

# 13. ДИСПЕРСИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

*Дисперсия - это мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания:*

$$D[X] = M[(X - m_x)^2]$$

Например, пусть случайная величина  $X$  задана рядом распределения:

$x$	$0$	$1$
$p$	$q$	$p$

Найдем математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

$$M[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = m_x$$

$$\begin{aligned} D[X] &= (0 - m_x)^2 \cdot q + (1 - m_x)^2 \cdot p = \\ &= (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = p^2 \cdot q + q^2 \cdot p = \\ &= p \cdot (1 - p) = pq \end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии часто используют другую формулу:

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2$$

# Доказательство:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2m_x X + m_x^2] =$$

**Используем свойства математического ожидания:**

$$\begin{aligned} &= M[X^2] - M[2m_x X] + M[m_x^2] = \\ &= M[X^2] - 2m_x \cdot M[X] + m_x^2 = \\ &= M[X^2] - 2m_x^2 + m_x^2 = M[X^2] - m_x^2 \end{aligned}$$



# *СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ*



*Дисперсия от постоянной  
величины*

*равна нулю:*

$$D[C]=0, \quad C=const$$

# Доказательство:

Используем второе выражение для дисперсии. Так как

$$M[C]=C, \quad M[C^2]=C^2$$

то

$$D[C]=M[C^2]-(M[C])^2=C^2-C^2=0$$





*Дисперсия суммы случайной  
величины  $X$  и постоянной  
величины  $C$  равна дисперсии  
величины  $X$  :  
 $D[X+C]=D[X]$*

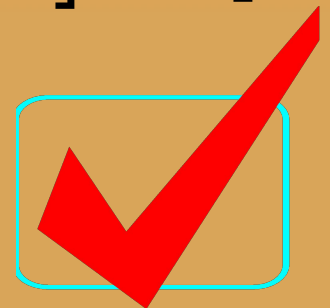
# Доказательство:

По свойству математического ожидания:

$$M[X+C]=M[X]+C$$

Поэтому на основании определения дисперсии:

$$\begin{aligned} D[X+C] &= M\left[\left((X+C)-M[X+C]\right)^2\right]= \\ &= M\left[\left(X+C-m_x-C\right)^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=D[X] \end{aligned}$$







*Постоянная величина  
выносится за знак дисперсии  
в квадрате:  
 $D[k X]=k^2 D[X]$*

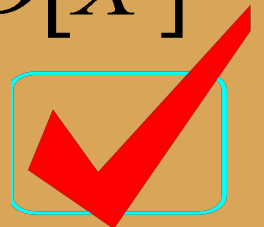
# Доказательство:

Используем определение дисперсии:

$$D[k \cdot X] = M \left[ ((k \cdot X) - M[k \cdot X])^2 \right] =$$

По свойству математического ожидания:

$$\begin{aligned} &= k^2 \cdot M[X^2] - k^2 \cdot M^2[X] = \\ &= k^2 \cdot (M[X^2] - M^2[X]) = k^2 \cdot D[X] \end{aligned}$$





4

*Дисперсия всегда неотрицательна:*

$$D[X] \geq 0$$

5

*Дисперсия суммы двух случайных величин находится по формуле:*

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}$$

*Величина  $K_{XY}$  называется  
корреляционным моментом  
случайных величин  $X$  и  $Y$ :*

$$K_{XY} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$$

# Доказательство:

Распишем дисперсию суммы случайных величин по определению дисперсии:

$$D[X + Y] = M \left[ \left( (X + Y) - M(X + Y) \right)^2 \right] =$$

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий:

$$= M \left[ \left( (X + Y) - (m_x + m_y) \right)^2 \right] =$$

**Перегруппируем слагаемые:**

$$= M \left[ \left( (X - m_x) + (Y - m_y) \right)^2 \right] =$$

**Под знаком математического ожидания раскрываем квадрат суммы:**

$$= M \left[ (X - m_x)^2 + 2(X - m_x)(Y - m_y) + (Y - m_y)^2 \right] =$$

**Снова используем свойства математического ожидания:**

$$= M[(X - m_x)^2] + 2M[(X - m_x)(Y - m_y)] + \\ + M[(Y - m_y)^2] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}$$



**Корреляционный момент** описывает взаимодействие двух случайных величин. Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то их корреляционный момент равен 0. Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратичным отклонением:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sigma_x$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, а среднее квадратичное отклонение имеет размерность самой случайной величины.