

## Лекция 4

# Модуль I. Электрические цепи Электрические цепи синусоидального тока (продолжение).

# Содержание



1. Действующее и среднее значения синусоидальной величины.
2. Идеальные элементы в цепи синусоидального тока

# 1. Действующее и среднее значения синусоидальной величины.

**Действующее значение** синусоидального тока численно равно постоянному току, который за время периода  $T$  выделяет в резистивном элементе с сопротивлением  $R$  такое же количество тепла ( $Q_{\sim}$ ), как и ток синусоидальный ( $Q_{\sim}$ ).

$$Q_{\sim} = Q_{\sim}$$

$$Q_{\sim} = \int_0^T Ri^2 dt = \int_0^T RI_m^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} RI_m^2 T$$

$$Q_{\sim} = RI^2 T$$



# 1. Действующее и среднее значения синусоидальной величины (продолжение).

$$RI^2T = \frac{1}{2}RI_m^2T \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$
$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

**Средним значением** синусоидального тока ( $I_{cp}$ ) называют его среднеарифметическое значение за положительный полупериод

$$I_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t) dt = \frac{2I_m}{\pi}$$



## 2. Идеальные элементы в цепи синусоидального тока

### Идеальный резистор в цепи синусоидального тока

Необходимо определить соотношение между синусоидальными током и напряжением по величине и по фазе.

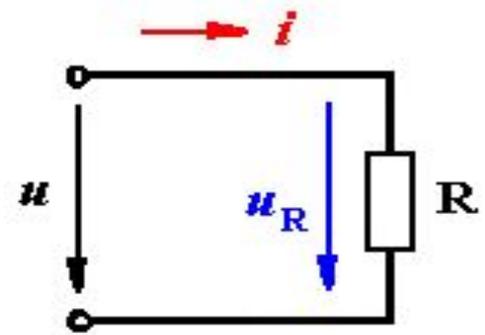
$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

По закону Ома для мгновенных значений

$$i = \frac{u_R}{R}$$

По второму закону Кирхгофа для заданной цепи:

$$u_R = u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$



## Идеальный резистор в цепи синусоидального тока (продолжение)

Тогда ток в цепи

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

- в рассматриваемой цепи устанавливается синусоидальный ток с амплитудой

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

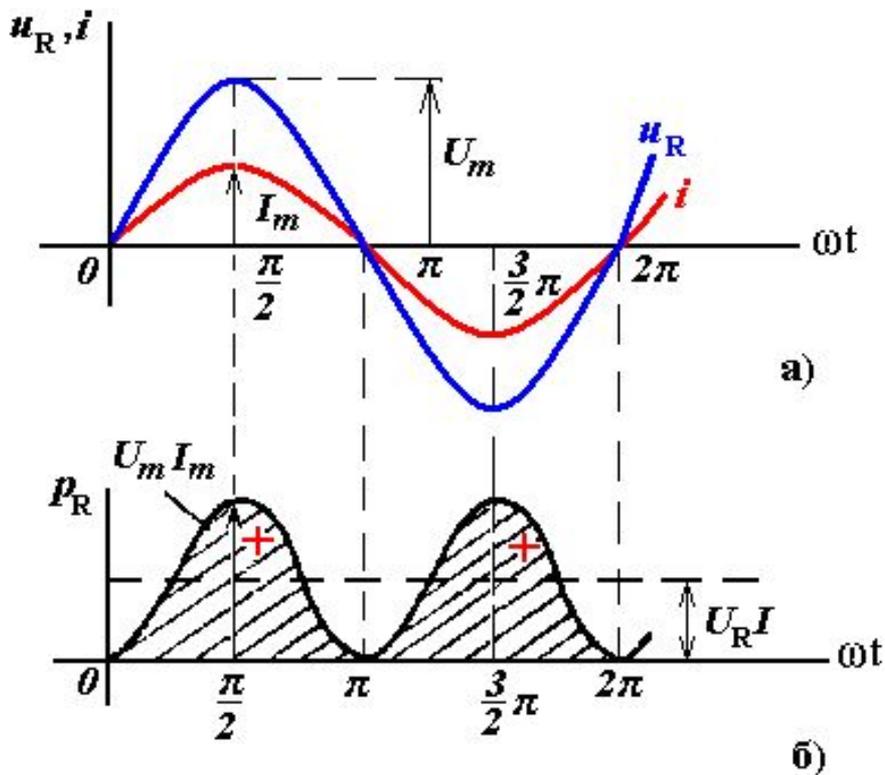
и действующим значением

$$I = \frac{U_R}{R}$$

- начальная фаза тока равна начальной фазе напряжения  $\psi_i = \psi_u$ , при этом разность фаз,  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$  — есть напряжение и ток, в резистивном элементе совпадают по фазе.



## Идеальный резистор в цепи синусоидального тока (продолжение)



При графическом изображении временными диаграммами синусоиды напряжения  $u_R(t)$  и тока  $i(t)$  – подобны. На рисунке показаны временные диаграммы тока и напряжения при начальной фазе, равной нулю ( $\psi_i = \psi_u = 0$ ).

Графики изменения во времени мгновенных значений  $u_R, i, p_R$



## Идеальный резистор в цепи синусоидального тока (продолжение)

При аналитическом изображении комплексными числами с учетом действующих значений комплексное напряжение имеет вид:

$$\underline{U}_R = U_R e^{j\psi_u}$$

Комплексный ток:

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i}$$

Закон Ома в комплексной форме для идеального резистивного элемента в цепи синусоидального тока: комплексный ток прямо пропорционален комплексному напряжению и обратно пропорционален сопротивлению резистора.

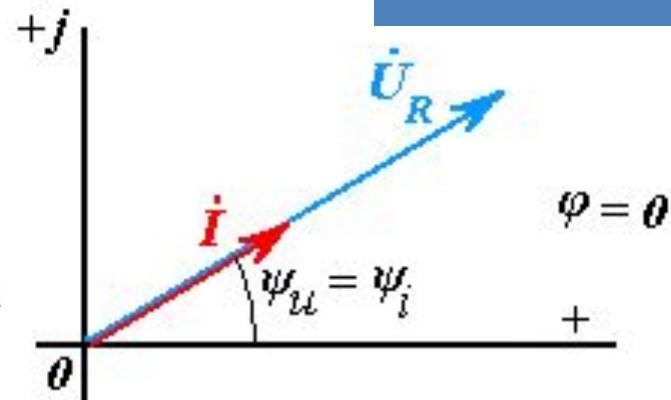
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_R}{R}$$



## Идеальный резистор в цепи синусоидального тока (продолжение)

[Подробнее](#)

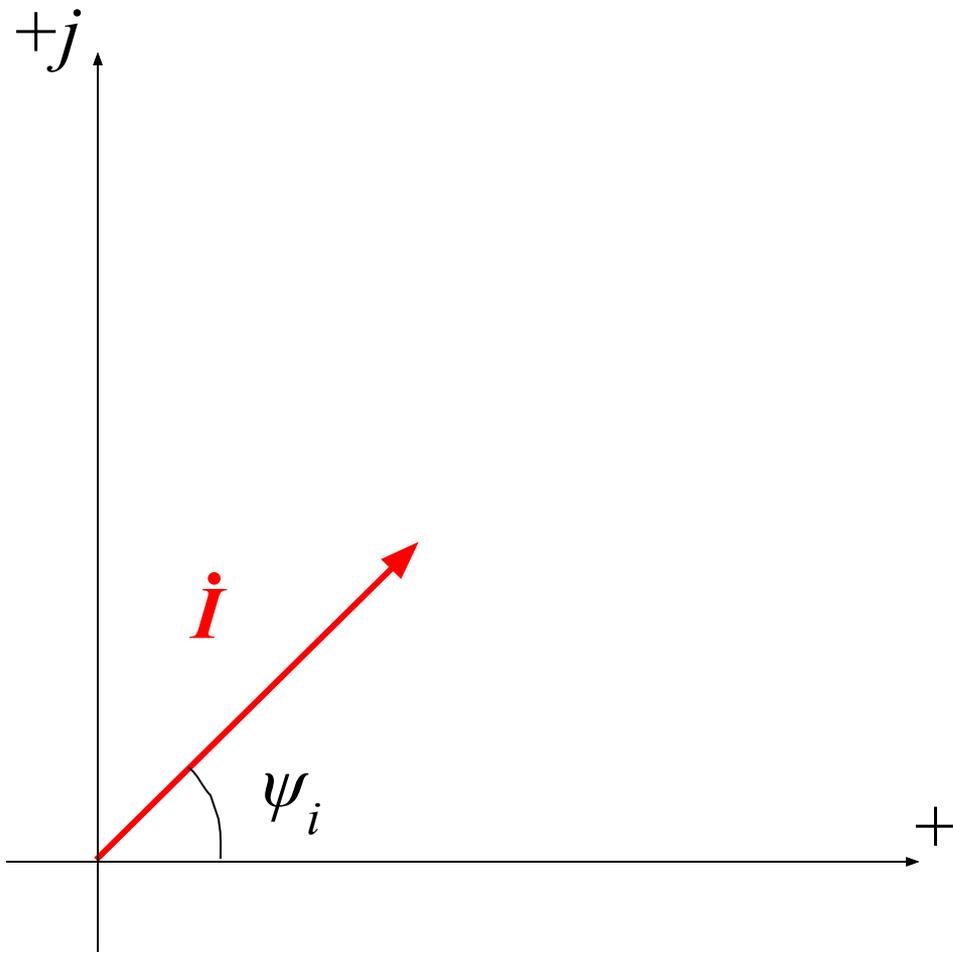
- На векторной диаграмме векторы тока и напряжения направлены одинаково. При изменении начальной фазы напряжения оба вектора повернутся на соответствующий угол.

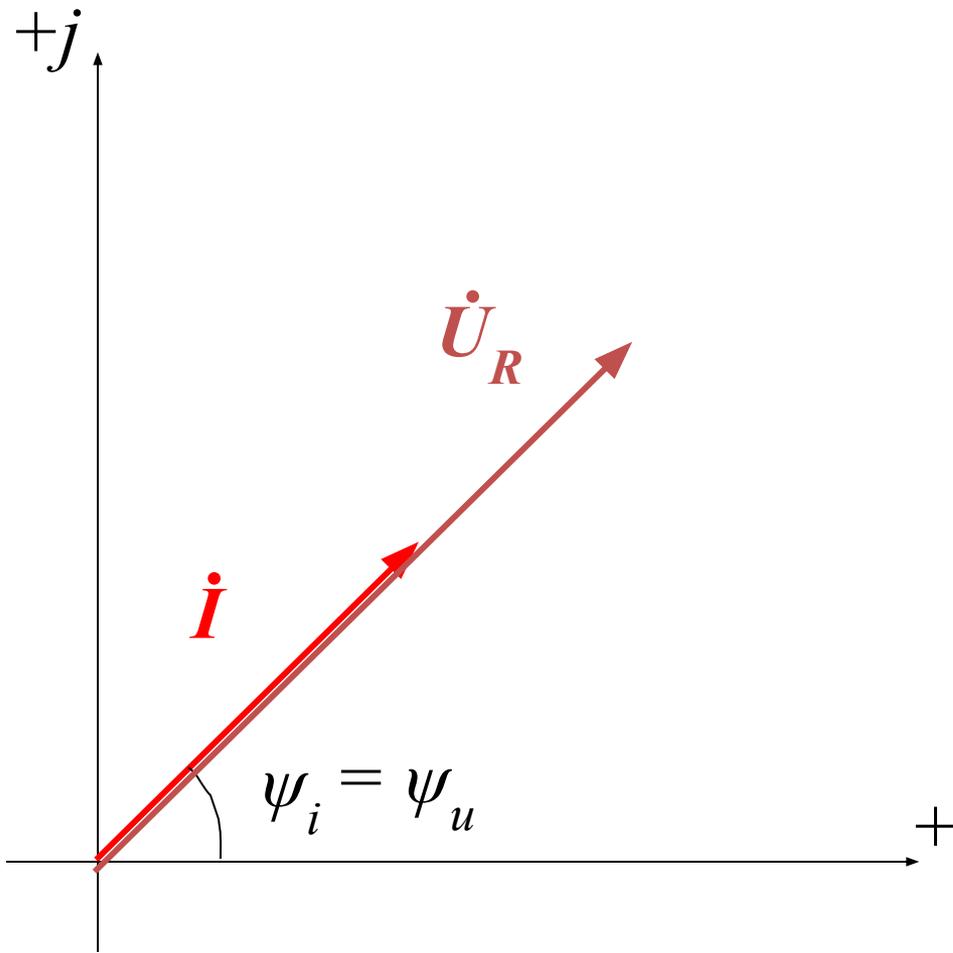


Взаимное относительное направление векторов не меняется: они совпадают по направлению.

- Угол между векторами напряжения и тока на векторной диаграмме определяет разность фаз  $\varphi$ . В частности в резисторе  $\varphi = 0$ .







## Идеальный резистор в цепи синусоидального тока (продолжение)

Мгновенное значение мощности в любом элементе  
электрической цепи

$$p = u_R \cdot i.$$

Примем начальную фазу, равной нулю ( $\psi_i = \psi_u = 0$ ).

$$p_R = u_R i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t$$

Перейдя к действующим значениям напряжения и тока

$$U_R = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_R = U_R I - U_R I \cos 2\omega t$$

Полученное выражение описывает характер изменения  
мощности в идеальном резисторе.



## Идеальный резистор в цепи синусоидального тока (продолжение)

- В цепи с идеальным резистивным элементом мгновенная мощность изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой вокруг среднего значения
- В течение всего периода мощность остается положительной. Это значит, что независимо от направления тока электрическая энергия всегда поступает от источника в идеальный резистивный элемент и **необратимо** преобразуется в другие виды энергии, совершая полезную работу.
- Электрическая энергия в этом случае называется **активной**.



## Идеальный резистор в цепи синусоидального тока (продолжение)

Среднее за период значение мощности называется **активной мощностью** и обозначается  $P$ :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt = \frac{U_m I_m}{2} = U_R I \quad \text{или} \quad P = U_R I = RI^2 = \frac{U_R^2}{I}$$

Единицы активной мощности  $P$  – Вт, кВт, МВт.

Сопротивление

$$R = \frac{P}{I^2}$$

называется **активным сопротивлением** в цепи синусоидального тока

Единицы активного сопротивления  $R$  – Ом, кОм.



## Заключение

1. Использование *разных способов изображения* синусоидальных величин позволяет выполнять расчет и анализ электрических цепей синусоидального тока с учетом их особенностей. Использование того или иного способа определяется особенностями решаемой задачи.
2. Энергетическое действие синусоидального тока определяется его *действующим значением*. При расчете и анализе цепи синусоидального тока в комплексном виде и на векторной диаграмме в качестве параметра, определяющего величину тока и напряжения, используют их действующие значения. Соотношение действующего значения тока (напряжения) и его амплитуды:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

## Заключение

3. Соотношение между током и напряжением *идеального резистора* в цепи синусоидального тока *по величине и по фазе*:

$$I_R = \frac{U_R}{R}, \quad \psi_u = \psi_i$$

Ток и напряжение резистора совпадают по фазе, т.е. разность фаз равна  $\varphi = 0$ .

Соотношение комплексных тока и напряжения на идеальном резисторе:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R}.$$

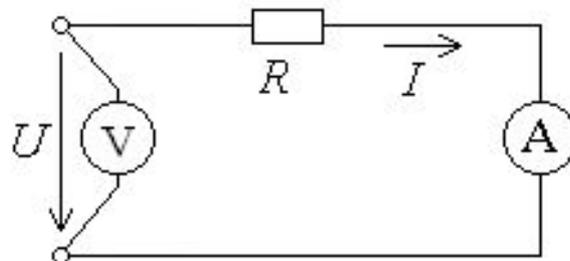
На векторной диаграмме векторы, изображающие ток и напряжение идеального резистора, направлены одинаково.

Интенсивность энергетических процессов в идеальном резисторе характеризуется *активной мощностью*  $P$ , определяемой действующими значениями тока и напряжения резистора или действующим значением тока и сопротивлением:  $P = U_R I = RI^2$

## Контрольные вопросы

**Определить ток для цепи синусоидального тока, показанной на схеме ( $R=3 \text{ Ом}$ ,  $f=50 \text{ Гц}$ , комплексное напряжение  $\underline{U} = 100e^{j30^\circ} \text{ В}$**

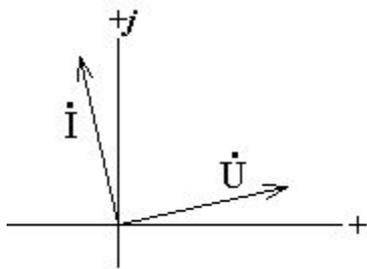
**Записать комплексный ток, определить показания вольтметра, амперметра. Определить активную мощность резистора**



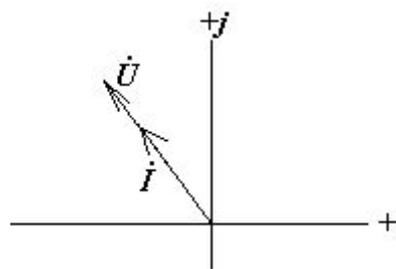
Комплексный ток	Показание вольтметра	Показание амперметра	Активная мощность
$\underline{I} = 33,3e^{j0^\circ}$	$U = 100 \text{ В};$	$I = 33,3 \text{ А};$	$P = 3333 \text{ Вт}$
$\underline{I} = 300,0e^{j30^\circ}$	$U = 142 \text{ В};$	$I = 300,0 \text{ А};$	$P = 111089 \text{ Вт}$
$\underline{I} = 33,3e^{j30^\circ}$	$U = 70,7 \text{ В};$	$I = 47,0 \text{ А}.$	$P = 30000 \text{ Вт}$

## Контрольные вопросы

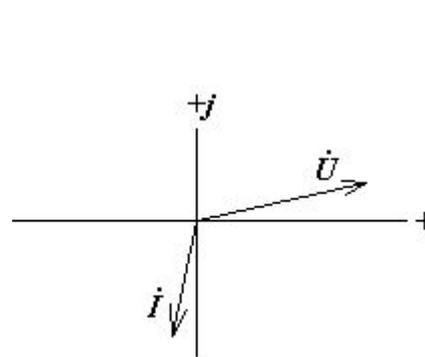
Указать векторную диаграмму для идеального резистора:



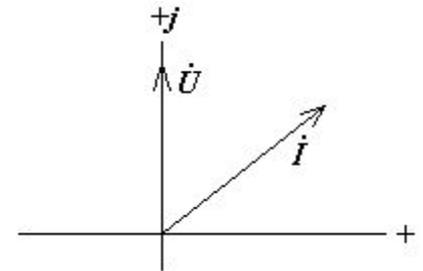
а



б



в



г

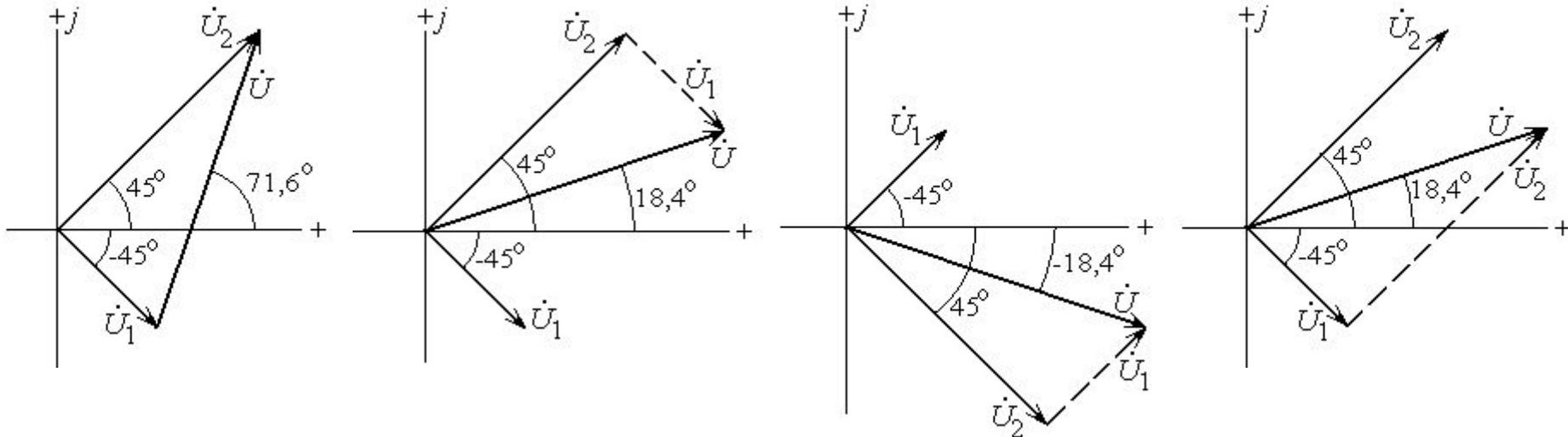
## Контрольные вопросы

На рисунке изображена схема электрической цепи синусоидального тока  
Заданы напряжения на двух участках этой цепи:

$$u_1 = 71 \sin(\omega t - 45^\circ)$$

$$u_2 = 142 \sin(\omega t + 45^\circ)$$

Пользуясь векторной диаграммой, определить полное напряжение цепи  
(указать верно построенную векторную диаграмму).



## Контрольные вопросы

**На рисунке изображена схема электрической цепи синусоидального тока  
Заданы напряжения на двух участках этой цепи:**

$$u_1 = 71 \sin(\omega t - 45^\circ) \quad u_2 = 142 \sin(\omega t + 45^\circ)$$

**Рассчитать полное напряжение цепи в комплексном виде (указать  
верное значение).**

**Определить показания вольтметра (указать верное значение).**

Комплексное значение напряжения	Показание вольтметра
$\underline{U} = 150e^{j0^\circ}$	$U = 150 \text{ В};$ $U = 75 \text{ В};$ $U = 213 \text{ В};$ $U = 112 \text{ В};$ $U = 142 \text{ В};$ $U = 159 \text{ В};$
$\underline{U} = 75e^{j0^\circ}$	
$\underline{U} = 112e^{j18,4^\circ}$	
$\underline{U} = 112e^{j71,6^\circ}$	
$\underline{U} = 50e^{j18,4^\circ}$	
$\underline{U} = 112e^{-j18,4^\circ}$	
$\underline{U} = 159e^{j18,4^\circ}$	