beta}{a\cos\beta} = tg\beta.$ ⇒ $tg\beta = \frac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{k}} = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}.$

- **Свободные колебания – происходят под действием только восстанавливающей силы.**

Запишем основной закон динамики: $m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{R}.$

Выберем систему координат с центром в положении равновесия (точке O) и спроецируем уравнение на ось x : $m\ddot{x} = -R = -cx.$

Приведем полученное уравнение к стандартному (каноническому) виду : $\ddot{x} + k^2x = 0,\quad \text{где}\ k^2 = \frac{c}{m}.$

Данное уравнение является **однородным линейным дифференциальным уравнением II порядка**, вид решения которого определяется корнями **характеристического уравнения**, получаемое с помощью универсальной подстановки:

$x = e^{zt}.$ ⇒ $\ddot{x} = z^2e^{zt}.$ ⇒ $z^2 + k^2 = 0.$

Корни характеристического уравнения мнимые и равные: $z_{1,2} = \pm ki.$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt.$

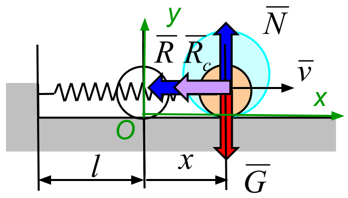
Скорость точки: $\dot{x} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt.$

Начальные условия: $t = 0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0.$

Определим постоянные: $x_0 = C_1\cos k0 + C_2\sin k0 = C_1 1 + C_2 0.$ $C_1 = x_0.$

$\dot{x} = -kC_1\sin k0 + kC_2\cos k0 = -kC_1 0 + kC_2 1.$ $C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$

Лекция 3 (продолжение 3.2)



- **Затухающие колебания материальной точки** – Колебательное движение материальной точки происходит при наличии **восстанавливающей силы и силы сопротивления движению**.
- Зависимость силы сопротивления движению от смещения или скорости определяется физической природы среды или связи, препятствующей движению. Наиболее простой зависимостью является линейная зависимость от скорости (вязкое сопротивление):

$$\boxed{\bar{R}_c = -\alpha \bar{v}; \quad R_{cx} = -\alpha \dot{x}.}$$ α - коэффициент вязкости

Основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N} + \bar{R}_c.$ Проекция уравнения динамики на ось: $(x): \; m\ddot{x} = -R_x - R_{cx} = -cx - \alpha \dot{x}$

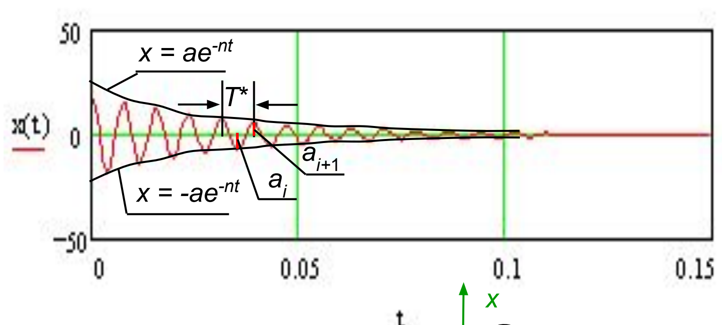
Приведем уравнение к стандартному виду: $\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x}$ ➡ $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$ ➡ $\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,}$ где $\boxed{2n = \frac{\alpha}{m}, k^2 = \frac{c}{m}.}$

Характеристическое уравнение $\boxed{z^2 + 2nz + k^2 = 0}$ имеет корни: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет различный вид в зависимости от значений корней:

1. *n* < k – случай малого вязкого сопротивления: $z_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$ - корни комплексные, различные.

$$\boxed{x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t)}$$ или $$\boxed{x = e^{-nt} a \sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta).}$$



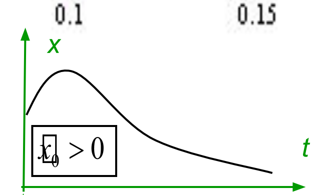
Частота затухающих колебаний: $\boxed{k^* = \sqrt{k^2 - n^2}}$ Период: $\boxed{T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.}$

Декремент колебаний: $\boxed{\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{ae^{-n(t_i + \frac{T^*}{2})}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T^*}{2}}.}$ Логарифмический декремент колебаний: $\boxed{\lambda = -n\frac{T^*}{2}.}$

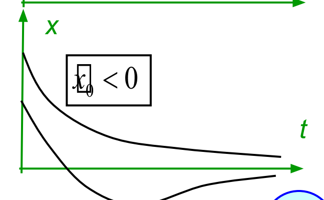
Затухание колебаний происходит очень быстро. Основное влияние силы вязкого сопротивления – уменьшение амплитуды колебаний с течением времени.

2. *n* > k – случай большого вязкого сопротивления: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ - корни действительные, различные.

$$\boxed{x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t})}$$ или $$\boxed{x = e^{-nt} a\,\mathrm{sh}(\sqrt{n^2 - k^2}\,t + \beta).}$$ - эти функции апериодические:

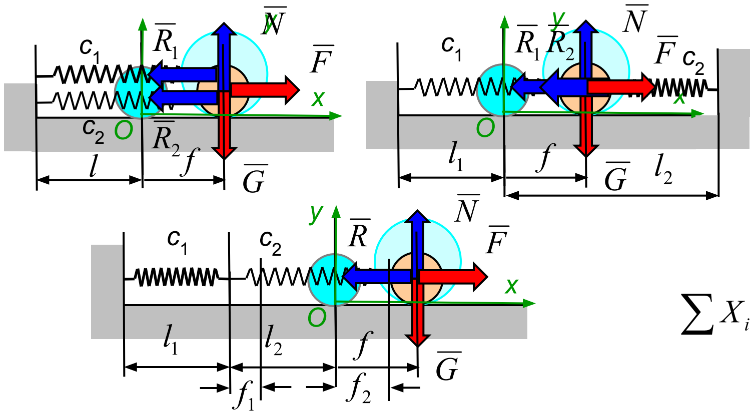


3. *n* = k : $z_{1,2} = -n$ - корни действительные, кратные. $$\boxed{x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)}$$ -эти функции также апериодические:



Лекция 3 (продолжение 3.3)

- **Способы соединения пружин. Эквивалентная жесткость.**



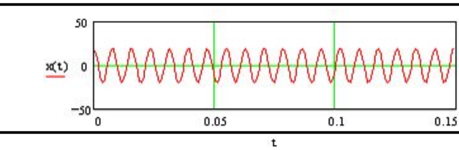
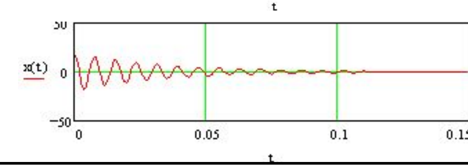
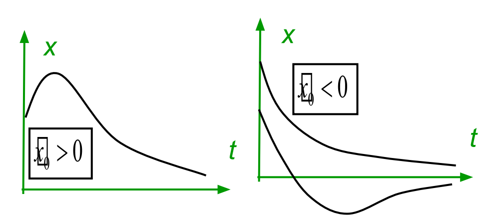
$$\sum X_i = 0; \quad F = R_1 + R_2.$$

$$F = c_1 f + c_2 f = (c_1 + c_2) f = c_{\text{экв}} f$$

$$\boxed{c_{\text{экв}} = (c_1 + c_2)}$$

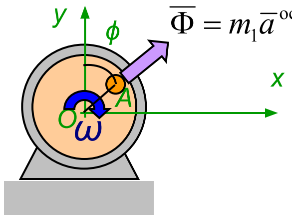
$$\sum X_i = 0; \quad F = R. \qquad f = f_1 + f_2 = \frac{R}{c_1} + \frac{R}{c_2} = R\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} = \frac{F}{c_{\text{экв}}}. \quad \boxed{c_{\text{экв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.}$$

- **Классификация решений свободных колебаний.**

Дифф. уравнение	Характер. уравнение	Корни характ. уравнения	Решение дифференциального уравнения	График
$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$ $\boxed{k^2 = \frac{c}{m}}$	$z^2 + k^2 = 0$	$z_{1,2} = \pm ik$	$\boxed{x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.}$ $\boxed{x = a\sin(kt + \beta).}$	
$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0}$ $\boxed{2n = \frac{\alpha}{m}, k^2 = \frac{c}{m}.}$	$z^2 + 2nz + k^2 = 0$	n < k: $z_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$	$\boxed{x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t)}$ $\boxed{x = e^{-nt} a \sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta).}$	
		n > k: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$	$\boxed{x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}\,t})}$ $\boxed{x = e^{-nt} a\,\mathrm{sh}(\sqrt{n^2 - k^2}\,t + \beta).}$	
		n = k: $z_{1,2} = -n$	$\boxed{x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)}$	

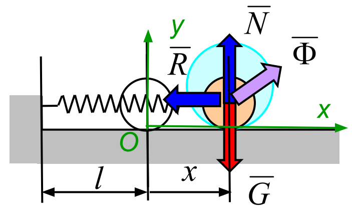
Лекция 3 (продолжение 3.4)

- **Вынужденные колебания материальной точки** – Наряду с **восстанавливающей силой** действует периодически изменяющаяся сила, называемая **возмущающей силой**.
- Возмущающая сила может иметь различную природу. Например, в частном случае инерционное воздействие неуравновешенной массы m_1 вращающегося ротора вызывает гармонически изменяющиеся проекции силы:



$\bar{\Phi} = m_1 \bar{a}^{oc}$

$\Phi = m_1 \omega^2 OA =$
$= m_1 p^2 OA = H$
$\varphi = \omega t = pt.$
$\Phi_x = H \sin pt.$



Основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N} + \bar{\Phi}.$

Проекция уравнения динамики на ось: $(x):\ m\ddot{x} = -R_x + \Phi_x = -cx + H \sin pt$

Приведем уравнение к стандартному виду: $\ddot{x} = -\dfrac{c}{m}x + \dfrac{H}{m}\sin pt.$ $\boxed{\ddot{x} + k^2 x = \dfrac{H}{m}\sin pt.}$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит их двух частей $x = x_1 + x_2$: x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения $\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$ и x_2 – частное решение неоднородного уравнения:

Общее решение: $\boxed{x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.}$ **Частное решение** подбираем в форме правой части:

$\boxed{x_2 = A \sin pt.}$ ⇒ $\dot{x}_2 = pA \cos pt.$ ⇒ $\ddot{x}_2 = -p^2 A \sin pt.$ ⇒ $-Ap^2 \sin pt + k^2 A \sin pt = \dfrac{H}{m}\sin pt.$

Полученное равенство должно удовлетворяться при любом t .

Тогда: $A(-p^2 + k^2) = \dfrac{H}{m}$ или $\boxed{A = \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}.}$ Таким образом, **частное решение:** $\boxed{x_2 = \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$

В итоге **полное решение**: $\boxed{x = x_1 + x_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin pt + \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$ или $\boxed{x = a \sin(pt + \beta) + \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$

Постоянные C_1 и C_2, или а и β определяются из начальных условий с использованием **полного решения (!)**:

Таким образом, при одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой **результат сложения** (наложения) **свободных** (x_1) **и вынужденных** (x_2) **колебаний.**

1. Если **p < k** (вынужденные колебания малой частоты), то **фаза колебаний совпадает с фазой возмущающей силы**:

$$\boxed{x_2 = \frac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$$

2. Если **p > k** (вынужденные колебания большой частоты), то **фаза колебаний противоположна фазе возмущающей силы**:

$$\boxed{x_2 = -\frac{H}{m(p^2 - k^2)}\sin pt = \frac{H}{m(p^2 - k^2)}\sin(pt - \pi).}$$

Лекция 3 (продолжение 3.5)

Коэффициент динамичности – отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению точки под действием постоянной силы H = const:

$$\eta = \frac{A}{A_{ст}}$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{H}{m(k^2 - p^2)}$$

Статическое отклонение можно найти из уравнения равновесия: $\sum X_i = 0; \; -R + H = 0.$

Здесь: $R = cx = cA_{ст} = mk^2 A_{ст} = H.$

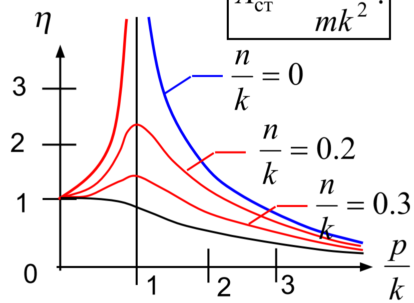
Отсюда: $A_{ст} = \dfrac{H}{mk^2}.$

Таким образом, при p < k (малая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

$$\eta = \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \dfrac{p^2}{k^2}}.$$

При p > k (большая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

$$\eta = \frac{k^2}{p^2 - k^2} = \frac{1}{\dfrac{p^2}{k^2} - 1}.$$



Резонанс – возникает, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний **(p = k)**. Это наиболее часто происходит при запуске и остановке вращения плохо сбалансированных роторов, закрепленных на упругих подвесках.

Дифференциальное уравнение колебаний при равенстве частот: $\ddot{x} + k^2 x = \dfrac{H}{m}\sin kt.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A_c(k^2 - p^2) = \dfrac{H}{m}\cos\varepsilon; \\ 2npA_c = \dfrac{H}{m}\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Возведением в степень обоих уравнений и сложением их получаем **амплитуду вынужденных колебаний**:

$$A_c = \frac{H}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

Делением второго уравнения на первое получаем **сдвиг фазы вынужденных колебаний**:

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Таким образом, **уравнение движения при вынужденных колебаниях с учетом сопротивления движению**, например при n < k (малое сопротивление):

$$x = x_1 + x_2 = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t) + A_c \sin(pt - \varepsilon).$$

Вынужденные колебания при сопротивлении движению не затухают. Частота и период вынужденных колебаний равны частоте и периоду изменения возмущающей силы. Коэффициент динамичности при резонансе имеет конечную величину и зависит от соотношения *n* и *к*.

Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.

Дифференциальное уравнение при наличии вязкого сопротивления имеет вид: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = \dfrac{H}{m}\sin pt.$

Общее решение выбирается из таблицы (Лекция 3, стр. 11) в зависимости от соотношения n и к (посмотреть).

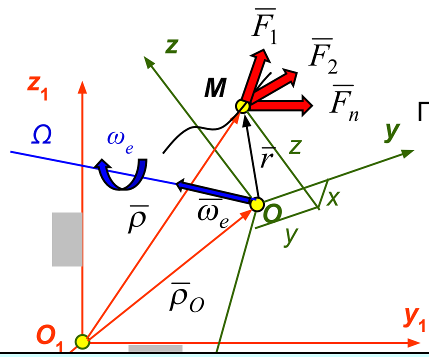
Частное решение возьмем в виде $x_2 = A_c \sin(pt - \varepsilon)$ и вычислим производные : $\dot{x}_2 = A_c p\cos(pt - \varepsilon).$ $\ddot{x}_2 = -A_c p^2 \sin(pt - \varepsilon).$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$-A_c p^2 \sin(pt - \varepsilon) + 2nA_c p\cos(pt - \varepsilon) + k^2 A_c \sin(pt - \varepsilon) = \frac{H}{m}\sin(pt - \varepsilon + \varepsilon) = \frac{H}{m}\sin(pt - \varepsilon)\cos\varepsilon + \frac{H}{m}\cos(pt - \varepsilon)\sin\varepsilon.$$

Лекция 4

- **Относительное движение материальной точки** – Положим, что подвижная (неинерциальная) система координат *Oxyz* движется по некоторому закону относительно неподвижной (инерциальной) системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Движение материальной точки М (x, y, z) относительно подвижной системы *Oxyz*– **относительное**, относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$– **абсолютное**. Движение подвижной системы *Oxyz* относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$– **переносное движение**.



Основное уравнение динамики: $\boxed{m\bar a = \sum \bar F_i.}$ Абсолютное ускорение точки: $\boxed{\bar a^a = \bar a^r + \bar a^e + \bar a^c.}$

Подставим абсолютное ускорение точки в основное уравнение динамики: $m(\bar a^r + \bar a^e + \bar a^c) = \sum \bar F_i.$

Перенесем слагаемые с переносным и кориолисовым ускорением в правую часть: $m\bar a^r = \sum \bar F_i - m\bar a^e - m\bar a^c.$

Перенесенные слагаемые имеют размерность сил и рассматриваются как соответствующие силы инерции, равные: $\boxed{\bar\Phi_e = -m\bar a^e,\ \bar\Phi_c = -m\bar a^c.}$

Тогда **относительное движение точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим силам добавить переносную и кориолисову силы инерции:** $\boxed{m\bar a^r = \sum \bar F_i + \bar\Phi_e + \bar\Phi_c.}$

В проекциях на оси подвижной системы координат имеем: $\boxed{(x): m\ddot x = \sum X_i + \Phi_{ex} + \Phi_{cx};}$

Величина силы тяжести (веса) на поверхности Земли равна *P = mg* .
Центробежная сила инерции составляет малую долю от силы тяжести:

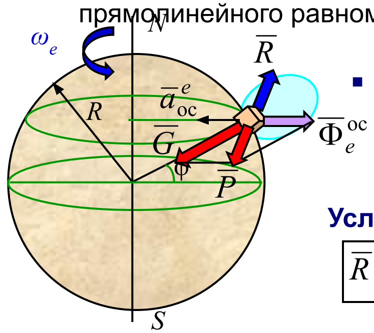
$$\frac{\Phi_e^{oc}}{P} = \left.\frac{m\omega_e^2 R\cos\varphi}{mg}\right|_{\varphi=60^0} = \frac{(7.27\cdot10^{-5})^2\, 6370\cdot10^3\cdot0.5}{9.81} = 0.00172$$

Максимальная величина силы инерции (при $\varphi = 0$ - на экваторе) составляет всего 0.00343 от величины силы тяжести

Отклонение силы тяжести от направления силы притяжения также мало : $\frac{\sin\gamma}{\Phi_e^{oc}} = \frac{\sin\varphi}{P};$ $\sin\gamma = \left.\frac{\Phi_e^{oc}}{P}\sin\varphi\right|_{\varphi=60^0} = 0.00172\cdot0.866 = 0.00149 = \gamma = 0.085^0$

Таким образом, **влияние вращения Земли на равновесие тел чрезвычайно мало и в практических расчетах не принимается во внимание.**

Если **движение прямолинейное и равномерное, то подвижная система является инерциальной** и относительное движение может рассматриваться как абсолютное: $\boxed{\bar a^e = 0}$ $\boxed{\bar\Phi_e = 0}$ $m\bar a^r = \sum \bar F_i.$ Никакими механическими явлениями нельзя обнаружить прямолинейного равномерного движения (принцип относительности классической механики).



- **Влияние вращения Земли на равновесие тел** – Положим, что тело находится в равновесии на поверхности Земли на произвольной широте φ (параллели). Земля вращается вокруг своей оси с запада на восток с угловой скоростью: $\omega_e = \frac{2\pi}{24\cdot60\cdot60} = 7.27\cdot10^{-5}\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$ Радиус Земли составляет около 6370 км.

R – полная реакция негладкой поверхности.
G – сила притяжения Земли к центру.
Ф – центробежная сила инерции.

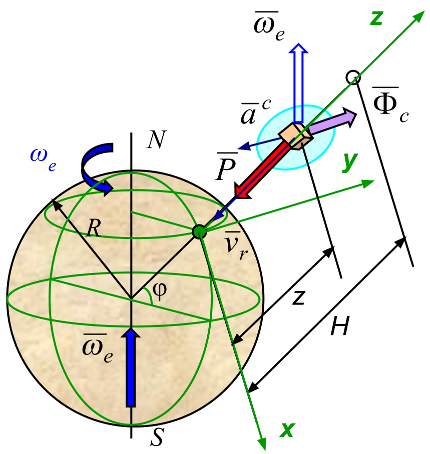
Условие относительного равновесия:

$$\boxed{\bar R + \bar G + \bar\Phi_e^{oc} = 0.}$$

Равнодействующая сил притяжения и инерции – сила тяжести (вес): $\bar P = \bar G + \bar\Phi_e^{oc}.$

Лекция 4 (продолжение 4.2)

- **Влияние вращения Земли на движение тел в поле тяготения Земли** – Положим тело падает на Землю с некоторой высоты *H* над поверхностью Земли на широте φ . Выберем подвижную систему отсчета, жестко связанную с Землей, направляя оси x, y по касательной к параллели и к меридиану:



Уравнение относительного движения: $m\overline{a}^r = \sum \overline{F}_i + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c = \overline{G} + \overline{\Phi}_e^{oc} + \overline{\Phi}_c = \overline{P} + \overline{\Phi}_c.$

Здесь учтена малость центробежной силы инерции по сравнению с силой тяжести. Таким образом сила тяготения отождествляется с силой тяжести. Кроме того, считаем, что сила тяжести направлена перпендикулярно поверхности Земли вследствие малости ее отклонения, как рассмотрено выше.

Ускорение Кориолиса равно $\overline{a}^c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r$ и направлено параллельно оси *y* на запад.

Сила инерции Кориолиса равна $\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}^c$ направлена в противоположную сторону.

Спроецируем уравнение относительного движения на оси:

$$(x): m\ddot{x} = 0; \qquad (y): m\ddot{y} = \Phi_c = m2\omega_e v_r \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi); \qquad (z): m\ddot{z} = -P = -mg.$$

Решение первого уравнения дает: $\dot{x} = C_1.$ ➡ $x = C_1 t + C_2.$

Начальные условия: $t = 0;\; x_0 = 0; \dot{x}_0 = 0.$ ➡ $C_1 = 0;\; C_2 = 0.$ ➡ $\boxed{x = 0.}$

Решение третьего уравнения дает: $\dot{z} = -gt + C_3.$ ➡ $z = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4.$

Начальные условия: $t = 0;\; z_0 = H; \dot{z}_0 = 0.$ ➡ $C_3 = 0;\; C_4 = H.$ ➡ $\boxed{\dot{z} = -gt.}$ $\boxed{z = -\frac{gt^2}{2} + H.}$

Третье уравнение принимает вид: $\ddot{y} = 2\omega_e|\dot{z}|\cos\varphi = 2\omega_e gt\cos\varphi.$

Его решение дает: $\dot{y} = \omega_e gt^2\cos\varphi + C_5.$ ➡ $y = \omega_e \frac{gt^3}{3}\cos\varphi + C_5 t + C_6.$

Начальные условия: $t = 0;\; y_0 = 0; \dot{y}_0 = 0.$ ➡ $C_5 = 0;\; C_6 = 0.$ ➡ $\boxed{\dot{y} = \omega_e gt^2\cos\varphi.}$ $\boxed{y = \omega_e \frac{gt^3}{3}\cos\varphi.}$

Полученное решение показывает, что тело при падении отклоняется к востоку.
Вычислим величину этого отклонения, например, при падении с высоты 100 м.
Время падения найдем
из решения второго уравнения:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + H = 0; \qquad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 100}{9.81}} = 4.515c.$$

$$y = 7.27\cdot 10^{-5}\,\frac{9.81\cdot 4.515^3}{3}\cdot 0.5 = 0.0109м$$

Таким образом, **влияние вращения Земли на движение тел чрезвычайно мало для практических высот и скоростей и в технических расчетах не учитывается**.
Из решения второго уравнения также следует существование скорости по оси *y*, которая также должна вызывать и вызывает соответствующее ускорение и силу инерции Кориолиса.
Влияние этой скорости и силы инерции, связанной с ней, на изменение движения будет еще меньше, чем рассмотренная сила инерции Кориолиса, связанная с вертикальной скоростью.

Лекция 4 (продолжение 4.3)

- **Работа, мощность силы. Кинетическая и потенциальная энергия** – механическое движение в результате взаимодействия механических систем может переноситься с одной механической системы на другую:

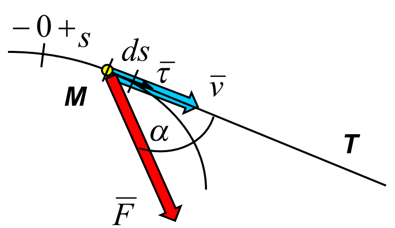
1. без превращений в другую форму движения, т.е. в качестве того же механического движения,
2. с превращением в другую форму движения материи (потенциальную энергию, теплоту, электрическую энергию и т.д.)

Каждый из этих случаев имеет свои измерители (меры) механического движения и механического взаимодействия, отстаиваемые в свое время Декартом и Лейбницем (см. таблицу):

	Мера механического движения	Мера механического взаимодействия
Декарт	Количество движения $\bar{Q} = m\bar{v}$	Импульс силы $\bar{S} = \int \bar{F}dt$
Лейбниц	Кинетическая энергия $T = \dfrac{mv^2}{2}$	Работа силы $A = \int F_\tau ds$

Ф. Энгельс показал существование и равноправность обоих (векторных и скалярных) мер движения, каждой из которых соответствуют свои меры механического взаимодействия.
Импульс силы является мерой действия силы при изменении механического движения.
Работа является количественной мерой превращения механического движения в какую-либо другую форму движения материи.

- **Работа силы, приложенной к материальной точке** – Пусть точка приложения переменной по величине и направлению силы перемещается по некоторой произвольной траектории. На малом (элементарном) перемещении силу можно считать постоянной и **элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения** (касательную к траектории движения), **умноженной на элементарное перемещение** :



$$бA = F_\tau ds = F\cos\alpha \cdot ds$$

Знак элементарной работы определяется величиной угла α и знаком cosα :

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \qquad бA > 0;$$
$$\alpha > \frac{\pi}{2} \qquad бA < 0.$$

Поскольку часто более удобно работать с острыми углами, то в этом случае используют острый угол и знак присваивают по следующему простому правилу: **если сила и перемещение совпадают по направлению, то присваивается знак +, если противоположны по направлению, то знак −**.

Элементарная работа может быть записана в виде **скалярного произведения**: $бA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ и **в проекциях**: $бA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$

Работа на конечном перемещении *M M*$_1$ получается суммированием или интегрированием: $A = \sum бA$

$$\boxed{A = \int_M^{M_1} F_\tau ds} \qquad \boxed{A = \int_M^{M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}} \qquad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.}$$

Частные случаи: 1. Сила постоянная по величине (*F* = const) и направлению (α =const):

$$\boxed{A = \int_M^{M_1} F\cos\alpha \cdot ds = F\cos\alpha \int_M^{M_1} ds = Fs\cos\alpha.}$$

2. Сила постоянная по величине (*F* = const) и параллельна перемещению (α =0): $\boxed{A = \pm Fs.}$

3. Сила перпендикулярна перемещению: $\boxed{A = 0}$

Можно доказать следующие теоремы и утверждения:

- **Работа равнодействующей на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:** $\boxed{A=\sum A_i}$

$$A=\int_M^{M_1}\bar R\cdot d\bar r=\int_M^{M_1}(\bar F_1+\bar F_2+\ldots)\cdot d\bar r=\int_M^{M_1}\bar F_1\cdot d\bar r+\int_M^{M_1}\bar F_2\cdot d\bar r+\ldots=A_1+A_1+\ldots=\sum A_i$$

- **Работа постоянной сил по величине и направлению на составном перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на каждом из составляющих перемещений:** $\boxed{A=\sum A_{si}}$

$$A=\bar F\cdot\bar s=\bar F\cdot(\bar s_1+\bar s_2+\ldots)=\bar F\cdot\bar s_1+\bar F\cdot\bar s_2+\ldots=A_{s1}+A_{s2}+\ldots=\sum A_{si}$$

- **Работа внутренних сил неизменяемой системы равна нулю:** $\boxed{A^i=0}$

$$A^i=\int_M^{M_1}(\bar R+\bar R')\cdot d\bar r=\int_M^{M_1}(\bar R-\bar R)\cdot d\bar r=0;\qquad (\bar R'=-\bar R).$$

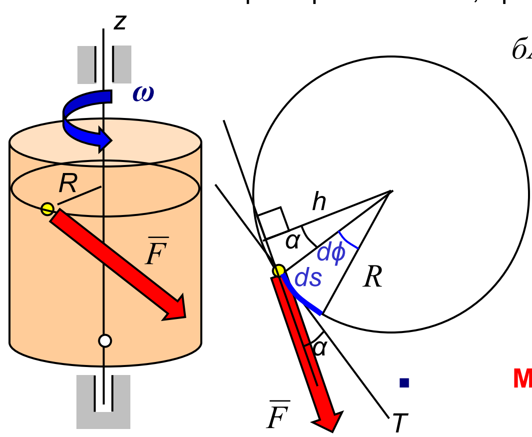
- **Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению силы тяжести на разность высот:** $\boxed{A=-G(z_1-z)}$

$$A=\int_M^{M_1}G_xdx+G_ydy+G_zdz=\int_M^{M_1}(-G)dz=-Gz\Big|_z^{z_1}=-G(z_1-z);\qquad (G_x=G_y=0,G_z=\text{-G})$$

- **Работа линейной силы упругости (реакции пружины) при перемещении из состояния равновесия:** $\boxed{A=-c\dfrac{\Delta x^2}{2}.}$

$$A=\int_M^{M_1}R_xdx=\int_M^{M_1}(-cx)dx=-c\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x_1}=-c\frac{x_1^2}{2};\qquad (R_x=-cx)$$

- **Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.** Запишем выражение для элементарной работы силы, приложенной к точке, и выразим элементарное перемещение через угол поворота тела:



$$\text{б}A=F_\tau ds=F\cos\alpha\cdot ds=F\cos\alpha\cdot R\cdot d\varphi\qquad \text{б}A=Fh\cdot d\varphi=M_z(\bar F)d\varphi.$$

-работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, выражается через момент силы относительно оси.

Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, для конечного угла поворота: $\boxed{A=\int_\varphi^{\varphi_1}M_z(\bar F)d\varphi.}$

В частном случае постоянного значения момента силы относительно оси работа равна произведению момента силы на угол поворота: $\boxed{A=M_z(\bar F)(\varphi_1-\varphi).}$

- **Мощность** – величина, характеризуемая количеством работы, произведенной в единицу времени:

Мощность силы, приложенной к точке: $\boxed{N=\dfrac{\delta A}{dt}=\dfrac{F_\tau ds}{dt}=F_\tau v_\tau=\bar F\cdot\bar v.}$ $\boxed{N=\dfrac{\delta A}{dt}.}$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся твердому телу: $\boxed{N=\dfrac{\delta A}{dt}=\dfrac{M_z d\varphi}{dt}=M_z\omega_z=\bar M\cdot\bar\omega.}$

Лекция 4 (продолжение – 4.5)

- **Кинетическая энергия** – характеризует способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого движения:

- **Кинетическая энергия материальной точки:** $\boxed{T = \dfrac{mv^2}{2}}$

- **Кинетическая энергия системы материальных точек:** $\boxed{T = \sum \dfrac{m_k v_k^2}{2}}$

- **Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении:** $\boxed{T = \dfrac{Mv_C^2}{2}}$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum m_k = \frac{v^2}{2}M = \frac{Mv_C^2}{2}; \quad (v_1 = v_2 = \ldots = v = v_C)$$

- **Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении:** $\boxed{T = \dfrac{I_z\omega_z^2}{2}}$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k(\omega_z h_k)^2}{2} = \frac{\omega_z^2}{2}\sum m_k h_k^2 = \frac{I_z\omega_z^2}{2}; \quad (I_z = \sum m_k h_k^2)$$

- **Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении:** $\boxed{T = \dfrac{Mv_C^2}{2} + \dfrac{I_{zC}\omega_z^2}{2}}$

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \sum \frac{m_k(\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})\cdot(\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})}{2} = \frac{Mv_C^2}{2} + \boxed{\bar{v}_C \cdot \sum m_k \bar{v}_{kC}} + \boxed{\sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}}.$$

$$\bar{v}_C \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_{kC}}{dt} = \bar{v}_C \cdot \frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{r}_{kC}) = 0; \quad (\sum m_k \bar{r}_{kC} = 0) \qquad \frac{I_{zC}\omega_z^2}{2}$$

- **Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки – Изменение кинетической энергии точки равно работе сил, действующих на точку на том же перемещении:**

Запишем основной закон динамики точки: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{R}$

Выразим ускорение через скорость и умножим левую и правую части соотношения скалярно на дифференциал радиуса-вектора :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot d\bar{r} = \bar{R}\cdot d\bar{r} \quad \text{или} \quad \boxed{m\bar{v}\cdot d\bar{v}} = \boxed{\bar{R}\cdot d\bar{r}}.$$

$$md\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{v}}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \qquad dA$$

Проинтегрируем полученное соотношение:

$$\int d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0}^{M} dA; \quad \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = A$$

После подстановки пределов получаем:

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A}$$

- **Теорема об изменении кинетической энергии системы – Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на систему на соответствующих перемещениях точек системы:**

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для произвольной точки системы, при этом выделим работу внешних и внутренних сил, приложенных к данной точке:

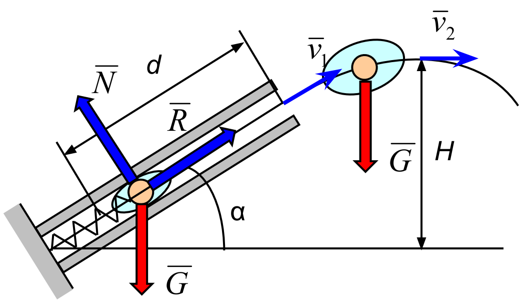
$$\boxed{\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{mv_{k0}^2}{2} = A_k^i + A_k^e.}$$

Просуммируем левые и правые части соотношений: $\sum \dfrac{m_k v_k^2}{2} - \sum \dfrac{mv_{k0}^2}{2} = \sum A_k^i + \sum A_k^e.$

В левой части получили разность кинетических энергий системы: $\boxed{T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e.}$

Для неизменяемой системы: $\boxed{T - T_0 = \sum A_k^e; \quad \sum A_k^i = 0}$

- **Пример решения задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки** – Снаряд массы *m* выбрасывается пружинным устройством из канала под углом α к горизонту. Длина нерастянутой пружины жесткостью *c* равна длине канала l_0. Перед выстрелом пружина сжимается на величину *d*. Определить скорость снаряда при вылете из канала, а также максимальную высоту полета.



Дано: α, c, d, m, l_0
Найти: v_1, H

1. Выбираем объект - снаряд
2. Отбрасываем связи – ствол, пружину
3. Заменяем связи реакциями – *N*, *R*
4. Добавляем активные силы – *G*
5. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для точки:

$$\boxed{\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A}$$

Начальная скорость снаряда равна нулю: $v_0 = 0.$
Работа сил, приложенных к объекту, равна:

$$A = A_N + A_G + A_R.$$

Работа нормальной реакции равна нулю (направление реакции перпендикулярно перемещению): $A_N = 0.$

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -mgd\sin\alpha.$

Работа упругой реакции пружины (направление реакции совпадает с перемещением): $A_R = c\dfrac{d^2}{2}.$

Подставляем определенные величины в теорему: $\dfrac{mv_1^2}{2} - 0 = -mgd\sin\alpha + c\dfrac{d^2}{2},$

Отсюда величина скорости вылета снаряда:

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha}.}$$

Определяем максимальную высоту полета (повторяем шаги 1-5):

$$\boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A}$$

Вертикальная скорость снаряда в наивысшей точке траектории равна нулю : $v_{2y} = 0.$

Горизонтальная скорость снаряда постоянная (из закона сохранения проекции на ось x количества движения точки) и равна:

$$v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha}\,\cos\alpha.$$

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -mg(H - l_0\sin\alpha).$

Подставляем определенные величины в теорему:

$$\frac{m\left(\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha\right)\cos^2\alpha}{2} - \frac{m\left(\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha\right)}{2} = -mg(H - l_0\sin\alpha).$$

После некоторых сокращений и преобразований:

$$\left(\frac{cd^2}{2m} - gd\sin\alpha\right)\sin^2\alpha = g(H - l_0\sin\alpha).$$

Отсюда максимальная высота полета:

$$\boxed{H = \left(\frac{cd^2}{2mg} - d\sin\alpha\right)\sin^2\alpha + l_0\sin\alpha.}$$

Заметим, что предыдущее выражение можно более быстро получить, записывая теорему об изменении кинетической энергии только для вертикальной скорости движения точки, поскольку горизонтальные силы отсутствуют и горизонтальная скорость не изменяется..