Электроемкость

Электроемкость уединенного проводника

Рассмотрим уединенный проводник: проводник, удаленный от других проводников и зарядов.

Между зарядом проводника *q* и его потенциалом *ϕ* существует прямая пропорциональная зависимость:

$$q \sim \varphi$$

Запишем в виде равенства: $$q = C\varphi$$

Величина $$C = \frac{q}{\varphi}$$

называется ***электроемкостью*** уединенного проводника.

Электроемкость зависит от *размеров* и *формы проводника*.

Единицей электроемкости является *фарад (Ф)*. $[C] = \left[\frac{Кл}{В}\right] = [Ф]$

Электроемкостью *1Ф* обладает проводник, потенциал которого изменяется на *1В*, при сообщении ему заряда *1Кл*.

Пример. Вычисление электроемкости уединенного проводника, имеющего форму шара радиуса *R*.

Поместим на проводник заряд q и вычислим его потенциал ϕ, воспользовавшись связью между напряженностью и потенциалом

$$\varphi = \int_R^\infty E dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{q dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{q}{r} \right) \Bigg|_R^\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$$

Тогда

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q\, 4\pi\varepsilon_0 R}{q} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Конденсаторы

Систему проводников называют ***конденсатором***.
Простейший конденсатор это система из двух проводников (обкладок) находящихся на малом расстоянии друг от друга.
Заряды на обкладках равны по величине и противоположны по знаку, чтобы электрическое поле было бы сосредоточено внутри конденсатора.

Электроемкостью конденсатора называют отношение заряда на положительно заряженной обкладке к разности потенциалов (напряжению) между обкладками

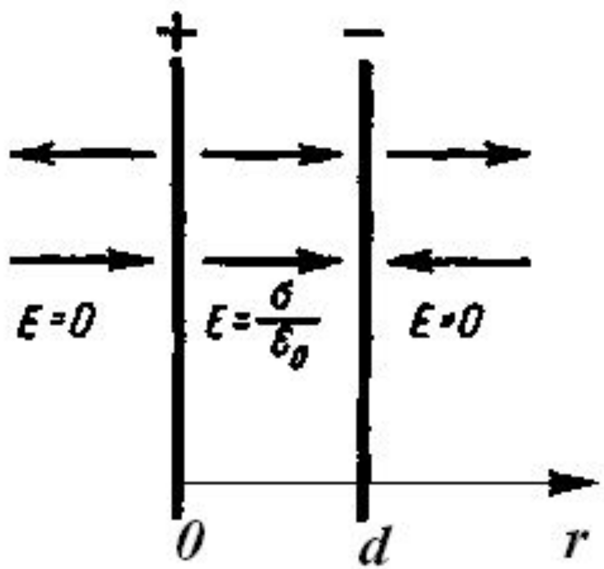
$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}$$

Емкость конденсатора зависит от размеров и формы обкладок, от зазора между ними и от заполняющей конденсатор среды.

Электроемкость плоского конденсатора

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных пластин, разделенных зазором шириной *d*. Предположим, что заряд конденсатора равен *q*, тогда поверхностная плотность заряда

$\sigma = q/S$



Напряженность поля, создаваемого каждой из пластин равна по модулю

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Результирующая напряженность поля между обкладками

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

Разность потенциалов между пластинами будет равна

$$U = \int_0^d E dr = \int_0^d \frac{q dr}{\varepsilon_0 S} = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

Подставим выражения для *U* в формулу для электроемкости конденсатора получим:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q\varepsilon_0 S}{qd} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Если между обкладками находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε, то

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

Выражение для емкости *сферического конденсатора:*

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

R_1 и R_2 радиусы внутренней и наружной обкладок.

Выражение для емкости *цилиндрического конденсатора*:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}$$

где l - длина конденсатора, R_1 и R_2 радиусы внутренней и наружной цилиндрических обкладок.

Энергия системы точечных зарядов.

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

Представим выражение для энергии в виде:

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}q_2\right)$$

Обозначим $\varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2}{r}$ - потенциал создаваемый зарядом q_2 в точке нахождения заряда q_1;

$\varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{r}$ - потенциал создаваемый зарядом q_1 в точке нахождения заряда q_2;

Тогда соотношение для энергии взаимодействия двух зарядов примет вид:

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right)$$

Обобщим это выражение для системы, состоящей из n зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i$$

где ϕ_i - потенциал создаваемый в точке нахождения заряда q_i всеми остальными зарядами.

Энергия заряженного уединенного проводника

Рассмотрим уединенный проводник емкость, потенциал и заряд которого соответственно равны C, ϕ, q.

Увеличим заряд этого проводника на dq.

Для этого необходимо перенести заряд dq из бесконечности на уединенный проводник, совершив работу, равную

$$dA = \varphi\, dq$$

Так как заряд q и потенциал ϕ уединенного проводника связаны соотношением

$$q = C\varphi$$

то

$$dq = C d\varphi$$

следовательно

$$dA = \varphi\, dq = C\varphi\, d\varphi$$

Чтобы зарядить тело от нулевого потенциала до ϕ, необходимо совершить работу

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}$$

Энергия заряженного проводника равна работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$W = A = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Энергия заряженного конденсатора

Рассмотрим конденсатор емкости *C*, заряженный до напряжения *U*.

Для того, чтобы перенести на него добавочный заряд *dq* требуется совершить работу

$$dA = Udq$$

В конденсаторе заряд и напряжение связаны соотношением

$$q = CU$$

дифференцируя которое, получим $dq = CdU$

Тогда $dA = CUdU$

Полная работа, которую надо совершить для заряда конденсатора

$$A = \int_0^U CUdU = \frac{CU^2}{2}$$

Эта работа идет на создании энергии электрического поля конденсатора

$$W = A = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}$$

Объемная плотность энергии электрического поля.

Введем в рассмотрение величину

$$w = \frac{W}{V}$$

которая называется объемная плотность энергии.

Подставляя в формулу для энергии конденсатора $W = \dfrac{CU^2}{2}$

выражение для емкости плоского конденсатора: $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$

и учитывая, что $U = Ed$ а объем конденсатора $V = Sd$

находим: $$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2 V;$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

- плотность энергии электрического поля