

Электрические цепи и теория графов (законы Кирхгофа)

В 1847 году Кирхгоф разработал теорию деревьев для решения совместной системы линейных алгебраических уравнений, позволяющую найти значение силы тока в каждом проводнике (дуге) и в каждом контуре рассматриваемой электрической цепи. Будучи физиком по образованию, он подходил к решению задач как математик. Абстрагируясь от электрических схем и цепей, которые содержат сопротивления, конденсаторы, индуктивности и т.д., он рассматривал соответствующие комбинаторные структуры, содержащие только вершины и связи (ребра и дуги), причем для связей не нужно указывать, каким типам электрических элементов они соответствуют. Таким образом, в действительности Кирхгоф заменил каждую электрическую цепь соответствующим ей графом и показал, что для решения системы уравнений необязательно рассматривать в отдельности каждый цикл графа электрической цепи. Вместо этого он предложил простую, но эффективную методику (ставшую позднее стандартной процедурой), в соответствии с которой достаточно ограничиться только независимыми простыми циклами графа определяемыми любым из его «остовных деревьев»

Электрическая цепь N , соответствующий ей граф G и остовное дерево T

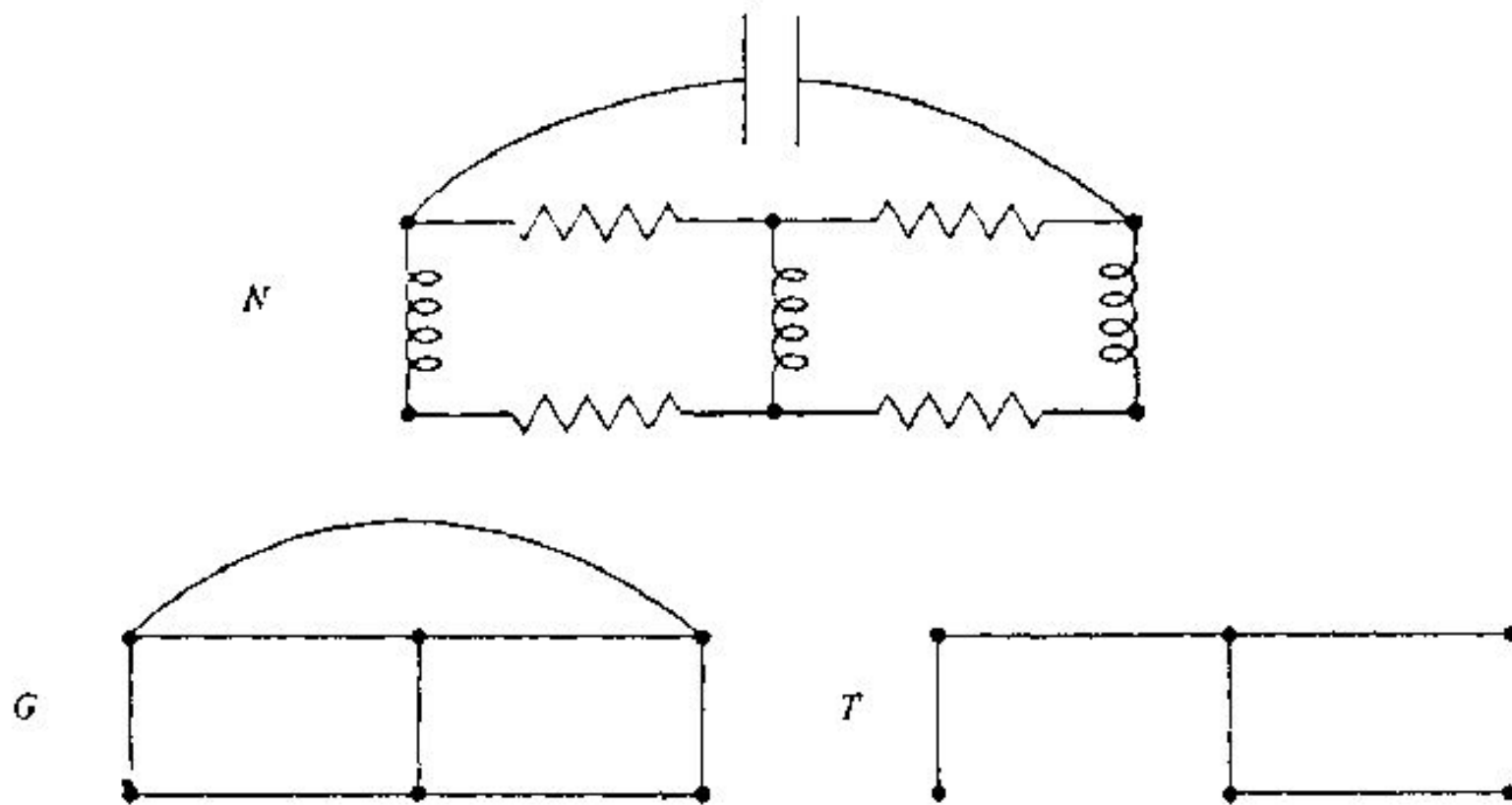


Рис 1.3. Сеть N соответствующий ей граф G и остов T

Правила Кирхгофа — соотношения, которые выполняются между токами и напряжениями на участках любой электрической цепи. Правила Кирхгофа позволяют рассчитывать любые электрические цепи постоянного, переменного и квазистационарного тока. Имеют особое значение в электротехнике из-за своей универсальности, так как пригодны для решения многих задач в теории электрических цепей и практических расчётов сложных электрических цепей. Применение правил Кирхгофа к линейной электрической цепи позволяет получить систему линейных уравнений относительно токов или напряжений, и соответственно, найти значение токов на всех ветвях цепи и все межузловые напряжения. Сформулированы Густавом Кирхгофом в 1845 году.

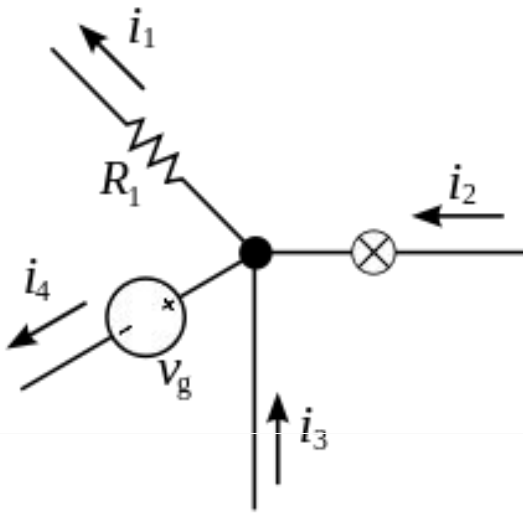
Для формулировки правил Кирхгофа вводятся понятия **узел**, **ветвь** и **контур** электрической цепи.

Ветвью называют любой двухполюсник, входящий в цепь.

Узлом называют точку соединения трех и более ветвей.

Контур — замкнутый цикл из ветвей. Термин **замкнутый цикл** означает, что, начав с некоторого узла цепи и **однократно** пройдя по нескольким ветвям и узлам, можно вернуться в исходный узел. Ветви и узлы, проходимые при таком обходе, принято называть принадлежащими данному контуру. При этом нужно иметь в виду, что ветвь и узел могут принадлежать одновременно нескольким контурам.

Первое правило



Сколько тока втекает в узел, столько из него и вытекает. $i_2 + i_3 = i_1 + i_4$

Первое правило Кирхгофа (правило токов Кирхгофа) гласит, что алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю. При этом втекающий в узел ток принято считать положительным, а вытекающий — отрицательным:

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0.$$

Это правило следует из фундаментального закона сохранения заряда.

Второе правило

Второе правило Кирхгофа (правило напряжений Кирхгофа) гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равна алгебраической сумме ЭДС ветвей этого контура. Если в контуре нет источников ЭДС (идеализированных генераторов напряжения), то суммарное падение напряжений равно нулю:

Для постоянных напряжений
$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^m U_k = \sum_{k=1}^m R_k I_k;$$

Для переменных напряжений
$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^m u_k = \sum_{k=1}^m R_k i_k + \sum_{k=1}^m u_{Lk} + \sum_{k=1}^m u_{Ck}.$$

Это правило вытекает из 3-го уравнения Максвелла, в частном случае стационарного магнитного поля.

Иными словами, при полном обходе контура потенциал, изменяясь, возвращается к исходному значению. Частным случаем второго правила для цепи, состоящей из одного контура, является закон Ома для этой цепи. При составлении уравнения напряжений для контура нужно выбрать положительное направление обхода контура. При этом падение напряжения на ветви считают положительным, если направление обхода данной ветви совпадает с ранее выбранным направлением тока ветви, и отрицательным — в противном случае

Особенности составления уравнений для расчёта токов и напряжений

Если цепь содержит p узлов, то она описывается $(p - 1)$ уравнениями токов. Если цепь содержит m ветвей, из которых содержат источники тока ветви в количестве m_i , то она описывается $m - m_i - (p - 1)$ уравнениями напряжений.

- Правила Кирхгофа, записанные для $(p - 1)$ узлов или $m - (p - 1)$ контуров цепи, дают полную систему линейных уравнений, которая позволяет найти все токи и все напряжения.
- Перед тем, как составить уравнения, нужно произвольно выбрать:
 1. положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме, при этом не обязательно следить, чтобы в узле направления токов были и втекающими, и вытекающими, окончательное решение системы уравнений всё равно даст правильные знаки токов узла;
 2. положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону, с целью единообразия рекомендуется для всех контуров положительные направления обхода выбирать одинаковыми (напр.: по часовой стрелке).
- Если направление тока совпадает с направлением обхода контура (которое выбирается произвольно), падение напряжения считается положительным, в противном случае — отрицательным.

- При записи линейно независимых уравнений по второму правилу Кирхгофа стремятся, чтобы в каждый новый контур, для которого составляют уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры, для которых уже записаны уравнения по второму закону (достаточное, но не необходимое условие).
- В сложных непланарных графах электрических цепей человеку трудно увидеть независимые контуры и узлы, каждый независимый контур (узел) при составлении системы уравнений порождает ещё 1 линейное уравнение в определяющей задаче системе линейных уравнений.

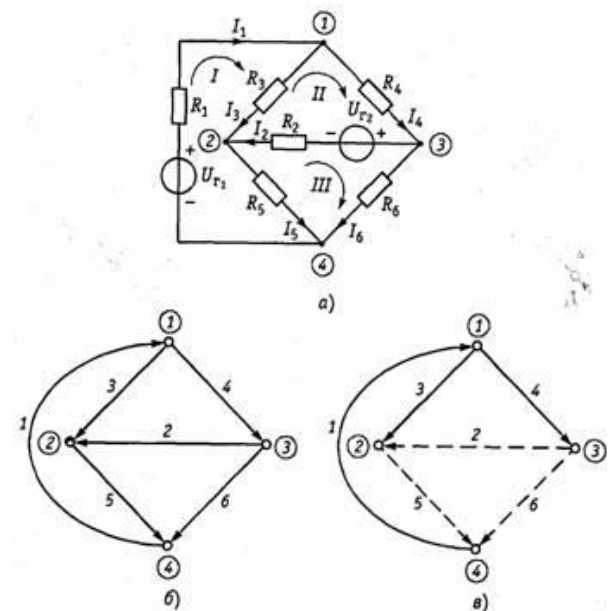


Рис. 2.1

Пример:

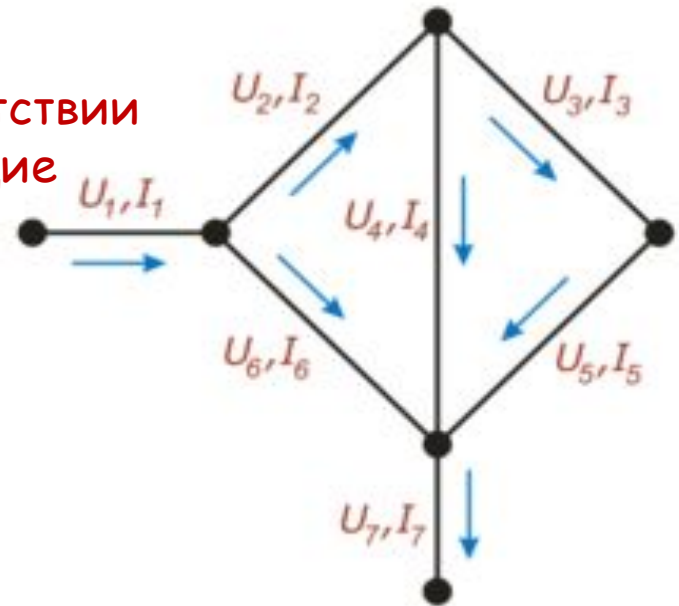
Количество узлов = 3 \Rightarrow $p - 1 = 2$;

Количество ветвей (в замкнутых контурах) = 4; количество ветвей, содержащих источник тока = 0 \Rightarrow $m - m_i - (p - 1) = 2$;

Количество контуров = 2.

Для приведённой на рисунке цепи, в соответствии с первым правилом, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_6 = 0 \\ I_2 - I_4 - I_3 = 0 \end{cases}$$

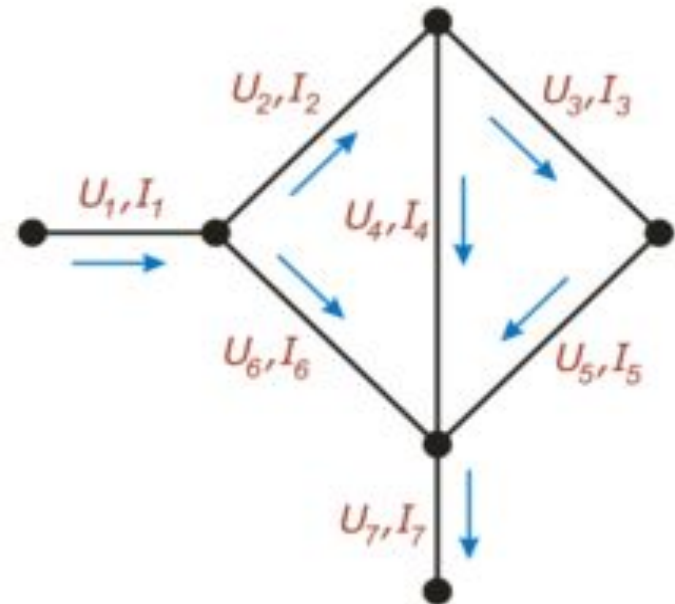


Обратите внимание, что для каждого узла должно быть выбрано положительное направление, например, здесь токи, втекающие в узел, считаются положительными, а вытекающие — отрицательными.

Решение полученной линейной системы алгебраических уравнений позволяет определить все токи узлов и ветвей, такой подход к анализу цепи принято называть *методом контурных токов*.

В соответствии со вторым правилом, справедливы соотношения:

$$\begin{cases} U_2 + U_4 - U_6 = 0 \\ U_3 + U_5 - U_4 = 0 \end{cases}$$



Полученная система уравнений полностью описывает анализируемую цепь, и её решение определяет все токи и все напряжения ветвей, такой подход к анализу цепи принято называть *методом узловых потенциалов*.