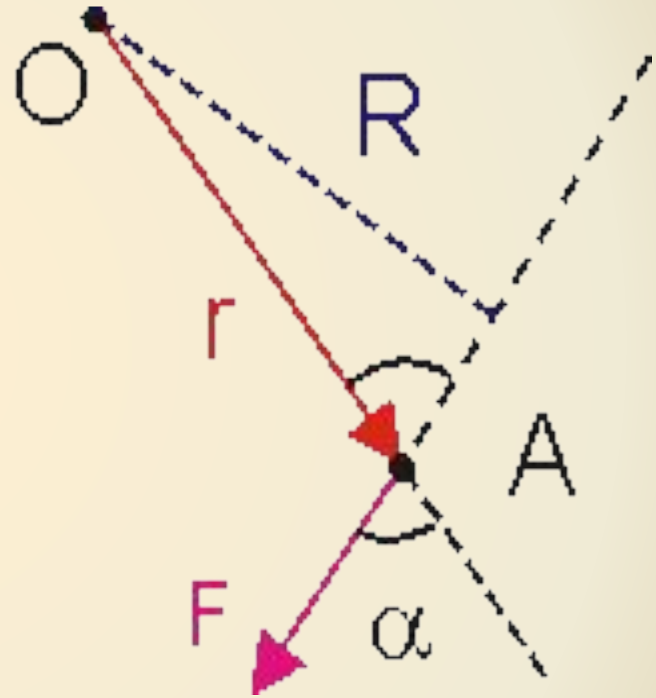
Лекция 5

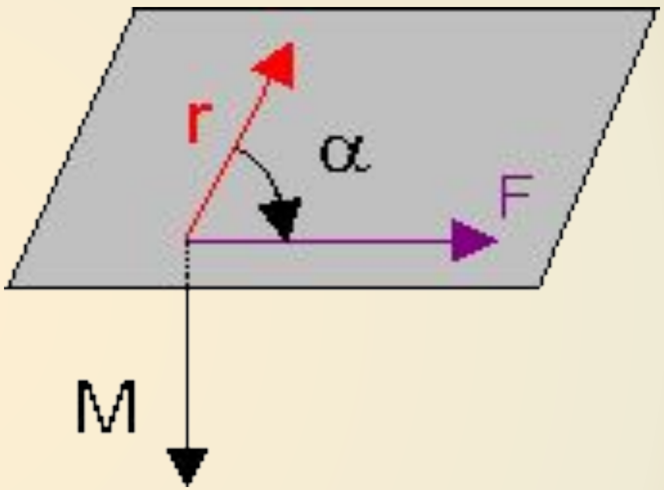
Динамика вращательного движения

Особенности вращательного движения твердого тела под действием внешних сил.

- Ускорение при вращательном движении зависит:
  - не только от массы тела, но и от ее распределения относительно оси вращения,
  - не только от силы, но и от точки ее приложения и направления действия.
- *Момент силы, действующей на материальную точку.* Пусть частица A движется произвольным образом относительно точки O под действием силы F . Моментом силы частицы относительно закрепленной точки называется величина, равная векторному произведению:
- $M = [r \cdot F]$,
  где r - радиус вектор точки приложения силы F.

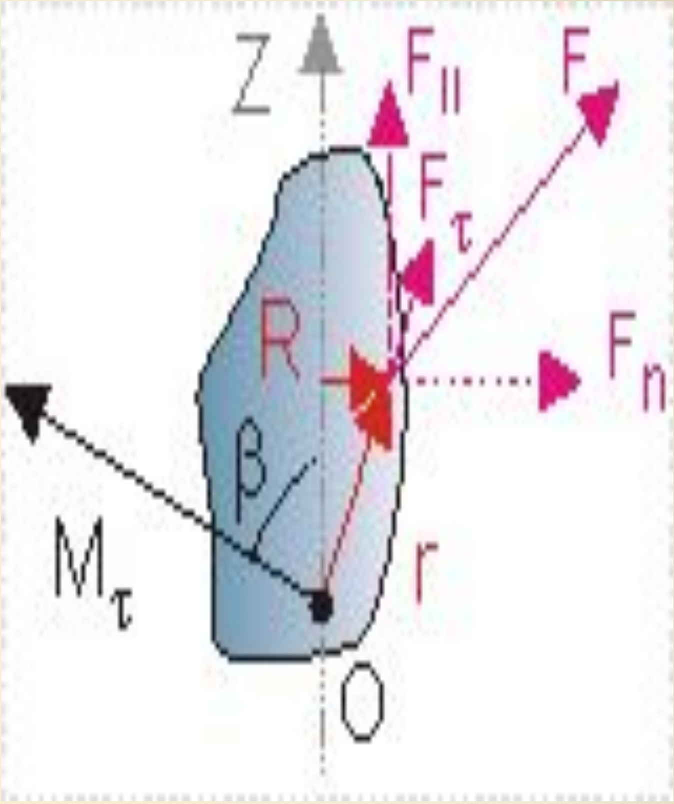


- Момент силы - векторная величина. Для нахождения ее направления вектора **r** и **F** необходимо изобразить исходящими из одной точки и связать с ними правый винт. Затем головку правого винта нужно вращать от **r** к **F**. Направление движения винта будет совпадать с вектором **M**.
- Величина вектора момента сил равна:
- $M = r \cdot F \cdot \sin(\alpha) = F \cdot R$, где $R = r \cdot \sin(\alpha)$ - плечо силы, равное кратчайшему расстоянию между осью вращения и линией действия силы.



- ***Момент силы относительно оси вращения.*** **Моментом силы относительно произвольной оси Z, проходящей через точку O, в которой закреплено твердое тело, называется величина, равная проекции вектора M на эту ось.**
- $M_z = [r \cdot F]_z$.
- **Найдем значение момента сил для твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси Z под действием силы F. Разложим эту силу на три составляющие:**
- $F = F_{\parallel} + F_{\tau} + F_n$,
- **где $F_{\parallel}$ - составляющая силы, параллельная оси вращения,**
  F_{τ} - тангенциальная составляющая силы, расположенная в плоскости вращения,
  F_n - нормальная составляющая силы,

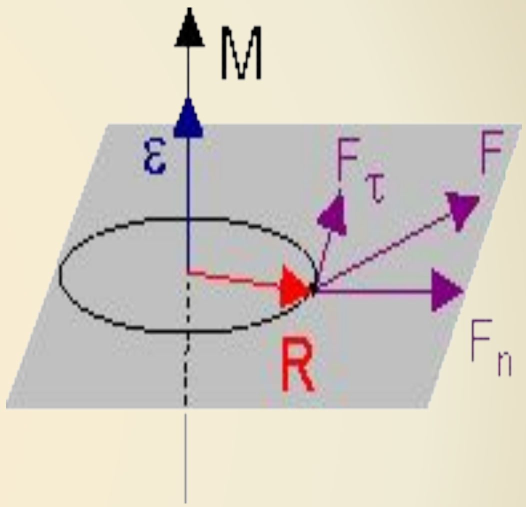
  расположенная в плоскости вращения.



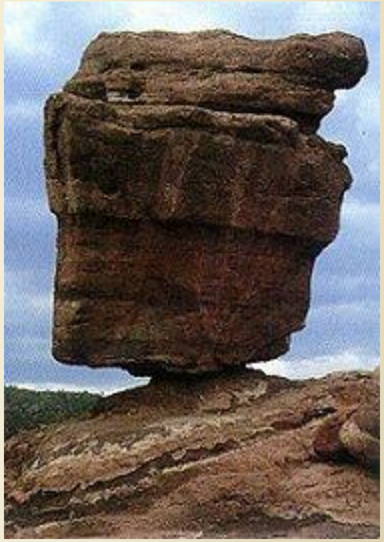
- Момент силы относительно точки O можно представить как векторную сумму моментов, созданных этими силами:
- $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{||} + \mathbf{M}_{\tau} + \mathbf{M}_{n}$.
- Моменты $\mathbf{M}_{||}$ и $\mathbf{M}_{n}$ перпендикулярны оси вращения и их проекции на эту ось равны нулю. Момент силы $\mathbf{M}_{\tau}$ образует с ней угол β. Таким образом, проекция результирующего момента на ось Z равна:
- $M_z = M_{\tau z} = |\mathbf{M}_{\tau}| \cdot \cos(\beta) = r \cdot F_{\tau} \cdot \cos(\beta) = R \cdot F_{\tau}$.
- **момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело относительно данной оси.**
- Момент силы **M** относительно точки, в которой закреплено тело, характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он берется. Причем поворот произойдет вокруг оси, параллельной вектору момента сил **M**.
- **При вращательном движении силовое воздействие характеризуется моментом силы, а не силой.**

- *Момент инерции.* Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси называется величина, равная:
- $I = m \cdot r^2$, где **r** - кратчайшее расстояние от оси вращения до точки.
- Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции его частей:
- $I = \Sigma m_i \cdot r_i^2$
- Следовательно, момент инерции твердого тела зависит от:
- массы тела;
- формы и размеров тела;
- распределения массы относительно оси вращения (при переносе оси вращения или отдельных частей тела его момент инерции изменяется).

- ***Динамика вращательного движения материальной точки.*** **Рассмотрим частицу массы m, вращающуюся вокруг токи O по окружности радиуса R, под действием результирующей силы F. В инерциальной системе отсчета справедлив 2[ой] закон Ньютона. Запишем его применительно к произвольному моменту времени:**
- $F = m \cdot a$.
- **Нормальная составляющая силы не способна вызвать вращения тела, поэтому рассмотрим только действие ее тангенциальной составляющей. В проекции на тангенциальное направление уравнение движения примет вид:**
- $F_\tau = m \cdot \varepsilon \cdot R$.
- **Умножив левую и правую части уравнения скалярно на R, получим:**
- $F_\tau \cdot R = m \cdot \varepsilon \cdot R^2$ $M = I \cdot \varepsilon$.
- **Уравнение представляет собой 2[ой] закон Ньютона (уравнение динамики) для вращательного движения материальной точки. Ему можно придать векторный характер, учитывая, что наличие момента сил вызывает появление параллельного ему вектора углового ускорения, направленного вдоль оси вращения:**
- $M = I \cdot \varepsilon$.
- **Основной закон динамики материальной точки при вращательном движении можно сформулировать следующим образом:**
- **произведение момента инерции на угловое ускорение равно результирующему моменту сил, действующих на материальную точку.**



- *Закон динамики вращательного движения твердого тела.* **произведение момента инерции тела на его угловое ускорение равно суммарному моменту внешних сил, действующих на тело. Моменты сил и инерции берутся относительно оси, вокруг которой происходит вращение.**
- В случае движения тела относительно закрепленной оси необходимо спроецировать уравнение на эту ось.
- $M_z = I_z \cdot \varepsilon$.
- Из уравнения можно найти какое угловое ускорение относительно закрепленной оси приобретет тело под действием момента сил M_z.
- *Условия равновесия твердого тела.* Тело находится в равновесии, если оно не обладает ускорением поступательного и вращательного движений, т.е. выполняются следующие условия: **a** = 0, **ε** = 0. Очевидно, что это имеет место при равенстве нулю результирующей силы и суммарного момента внешних сил. Следовательно, в условии равновесия выполняются равенства: **F** = 0 и **M** = 0.



- Заметим, что равенство нулю результирующего вектора сил, действующих на тело, не обязательно обуславливает равенство нулю суммарного момента внешних сил. Типичным примером является момент пары сил, вызывающего движение тела с угловым ускорением. Расстояние между линиями продолжения сил l называется плечом пары. Момент пары сил равен:
- **$M = [R_{12} \cdot F]$,**
  где R_{12} - вектор расстояния между точками приложения сил.
- Абсолютное значение момента пары сил равно $|M| = l \cdot F$.