Дивергенция векторного поля

Заряды – это источники векторного поля.

Дивергенция – локальная характеристика

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_E}{\Delta V}$$

Дивергенция равна потоку, приходящемуся на единицу объёма.

В декартовых координатах:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Зная, что

$$\left.\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\\ \vec{E} &= E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\end{aligned}\right\},$$

Оператор "набла"

запишем

$$\operatorname{div}\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E}$$

Произведение оператора набла на скалярную функцию координат дает градиент

$$\nabla \varphi = grad \varphi$$

Скалярное произведение оператора набла на векторную функцию координат дает дивергенцию

$$\nabla \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}$$

Градиент – это вектор, а дивергенция – скалярная величина.

Теорема Гаусса в локальной форме

Возьмем малый объем dV, ограниченный малой dS. Пусть в нем содержится заряд dq

По теореме Гаусса поток через dS равен $\frac{dq}{\varepsilon_0}$. Тогда

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_E}{\Delta V} = \frac{dq}{\varepsilon_0 \cdot dV} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

или

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Это локальная (дифференциальная) форма теоремы Гаусса