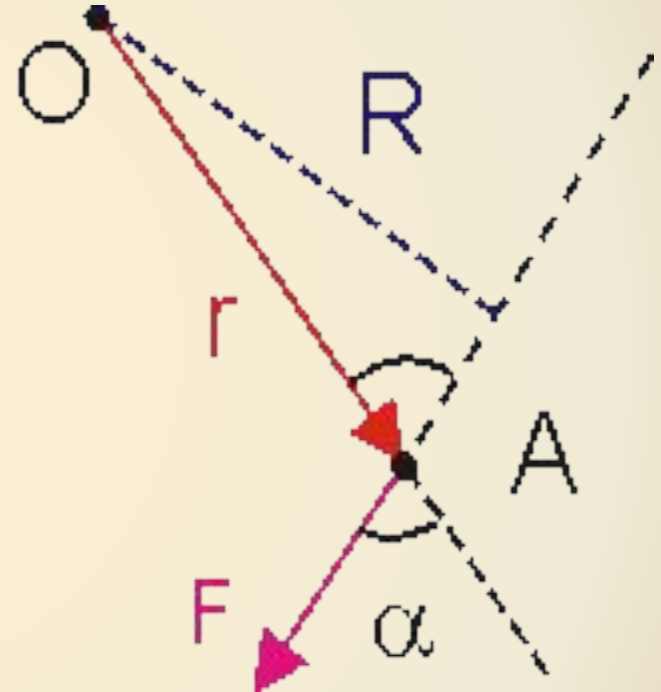


# Лекция 5

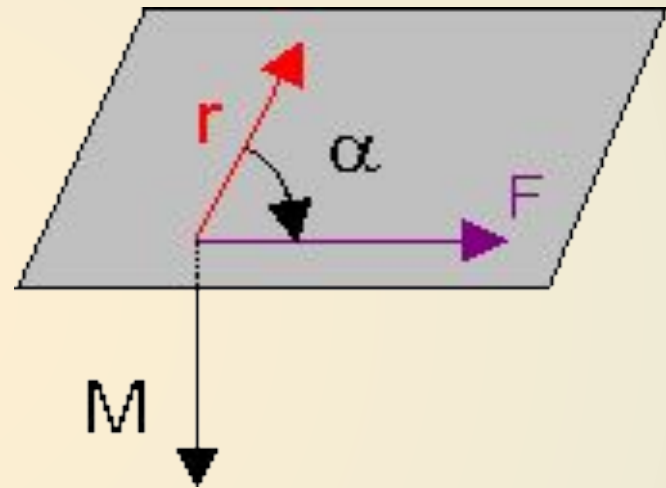
Динамика вращательного движения

## Особенности вращательного движения твердого тела под действием внешних сил.

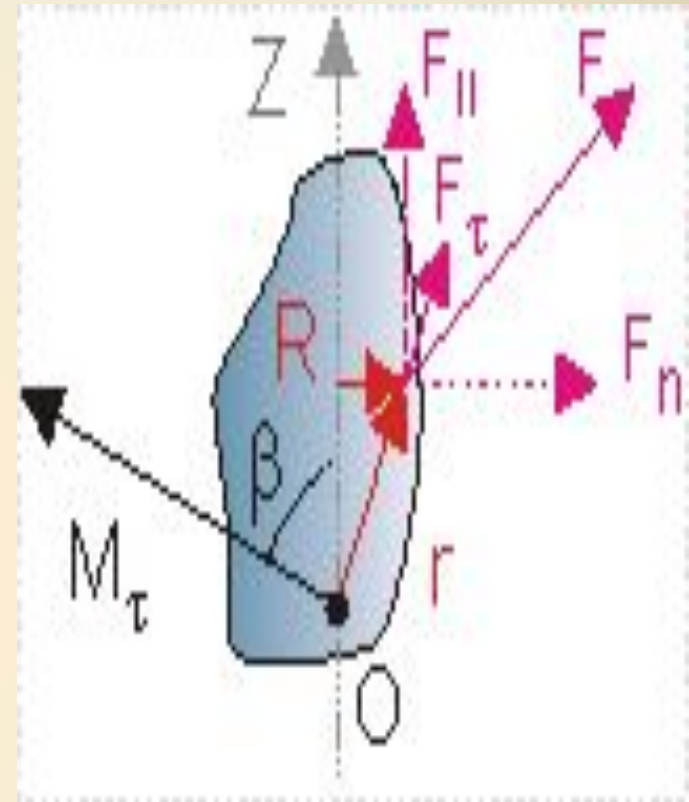
- Ускорение при вращательном движении зависит:
  - не только от массы тела, но и от ее распределения относительно оси вращения,
  - не только от силы, но и от точки ее приложения и направления действия.
- *Момент силы, действующей на материальную точку.* Пусть частица **A** движется произвольным образом относительно точки **O** под действием силы **F**. Моментом силы частицы относительно закрепленной точки называется величина, равная векторному произведению:
  - $M = [r \cdot F]$ ,  
где **r** - радиус вектор точки приложения силы **F**.



- Момент силы - векторная величина. Для нахождения ее направления вектора  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  необходимо изобразить исходящими из одной точки и связать с ними правый винт. Затем головку правого винта нужно вращать от  $\mathbf{r}$  к  $\mathbf{F}$ . Направление движения винта будет совпадать с вектором  $\mathbf{M}$ .
- Величина вектора момента сил равна:
- $M = r \cdot F \cdot \sin(\alpha) = F \cdot R$ , где  $R = r \cdot \sin(\alpha)$  - плечо силы, равное кратчайшему расстоянию между осью вращения и линией действия силы.



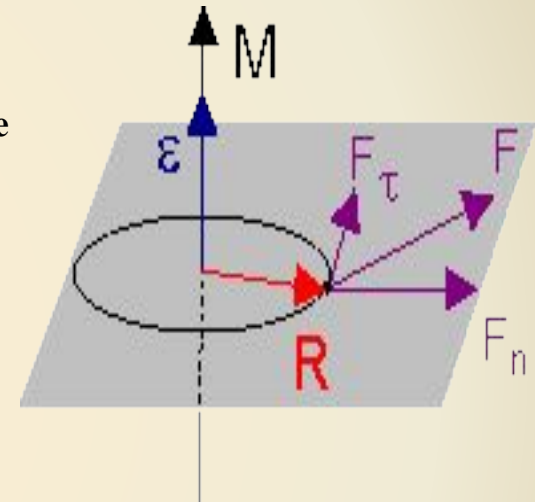
- **Момент силы относительно оси вращения.** Моментом силы относительно произвольной оси  $Z$ , проходящей через точку  $O$ , в которой закреплено твердое тело, называется величина, равная проекции вектора  $M$  на эту ось.
- $M_z = [r \cdot F]_z$ .
- Найдем значение момента сил для твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси  $Z$  под действием силы  $F$ . Разложим эту силу на три составляющие:
  - $F = F_{\parallel} + F_{\tau} + F_n$ ,
  - где  $F_{\parallel}$  - составляющая силы, параллельная оси вращения,  $F_{\tau}$  - тангенциальная составляющая силы, расположенная в плоскости вращения,  $F_n$  - нормальная составляющая силы, расположенная в плоскости вращения.



- Момент силы относительно точки  $O$  можно представить как векторную сумму моментов, созданных этими силами:
- $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\parallel} + \mathbf{M}_{\tau} + \mathbf{M}_{n}$ .
- Моменты  $\mathbf{M}_{\parallel}$  и  $\mathbf{M}_{n}$  перпендикулярны оси вращения и их проекции на эту ось равны нулю. Момент силы  $\mathbf{M}_{\tau}$  образует с ней угол  $\beta$ . Таким образом, проекция результирующего момента на ось  $Z$  равна:
- $M_z = M_{\tau z} = |\mathbf{M}_{\tau}| \cdot \cos(\beta) = r \cdot F_{\tau} \cdot \cos(\beta) = R \cdot F_{\tau}$ .
- **момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело относительно данной оси.**
- Момент силы  $\mathbf{M}$  относительно точки, в которой закреплено тело, характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он берется. Причем поворот произойдет вокруг оси, параллельной вектору момента сил  $\mathbf{M}$ .
- **При вращательном движении силовое воздействие характеризуется моментом силы, а не силой.**

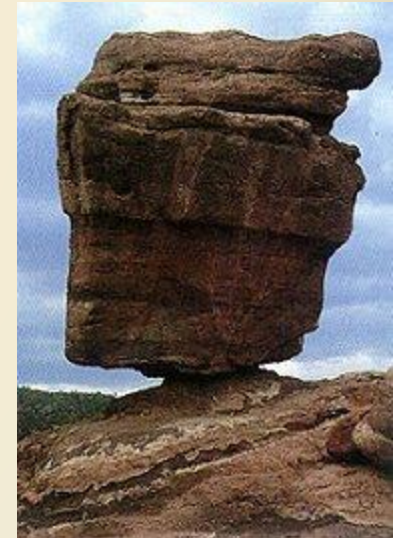
- *Момент инерции.* Моментом инерции материальной точки массы  $m$  относительно оси называется величина, равная:
- $I = m \cdot r^2$ , где  $r$  - кратчайшее расстояние от оси вращения до точки.
- Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции его частей:
- $I = \sum m_i \cdot r_i^2$
- Следовательно, момент инерции твердого тела зависит от:
- массы тела;
- формы и размеров тела;
- распределения массы относительно оси вращения (при переносе оси вращения или отдельных частей тела его момент инерции изменяется).

- **Динамика вращательного движения материальной точки.** Рассмотрим частицу массы  $m$ , вращающуюся вокруг точки  $O$  по окружности радиуса  $R$ , под действием результирующей силы  $F$ . В инерциальной системе отсчета справедлив 2<sup>ой</sup> закон Ньютона. Запишем его применительно к произвольному моменту времени:
  - $F = m \cdot a$ .
  - Нормальная составляющая силы не способна вызвать вращения тела, поэтому рассмотрим только действие ее тангенциальной составляющей. В проекции на тангенциальное направление уравнение движения примет вид:
    - $F_{\tau} = m \cdot \varepsilon \cdot R$ .
    - Умножив левую и правую части уравнения скалярно на  $R$ , получим:
      - $F_{\tau} \cdot R = m \cdot \varepsilon \cdot R^2 \quad M = I \cdot \varepsilon$ .
    - Уравнение представляет собой 2<sup>ой</sup> закон Ньютона (уравнение динамики) для **вращательного движения материальной точки**. Ему можно придать векторный характер, учитывая, что наличие момента сил вызывает появление параллельного ему вектора углового ускорения, направленного вдоль оси вращения:
      - $M = I \cdot \varepsilon$ .
    - Основной закон динамики материальной точки при вращательном движении можно сформулировать следующим образом:
      - произведение момента инерции на угловое ускорение равно результирующему моменту сил, действующих на материальную точку.





- *Закон динамики вращательного движения твердого тела.* произведение момента инерции тела на его угловое ускорение равно суммарному моменту внешних сил, действующих на тело. Моменты сил и инерции берутся относительно оси, вокруг которой происходит вращение.
- В случае движения тела относительно закрепленной оси необходимо спроецировать уравнение на эту ось.
- $M_z = I_z \cdot \varepsilon.$
- Из уравнения можно найти какое угловое ускорение относительно закрепленной оси приобретет тело под действием момента сил  $M_z.$
- *Условия равновесия твердого тела.* Тело находится в равновесии, если оно не обладает ускорением поступательного и вращательного движений, т.е. выполняются следующие условия:  $\mathbf{a} = 0, \varepsilon = 0.$  Очевидно, что это имеет место при равенстве нулю результирующей силы и суммарного момента внешних сил. Следовательно, в условии равновесия выполняются равенства:  $\mathbf{F} = 0$  и  $\mathbf{M} = 0.$





- Заметим, что равенство нулю результирующего вектора сил, действующих на тело, не обязательно обуславливает равенство нулю суммарного момента внешних сил. Типичным примером является момент пары сил, вызывающего движение тела с угловым ускорением. Расстояние между линиями продолжения сил  $l$  называется плечом пары. Момент пары сил равен:
- $M = [R_{12} \cdot F]$ ,  
где  $R_{12}$  - вектор расстояния между точками приложения сил.
- Абсолютное значение момента пары сил равно  $|M| = l \cdot F$ .

