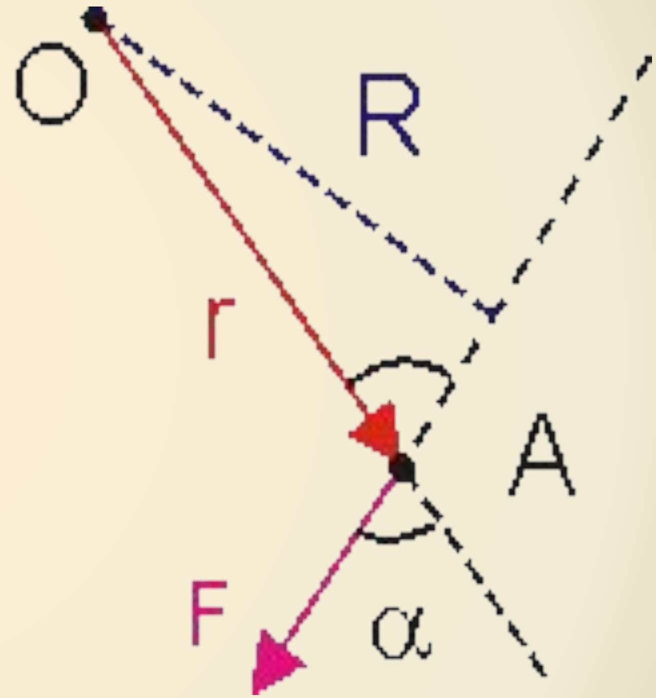
Лекция 5

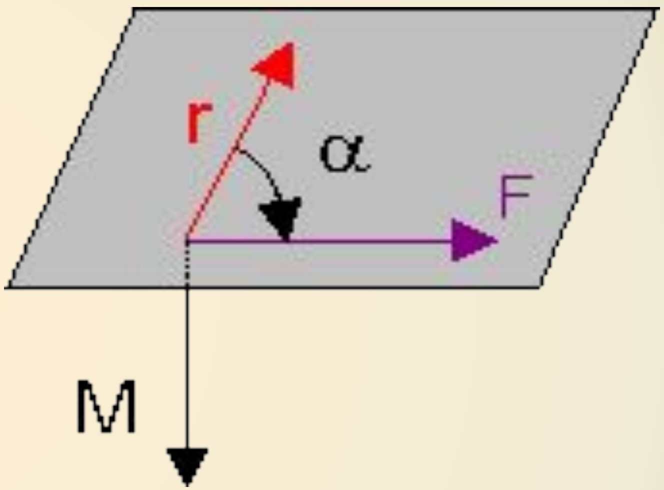
Динамика вращательного движения

Особенности вращательного движения твердого тела под действием внешних сил.

- Ускорение при вращательном движении зависит:
  - не только от массы тела, но и от ее распределения относительно оси вращения,
  - не только от силы, но и от точки ее приложения и направления действия.
- *Момент силы, действующей на материальную точку.* Пусть частица A движется произвольным образом относительно точки O под действием силы F . Моментом силы частицы относительно закрепленной точки называется величина, равная векторному произведению:
- $M = [r \cdot F]$,
  где r - радиус вектор точки приложения силы F.

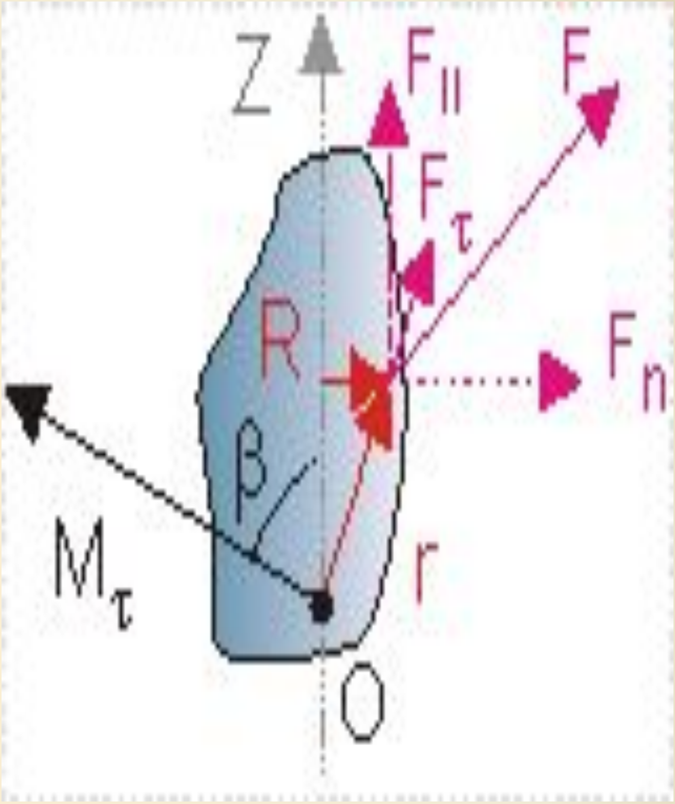


- Момент силы - векторная величина. Для нахождения ее направления вектора **r** и **F** необходимо изобразить исходящими из одной точки и связать с ними правый винт. Затем головку правого винта нужно вращать от **r** к **F**. Направление движения винта будет совпадать с вектором **M**.
- Величина вектора момента сил равна:
- $M = r \cdot F \cdot \sin(\alpha) = F \cdot R$, где $R = r \cdot \sin(\alpha)$ - плечо силы, равное кратчайшему расстоянию между осью вращения и линией действия силы.



- ***Момент силы относительно оси вращения.*** **Моментом силы относительно произвольной оси Z, проходящей через точку O, в которой закреплено твердое тело, называется величина, равная проекции вектора M на эту ось.**
- $\mathbf{M_z = [r \cdot F]_z}$.
- **Найдем значение момента сил для твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси Z под действием силы F. Разложим эту силу на три составляющие:**
- $\mathbf{F = F_{\parallel} + F_{\tau} + F_n}$,
- **где $F_{\parallel}$ - составляющая силы, параллельная оси вращения,**
  F_{τ} - тангенциальная составляющая силы, расположенная в плоскости вращения,
  F_n - нормальная составляющая силы,

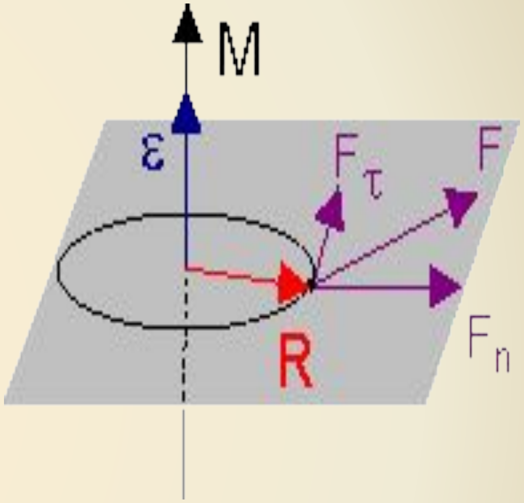
  расположенная в плоскости вращения.



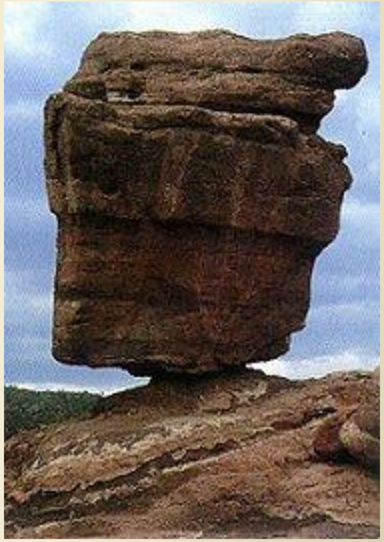
- Момент силы относительно точки O можно представить как векторную сумму моментов, созданных этими силами:
- $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{||} + \mathbf{M}_{\tau} + \mathbf{M}_{n}$.
- Моменты $\mathbf{M}_{||}$ и $\mathbf{M}_{n}$ перпендикулярны оси вращения и их проекции на эту ось равны нулю. Момент силы $\mathbf{M}_{\tau}$ образует с ней угол β. Таким образом, проекция результирующего момента на ось Z равна:
- $M_{z} = M_{\tau z} = |\mathbf{M}_{\tau}| \cdot \cos(\beta) = r \cdot F_{\tau} \cdot \cos(\beta) = R \cdot F_{\tau}$.
- **момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело относительно данной оси.**
- Момент силы **M** относительно точки, в которой закреплено тело, характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он берется. Причем поворот произойдет вокруг оси, параллельной вектору момента сил **M**.
- **При вращательном движении силовое воздействие характеризуется моментом силы, а не силой.**

- *Момент инерции.* Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси называется величина, равная:
- $I = m \cdot r^2$, где **r** - кратчайшее расстояние от оси вращения до точки.
- Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции его частей:
- $I = \Sigma m_i \cdot r_i^2$
- Следовательно, момент инерции твердого тела зависит от:
- массы тела;
- формы и размеров тела;
- распределения массы относительно оси вращения (при переносе оси вращения или отдельных частей тела его момент инерции изменяется).

- ***Динамика вращательного движения материальной точки.*** **Рассмотрим частицу массы m, вращающуюся вокруг токи O по окружности радиуса R, под действием результирующей силы F. В инерциальной системе отсчета справедлив 2ой закон Ньютона. Запишем его применительно к произвольному моменту времени:**
- $\mathbf{F = m \cdot a}$.
- **Нормальная составляющая силы не способна вызвать вращения тела, поэтому рассмотрим только действие ее тангенциальной составляющей. В проекции на тангенциальное направление уравнение движения примет вид:**
- $\mathbf{F_\tau = m \cdot \varepsilon \cdot R}$.
- **Умножив левую и правую части уравнения скалярно на R, получим:**
- $\mathbf{F_\tau \cdot R = m \cdot \varepsilon \cdot R^2}$ $\quad$ $\mathbf{M = I \cdot \varepsilon}$.
- **Уравнение представляет собой 2ой закон Ньютона (уравнение динамики) для вращательного движения материальной точки. Ему можно придать векторный характер, учитывая, что наличие момента сил вызывает появление параллельного ему вектора углового ускорения, направленного вдоль оси вращения:**
- $\mathbf{M = I \cdot \varepsilon}$.
- **Основной закон динамики материальной точки при вращательном движении можно сформулировать следующим образом:**
- **произведение момента инерции на угловое ускорение равно результирующему моменту сил, действующих на материальную точку.**



- *Закон динамики вращательного движения твердого тела.* **произведение момента инерции тела на его угловое ускорение равно суммарному моменту внешних сил, действующих на тело. Моменты сил и инерции берутся относительно оси, вокруг которой происходит вращение.**
- В случае движения тела относительно закрепленной оси необходимо спроецировать уравнение на эту ось.
- $M_z = I_z \cdot \varepsilon$.
- Из уравнения можно найти какое угловое ускорение относительно закрепленной оси приобретет тело под действием момента сил M_z.
- *Условия равновесия твердого тела.* Тело находится в равновесии, если оно не обладает ускорением поступательного и вращательного движений, т.е. выполняются следующие условия: $\mathbf{a} = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Очевидно, что это имеет место при равенстве нулю результирующей силы и суммарного момента внешних сил. Следовательно, в условии равновесия выполняются равенства: $\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{M} = 0$.



- Заметим, что равенство нулю результирующего вектора сил, действующих на тело, не обязательно обуславливает равенство нулю суммарного момента внешних сил. Типичным примером является момент пары сил, вызывающего движение тела с угловым ускорением. Расстояние между линиями продолжения сил l называется плечом пары. Момент пары сил равен:
- $M = [R_{12} \cdot F]$,
  где R_{12} - вектор расстояния между точками приложения сил.
- Абсолютное значение момента пары сил равно $|M| = l \cdot F$.