

Лекция 5

Модуль I.

Электрические цепи

Электрические цепи синусоидального тока (продолжение).

Содержание

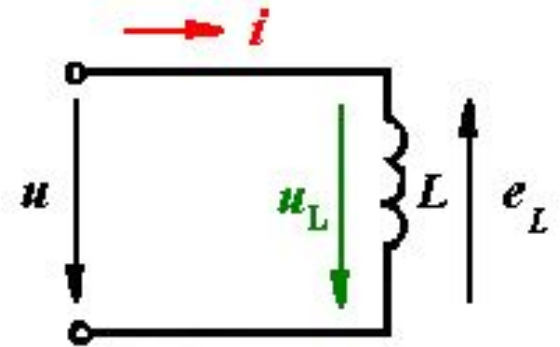


1. Идеальные элементы в цепи синусоидального тока (продолжение)
 - Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока.
 - Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока.

Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока.

Необходимо определить соотношение между синусоидальными током и напряжением по величине и по фазе.

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$



Синусоидальный ток создает переменное магнитное поле, которое, наводит в индуктивном элементе ЭДС самоиндукции.

$$e = L di/dt$$

На основании второго закона Кирхгофа для рассматриваемой цепи можно записать:

$$u = u_L = e = L \frac{di}{dt}$$

$$u = u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_m \sin(\omega t + \psi_i)) =$$



Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

$$= L\omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = L\omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

или
$$u = u_L = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

- напряжение на индуктивном элементе изменяется по синусоидальному закону с амплитудой $U_m = L\omega I_m$ и действующим значением $U_L = L\omega I$
- начальная фаза напряжения больше начальной фазы тока на $\pi/2$, при этом разность фаз, определяемая выражением

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \left(\psi_i + \frac{\pi}{2}\right) - \psi_i = \frac{\pi}{2}$$

Напряжение на индуктивном элементе опережает ток по фазе на угол $\varphi = \pi/2$.



Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L}$$

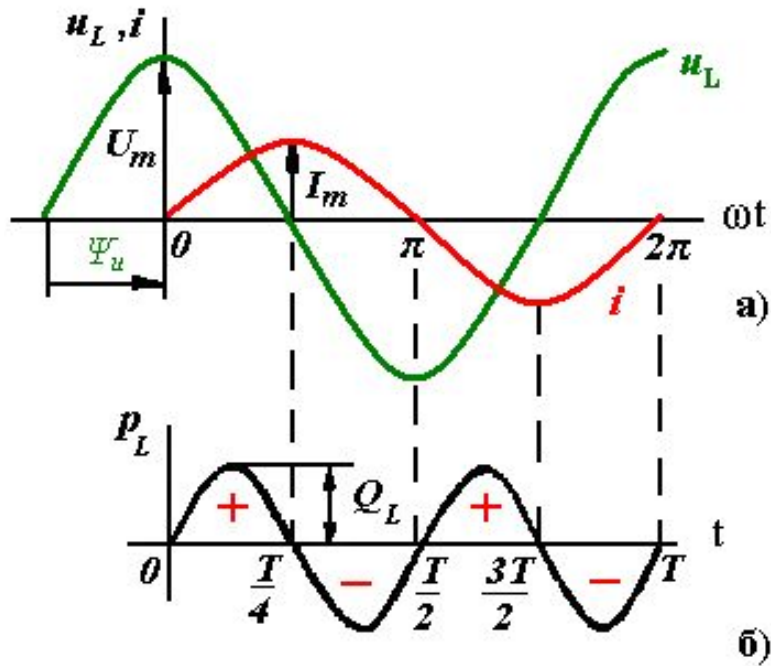
где величина $X_L = \omega L = 2\pi fL$ называется индуктивным сопротивлением.

Единица индуктивного сопротивления – Ом.

Соотношение по величине между током и напряжением индуктивного элемента определяется законом Ома :
действующее значение тока индуктивного элемента прямо пропорционально действующему значению напряжения и обратно пропорционально индуктивному сопротивлению.



Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).



Графики изменения во времени мгновенных значений u_L, i, p_L

При графическом изображении временными диаграммами синусоида напряжения $u_L(t)$ сдвинута относительно синусоиды тока $i(t)$ в сторону опережения на угол $\varphi = \pi/2$. На рисунке показаны временные диаграммы тока и напряжения при начальной фазе тока, равной нулю ($\psi_i = 0$).



Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

При аналитическом изображении комплексными числами с учетом действующих значений комплексное напряжение имеет вид:

$$\underline{U}_L = U_L e^{j\psi_u}$$

Комплексный ток:

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i}$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{I}} = \frac{U_L e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U_L}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = X_L \cdot e^{j\varphi} = X_L \cdot e^{j\pi/2} = jX_L = \underline{X}_L$$

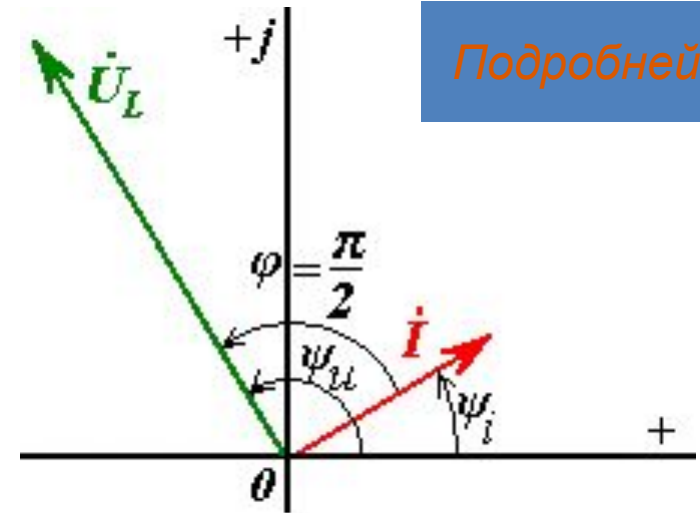
Закон Ома в комплексной форме: $\underline{I} = \frac{\underline{U}_L}{\underline{X}_L}$

Здесь $\underline{X}_L = X_L \cdot e^{j\pi/2} = jX_L$ — комплексное индуктивное сопротивление.



Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

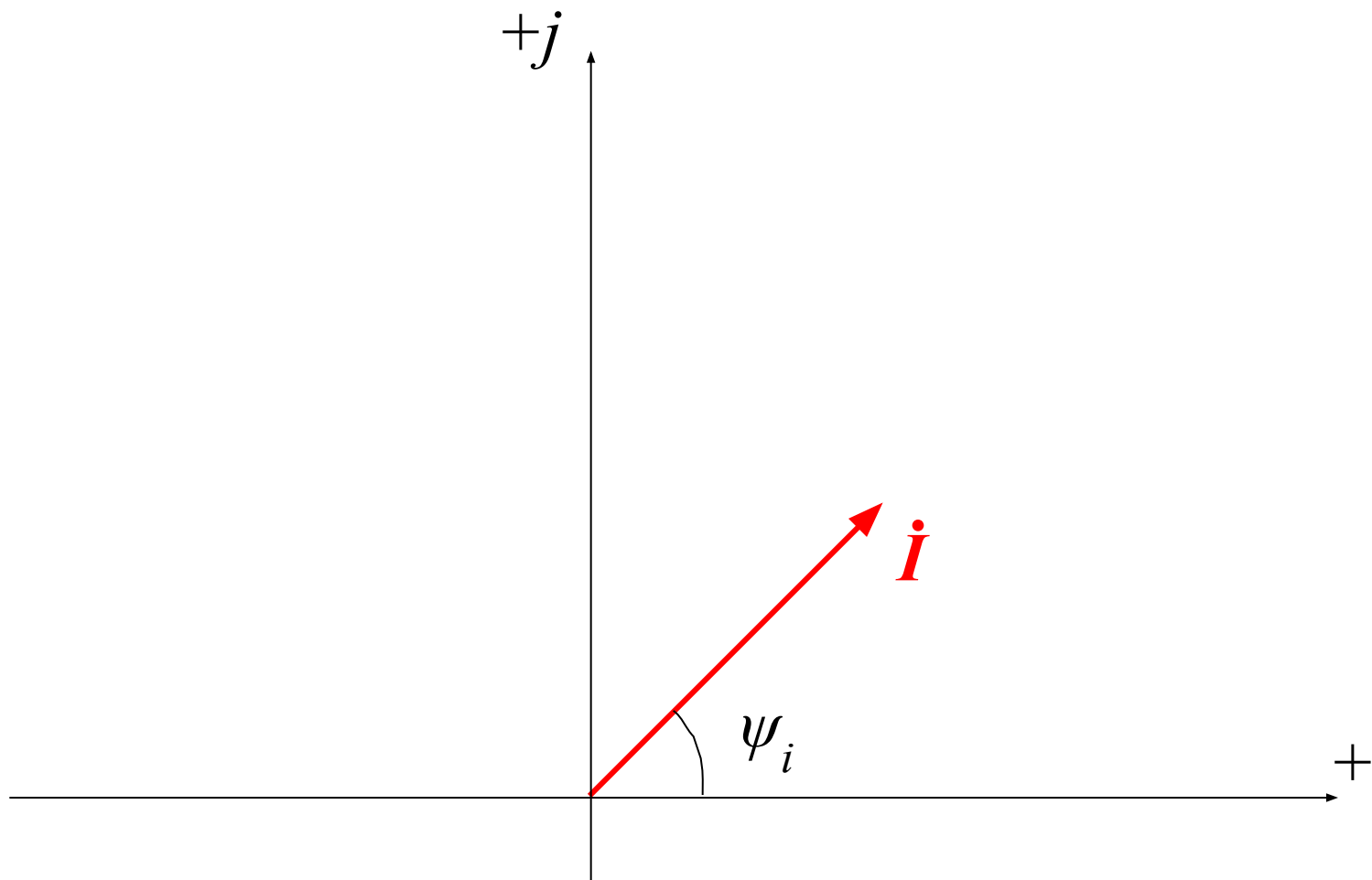
- На векторной диаграмме вектор напряжения повернут относительно вектора тока на угол $\pi/2$ в сторону опережения (против часовой стрелки)

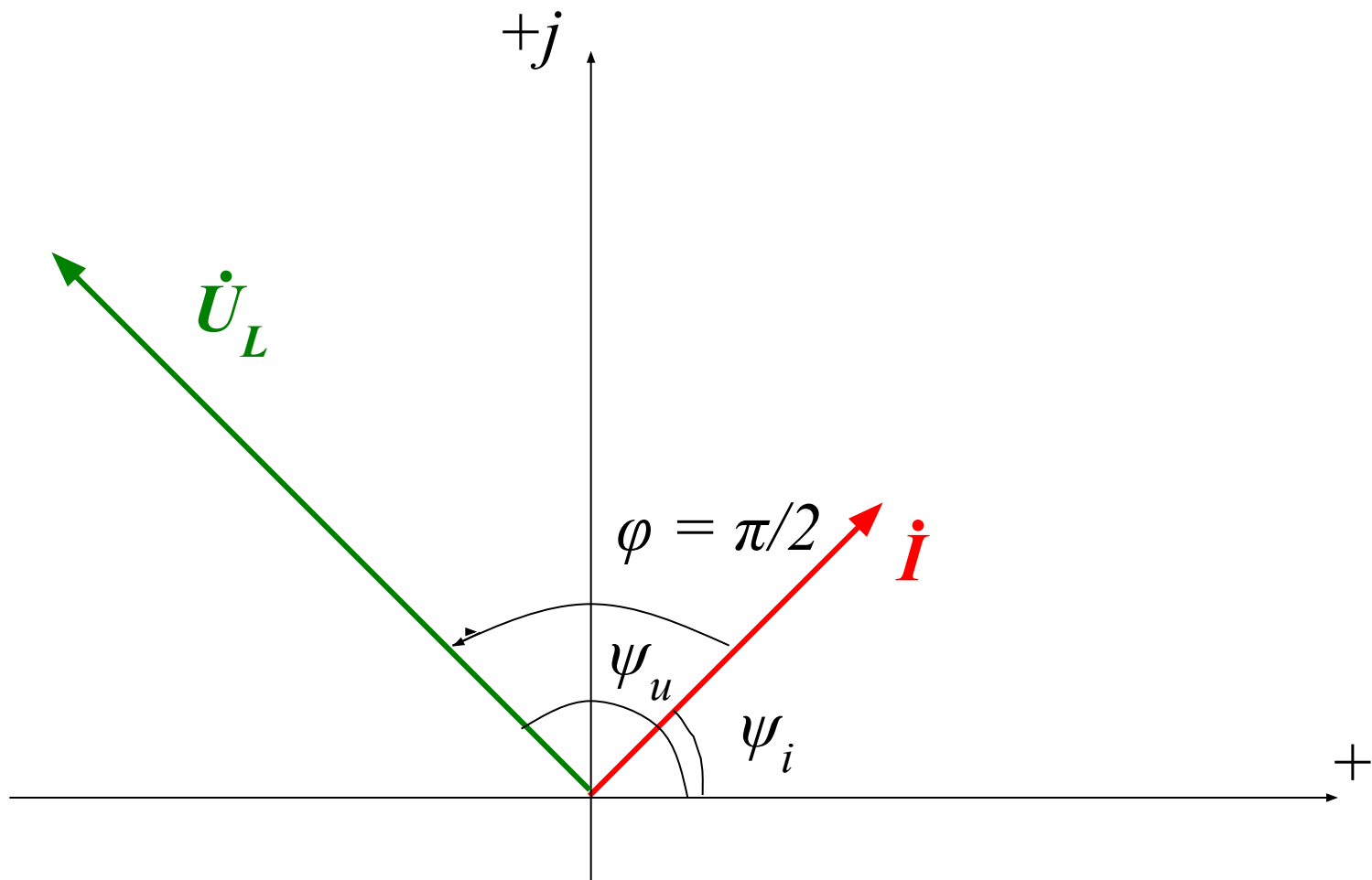


- При изменении начальной фазы напряжения оба вектора повернутся на соответствующий угол. Однако взаимное относительное направление векторов не меняется.

Это отражает свойства идеального индуктивного элемента







Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

Для анализа энергетических соотношений в цепи с идеальным индуктивным элементом определим характер мощности в этой цепи.

- Примем начальную фазу тока, равной нулю ($\psi_i = 0$). При этом начальная фаза напряжения $\psi_u = \pi/2$. Мгновенная мощность в индуктивном элементе:

$$p_L = u_L \cdot i = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t$$

- Перейдя к действующим значениям напряжения и тока

$$U_L = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_L = U_L I \sin 2\omega t$$

- Полученное выражение описывает характер изменения мощности в идеальном индуктивном элементе..



Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

- В цепи с идеальным индуктивным элементом мгновенная мощность изменяется по синусоидальному закону с амплитудой $U_L \cdot I$ с двойной частотой 2ω .
- В течение периода значение мгновенной мощности меняет знак через каждую четверть периода. При $p_L > 0$ – электрическая энергия от источника поступает в цепь и преобразуется в энергию магнитного поля в индуктивном элементе. При $p_L < 0$ – энергия, запасенная в магнитном поле, полностью возвращается к источнику.
- Среднее за период значение мгновенной мощности или активная мощность равна нулю:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = 0$$



Идеальный индуктивный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

- В индуктивном элементе происходит непрерывный колебательный процесс обмена энергией между источником и магнитным полем индуктивного приемника. Это **обратимый процесс** преобразования энергии.
- Для характеристики интенсивности этого процесса используют понятие реактивной индуктивной мощности Q_L . Ее величину определяют амплитудой колебания мгновенной мощности $p_{L\max}$.

$$Q_L = p_{L\max} = U_L I \quad \text{или} \quad Q_L = U_L I = X_L I^2$$

Индуктивное сопротивление $X_L = Q_L / I^2$

Единицы реактивной индуктивной мощности Q_L –
ВАр, КВАр, МВАр.



Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока .

Необходимо определить соотношение между синусоидальными током и напряжением по величине и по фазе.

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

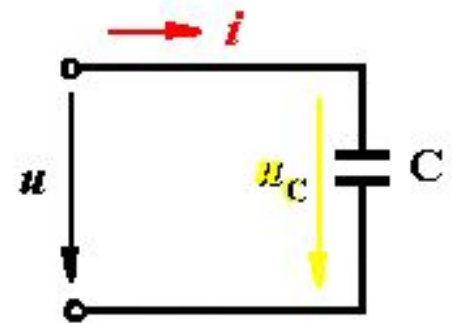
По второму закону Кирхгофа для заданной цепи:

$$u_C = u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_m \sin(\omega t + \psi_u)) = C\omega U_m \sin(\omega t + \psi_u + \pi/2)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$



Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

- ток в емкостном элементе изменяется по синусоидальному закону с амплитудой $I_m = C\omega U_m$ и действующим значением $I = C\omega U$
- начальная фаза тока больше начальной фазы напряжения на $\pi/2$, при этом разность фаз, определяемая выражением

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - \left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Напряжение на емкостном элементе отстает от тока по фазе на угол $\pi/2$.



Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

$$I = \frac{U_c}{\frac{1}{C\omega}} = \frac{U_c}{X_c}$$

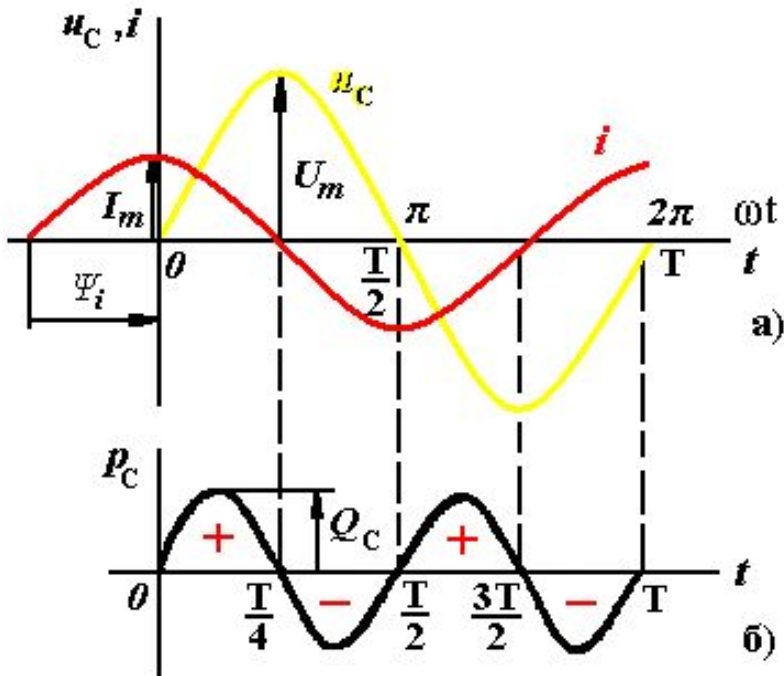
где величина $X_c = 1/\omega C = 1/2\pi fC$ называется **емкостным сопротивлением**.

Единица индуктивного сопротивления – Ом.

Соотношение по величине между током и напряжением индуктивного элемента определяется законом Ома :
действующее значение тока емкостного элемента прямо пропорционально действующему значению напряжения и обратно пропорционально емкостному сопротивлению.



Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).



Графики изменения во времени мгновенных значений u_c , i , p_c .

При графическом изображении временными диаграммами синусоида напряжения $u_c(t)$ сдвинута относительно синусоиды тока $i(t)$ в сторону отставания на угол $\pi/2$. На рисунке показаны временные диаграммы тока и напряжения при начальной фазе тока, равной нулю ($\psi_u = 0$).



Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

При аналитическом изображении комплексными числами с учетом действующих значений комплексное напряжение имеет вид:

$$\underline{U}_C = U_C e^{j\psi_u}$$

Комплексный ток: $\underline{I} = I e^{j\psi_i}$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{I}} = \frac{U_C e^{j\psi_u}}{I e^{j(\psi_u + \pi/2)}} = \frac{U_C}{I} e^{-j\pi/2} = X_C e^{-j\pi/2} = -jX_C = \underline{X}_C$$

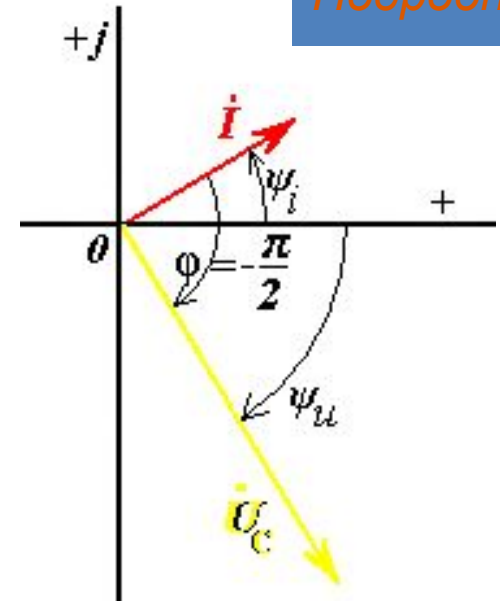
Закон Ома в комплексной форме: $\underline{I} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{X}_C}$

Здесь $\underline{X}_C = X_C e^{-j\pi/2} = -jX_C$ — комплексное индуктивное сопротивление.



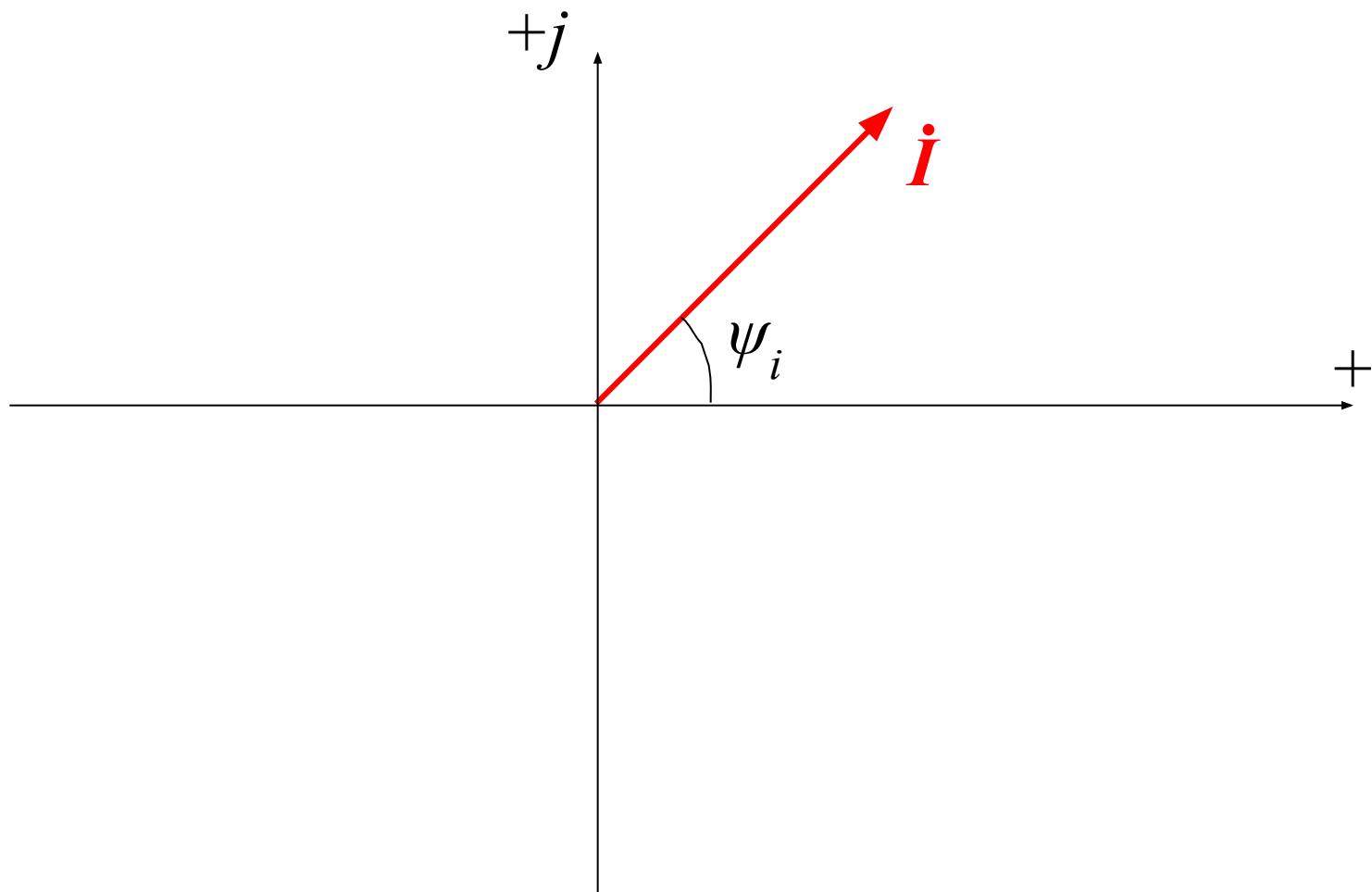
Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

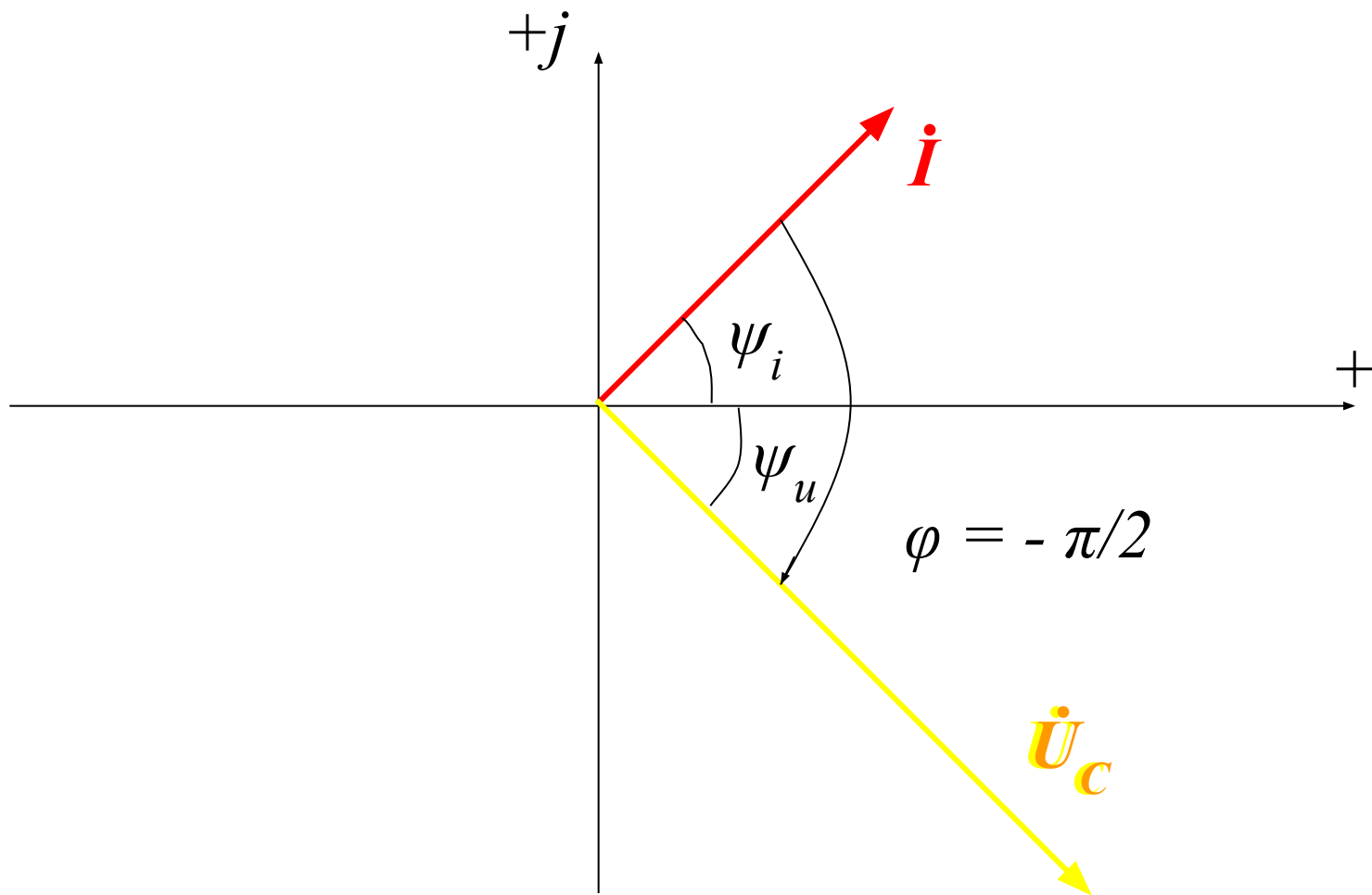
- На векторной диаграмме вектор напряжения повернут относительно вектора тока на угол $\pi/2$ в сторону отставания (по часовой стрелки)
- При изменении начальной фазы напряжения оба вектора повернутся на соответствующий угол. Однако взаимное относительное



Это отражает свойства идеального индуктивного элемента . Угол между векторами напряжения и тока на векторной диаграмме определяет разность фаз φ .







Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

Для анализа энергетических соотношений в цепи с с идеальным емкостным элементом определим характер мощности в этой цепи.

- Примем начальную фазу напряжения, равной нулю ($\psi_u = 0$). При этом начальная фаза тока $\psi_i = \pi/2$.

Мгновенная мощность в индуктивном элементе:

$$p_C = u_C \cdot i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t$$

- Перейдя к действующим значениям напряжения и тока

$$U_C = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_C = U_C I \sin 2\omega t$$

- Полученное выражение описывает характер изменения мощности в идеальном емкостном элементе.



Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

- В цепи с идеальным индуктивным элементом мгновенная мощность изменяется по синусоидальному закону с амплитудой $U_C \cdot I$ с двойной частотой 2ω .
- В течение периода значение мгновенной мощности меняет знак через каждую четверть периода. При $p_C > 0$ – электрическая энергия от источника поступает в цепь и преобразуется в энергию электрического поля в емкостном элементе. При $p_C < 0$ – энергия, запасенная в электрическом поле, полностью возвращается к источнику.
- Среднее за период значение мгновенной мощности или активная мощность равна нулю:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_C dt = 0$$



Идеальный емкостный элемент в цепи синусоидального тока (продолжение).

- В емкостном элементе происходит непрерывный колебательный процесс обмена энергией между источником и электрическим полем емкостного приемника. Это **обратимый процесс** преобразования энергии.
- Для характеристики интенсивности этого процесса используют понятие реактивной емкостной мощности Q_C . Ее величину определяют амплитудой колебания мгновенной мощности p_{Cmax} .

$$Q_C = p_{Cmax} = U_C I \quad \text{или} \quad Q_C = U_C I = X_C I^2$$

Емкостное сопротивление $X_C = Q_C / I^2$
Единицы реактивной емкостной мощности Q_C –
ВАр, КВАр, МВАр.



Заключение

1. На *идеальном индуктивном* элементе соотношение между током и напряжением по величине:

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L}$$

Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L = 2\pi fL$

Разность фаз в индуктивном элементе $\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}$

Соотношение комплексных тока и напряжения на идеальном индуктивном элементе

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_L}{X_L}$$

Комплексное индуктивное сопротивление $\underline{X}_L = X_L \cdot e^{j\pi/2} = jX_L$

На векторной диаграмме вектор напряжения повернут относительно вектора тока против часовой стрелки на $\pi/2$.

Реактивная индуктивная мощность $Q_L = U_L I = X_L I^2$

Заключение

2. На *идеальном емкостном элементе* соотношение между током и напряжением по величине:

$$I = \frac{U_C}{1/C\omega} = \frac{U_C}{X_C}$$

Емкостное сопротивление $X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$

Разность фаз в емкостном элементе $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$

Соотношение комплексных тока и напряжения на идеальном емкостном элементе $\underline{I} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{X}_C}$

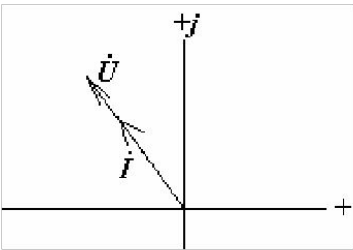
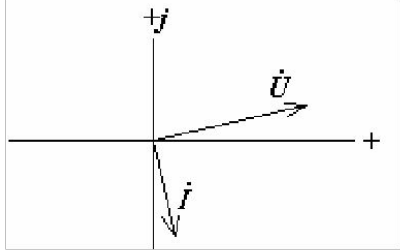
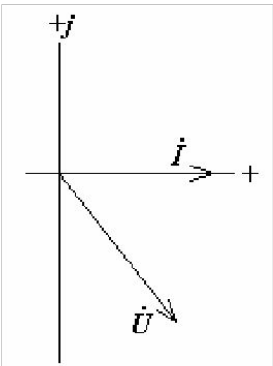
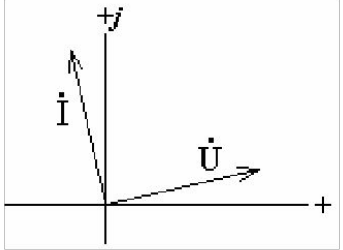
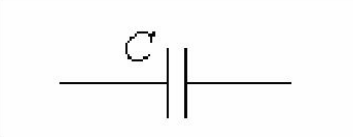
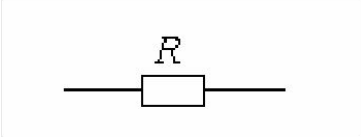

Комплексное емкостное сопротивление $\underline{X}_C = X_C e^{-j\pi/2} = -jX_C$

На векторной диаграмме вектор напряжения повернут относительно вектора тока по часовой стрелке на $\pi/2$.

Реактивная емкостная мощность $Q_C = U_C I = X_C I^2$

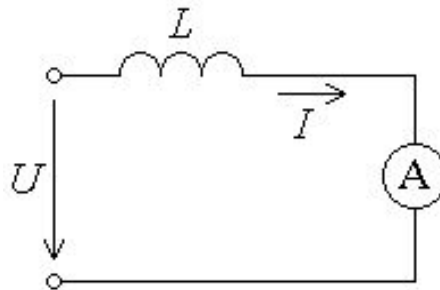
Контрольные вопросы

Поставить в соответствие векторную диаграмму и схему замещения

Контрольные вопросы

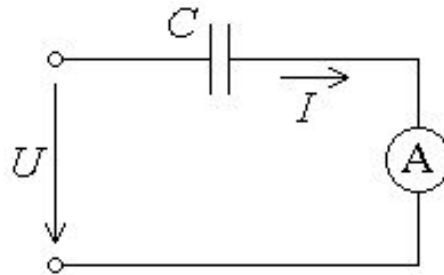
Определить ток и реактивную индуктивную мощность для цепи синусоидального тока, показанной на схеме .
($L=60$ мГн, $f=50$ Гц, $U=100$ В)



Ток цепи	Реактивная индуктивная мощность
$I = 5,31$ А; $I = 1,67$ А; $I = 33,3$ А.	$Q_L = 531,2$ Вт; $Q_L = 188400,0$ Вт; $Q_L = 20891,5$ Вт;

Контрольные вопросы

Определить ток и реактивную емкостную мощность для цепи синусоидального тока, показанной на схеме. (C=600 мкФ, f=50 Гц, U=100 В)



Ток цепи	Реактивная емкостная мощность
$I = 18,84 \text{ A};$ $I = 3,0 \text{ A};$ $I = 0,167 \text{ A};$ $I = 530,8 \text{ A}.$	$Q_C = 1884,0 \text{ Вт};$ $Q_C = 53081,0 \text{ Вт};$ $Q_C = 66,9 \text{ Вт};$