

13. ДИСПЕРСИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Дисперсия - это мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2]$$

Например, пусть случайная величина X задана рядом распределения:

| | | |
|-----|-----|-----|
| x | 0 | 1 |
| p | q | p |

Найдем математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

$$M[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = m_x$$

$$\begin{aligned} D[X] &= (0 - m_x)^2 \cdot q + (1 - m_x)^2 \cdot p = \\ &= (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = p^2 \cdot q + q^2 \cdot p = \\ &= p \cdot (1 - p) = pq \end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии часто используют другую формулу:

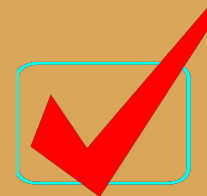
$$D[X] = M[X^2] - m_x^2$$

Доказательство:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2m_x X + m_x^2] =$$

Используем свойства математического ожидания:

$$\begin{aligned} &= M[X^2] - M[2m_x X] + M[m_x^2] = \\ &= M[X^2] - 2m_x \cdot M[X] + m_x^2 = \\ &= M[X^2] - 2m_x^2 + m_x^2 = M[X^2] - m_x^2 \end{aligned}$$



СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ



*Дисперсия от постоянной
величины*

равна нулю:

$$D[C]=0, \quad C=const$$

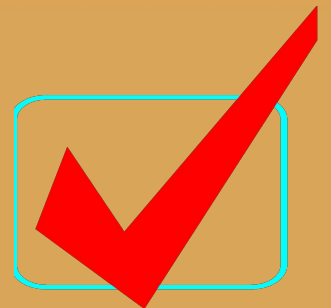
Доказательство:

Используем второе выражение для дисперсии. Так как

$$M[C]=C, \quad M[C^2]=C^2$$

то

$$D[C]=M[C^2]-(M[C])^2=C^2-C^2=0$$





*Дисперсия суммы случайной
величины X и постоянной
величины C равна дисперсии
величины X :
 $D[X+C]=D[X]$*

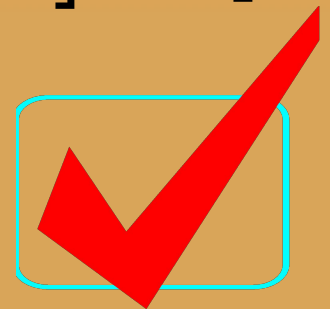
Доказательство:

По свойству математического ожидания:

$$M[X+C]=M[X]+C$$

Поэтому на основании определения дисперсии:

$$\begin{aligned} D[X+C] &= M\left[\left((X+C)-M[X+C]\right)^2\right]= \\ &= M\left[\left(X+C-m_x-C\right)^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=D[X] \end{aligned}$$





*Постоянная величина
выносится за знак дисперсии
в квадрате:
 $D[k X]=k^2 D[X]$*

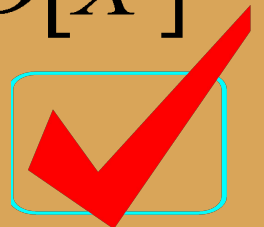
Доказательство:

Используем определение дисперсии:

$$D[k \cdot X] = M \left[((k \cdot X) - M[k \cdot X])^2 \right] =$$

По свойству математического ожидания:

$$\begin{aligned} &= k^2 \cdot M[X^2] - k^2 \cdot M^2[X] = \\ &= k^2 \cdot (M[X^2] - M^2[X]) = k^2 \cdot D[X] \end{aligned}$$





4

Дисперсия всегда неотрицательна:

$$D[X] \geq 0$$

5

Дисперсия суммы двух случайных величин находится по формуле:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}$$

*Величина K_{XY} называется
корреляционным моментом
случайных величин X и Y :*

$$K_{XY} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$$

Доказательство:

Распишем дисперсию суммы случайных величин по определению дисперсии:

$$D[X + Y] = M \left[\left((X + Y) - M(X + Y) \right)^2 \right] =$$

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий:

$$= M \left[\left((X + Y) - (m_x + m_y) \right)^2 \right] =$$

Перегруппируем слагаемые:

$$= M \left[\left((X - m_x) + (Y - m_y) \right)^2 \right] =$$

Под знаком математического ожидания раскрываем квадрат суммы:

$$= M \left[(X - m_x)^2 + 2(X - m_x)(Y - m_y) + (Y - m_y)^2 \right] =$$

Снова используем свойства математического ожидания:

$$= M[(X - m_x)^2] + 2M[(X - m_x)(Y - m_y)] + \\ + M[(Y - m_y)^2] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}$$



Корреляционный момент описывает взаимодействие двух случайных величин. Если случайные величины X и Y независимы, то их корреляционный момент равен 0. Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратичным отклонением:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sigma_x$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, а среднее квадратичное отклонение имеет размерность самой случайной величины.