практика

Электромагнитные колебания

- Параметры колебательных систем
- Уравнения колебаний
- Затухающие колебания
- Переменный ток

практика

Основные формулы

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$Q = Q_m e^{-\delta\ t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha)$$

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}}$$

$$\lambda = \beta T = \frac{\beta}{\nu}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

практика

Основные формулы

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$(Q_{рез}) = \frac{\frac{U_m}{L}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$(P) = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$(I_{рез}) = \frac{U_m}{R}$$

1. Логарифмический декремент затухания тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0.01. Определить 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшиться в е раз. 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Решение:

$$\xi = A(t)\sin\omega t$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \qquad A(t) = A_0 e^{-\lambda \nu t}$$

$$\lambda = \beta T = \frac{\beta}{\nu} \qquad t = \frac{1}{\lambda\nu} ln\frac{A_0}{A} \qquad N_e = \frac{t}{T} = t\nu$$

1.1 Начальная амплитуда затухающих колебаний A_0. По истечении τ секунд $A_0/3$. Определить время, по истечении которого амплитуда станет равной $A_0/10$

2. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L, конденсатора C и резистора. Определить сопротивление резистора, если известно, что амплитуда силы тока в контуре уменьшилась в e раз за n полных колебаний.

Решение:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$n = \frac{\tau}{T}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$\beta = R/2L$$

$$n = \frac{\frac{2L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C\left(1 + 4\pi^2 n^2\right)}}$$

практика

3. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L, конденсатора C и резистора R. Определить как измениться добротность контура, если индуктивность увеличить в 2 раза, а емкость уменьшить в 4 раза .

Решение:

$$Q_1 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q_2 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2L}{C/4}} = \frac{1}{R}\sqrt{8}\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{2}Q_1$$

практика

4. Гармонические колебания напряжения на конденсаторе описываются уравнением $U = 0.01\cos(4\pi t + \frac{\pi}{8})$, В. Определите 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) период колебаний; 4) частоту колебаний; 5) начальную фазу колебаний, напряжение через четверть периода.

Решение:

$$U = 0.01\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$A = 0.01 \text{ В} \qquad \omega = 4\pi \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\text{сек}$$

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{8}\text{сек}$$

$$U = 0.01\cos\left(4\pi \cdot \frac{1}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = 0.01\cos\frac{5\pi}{8}$$

практика

5. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C =100 пФ, катушки индуктивностью L = 0,01 Гн и резистора сопротивлением R = 20 Ом. Определите: добротность контура, период затухающих колебаний; через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в 3*e* раз.

Решение:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$t = \frac{1}{\lambda\nu}\ln\frac{A_0}{A}$$

$$N = \frac{t}{T} = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{A_0}{A}$$

$$\lambda = \beta T$$

$$N = \frac{1}{\beta T}\ln\frac{A_0}{A}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$N = \frac{2L}{RT}\ln\frac{A_0}{A} = \frac{2L}{RT}\ln 3$$

практика

6. Запишите уравнение затухающих колебаний, если максимальная величина заряда q_0 составляет 10 нКл, период затухающих колебаний $T = 3$ с, логарифмический декремент затухания $\theta=0,03$, начальная фаза колебаний равна 30 градусов.

Решение:

$$\beta = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.03}{3} = 0.01 \quad ^{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$$

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$q = 10 \cdot e^{-0.01t}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

6.1 Запишите уравнение затухающих колебаний, если максимальная величина заряда q_0 составляет 100 нКл, период затухающих колебаний $T = 5$ с, время релаксации 0,03 сек, начальная фаза колебаний равна 60 градусов.

7. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью *C*, катушки индуктивности L и сопротивления R. Какую среднюю мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания с амплитудным значением напряжения на конденсаторе U_0

Решение:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad \langle N \rangle = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q}{T} \qquad Q = \int_t^{t+T} I^2 R dt \qquad I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

$$U = U_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \qquad I = CU_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$Q = RC^2U_0^2\omega_0^2 \int_t^{t+T} \cos^2(\omega_0 t + \alpha)dt = \frac{RC^2U_0^2\omega_0^2 T}{2}$$

$$\langle N \rangle = \frac{RC^2U_0^2\omega_0^2}{2}$$

практика

4. В колебательном контуре, содержащем катушку индуктивности L и конденсатор C и резистор R, поддерживаются незатухающие гармонические колебания. Определить амплитудное значение напряжения на конденсаторе U_{mC}, если средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, составляет P_{cp}.

Решение:

$$P_{cp} = \frac{I_m^2 R}{2}$$

$$I_m = \omega C U_{mC}$$

$$\omega = \omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$$

$$P_{cp} = \frac{(\omega C U_{mC})^2 R}{2} = \frac{C^2 U_{mC}^2 \omega^2 R}{2}$$

$$P_{cp} = \frac{C U_{mC}^2 R}{2L}$$

$$U_{mC} = \sqrt{\frac{2LP_{cp}}{RC}}$$

3.1 Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C, катушки индуктивности L и сопротивления R. Какую среднюю мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания с амплитудным значением напряжения на конденсаторе U_0

5. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности, конденсатора С и резистора R. Определить индуктивность контура, если известно, что амплитуда силы тока в контуре уменьшилась в е раз за n полных колебаний.

Решение:

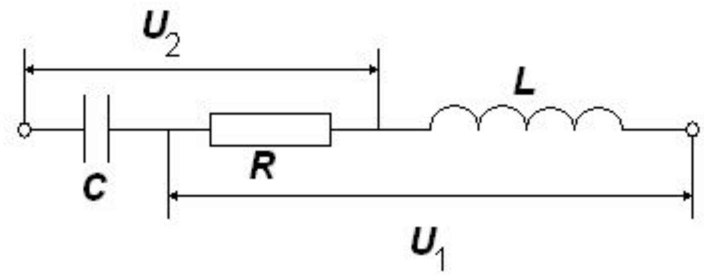
$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad \langle N \rangle = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q}{T} \qquad Q = \int_t^{t+T} I^2 R dt \qquad I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

$$U = U_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \qquad I = CU_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$Q = RC^2U_0^2\omega_0^2 \int_t^{t+T} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) dt = \frac{RC^2U_0^2\omega_0^2 T}{2}$$

$$\langle N \rangle = \frac{RC^2U_0^2\omega_0^2}{2}$$

4. В цепи переменного тока с частотой 50 Гц и действующим напряжением 300 В последовательно включены конденсатор, резистор 50 Ом и катушка 0.1 Гн. Падения напряжения U_1/U_2 как ½. Определить электроемкость и действующее значение силы тока



$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left((\omega L) - 1/(\omega C)\right)^2}}$$

Решение:

$$I_m = \frac{U_{m1}}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} \qquad I_m = \frac{U_{m2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$C = \frac{1}{2\pi\nu}\frac{1}{\sqrt{3R^2 + 4(2\pi\nu L)^2}} = 30\text{мкФ}$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left((\omega L) - 1/(\omega C)\right)^2}} = 3.3\text{мА}$$

6. Найти формулы для полного сопротивления цепи Z и сдвига фаз между напряжением и током φ при различных включениях сопротивления R, емкости C и индуктивности L :

1) R и C включены последовательно, 2) R и C включены параллельно, 3) L и C включены последовательно, 4) L и C включены параллельно, 5) R , L и C включены последовательно

Решение:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left((\omega L) - {}^{1}\!/_{(\omega C)} \right)^2}$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left((\omega L) - {}^{1}\!/_{(\omega C)} \right)^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

$$U_C = \frac{I_m}{\omega C} cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

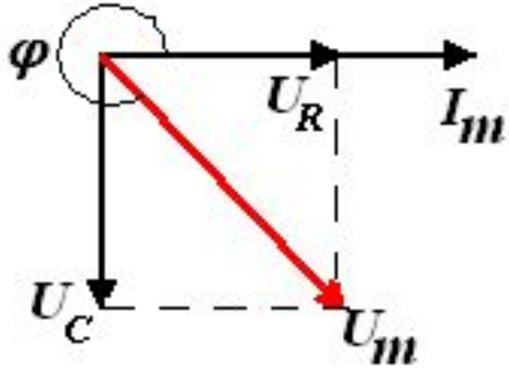
$$U_L = I_m \omega L\, cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$U_R = I_m R\, cos(\omega t - \varphi)$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t$$

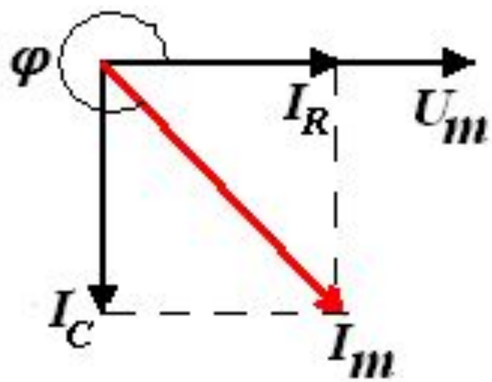
практика

6.1) R и C включены последовательно L=0



$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(1/(\omega C)\right)^2}} \qquad tg\varphi = -\frac{1}{\omega CR}$$

6.2) R и C включены параллельно – две параллельных цепи в которых только R и C соответственно

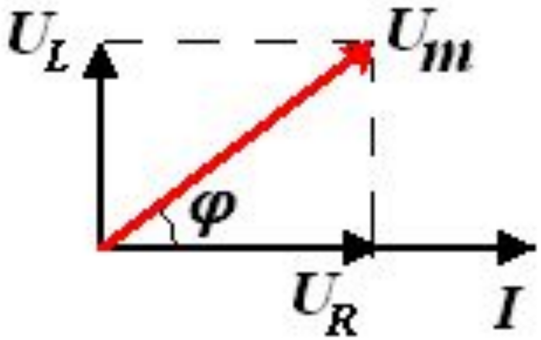


$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \qquad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{I_C}{I_R} = -R\omega C$$

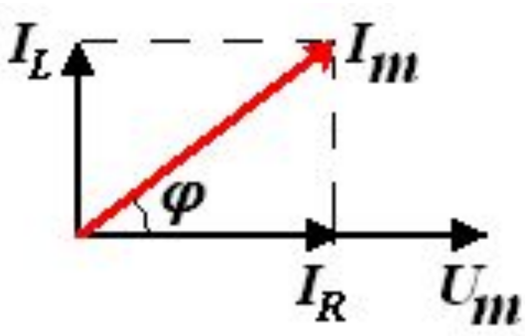
$$I_C = U_m\omega \qquad I_R = U_m/R$$

6.3) R и L включены последовательно C=0



$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad tg\varphi = \frac{\omega L}{R}$$

6.4) R и L включены параллельно – две параллельных цепи в которых только R и L соответственно

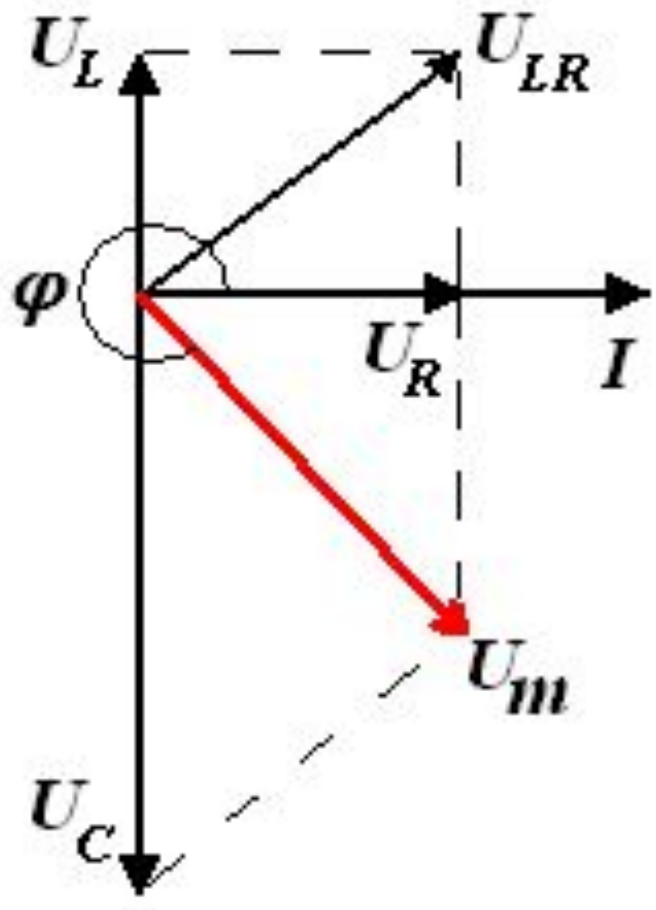


$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$I_R = {}^{U_m}\!/_{R} \qquad I_L = {}^{U_m}\!/_{\omega L} \qquad tg\varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{R}{\omega L}$$

практика

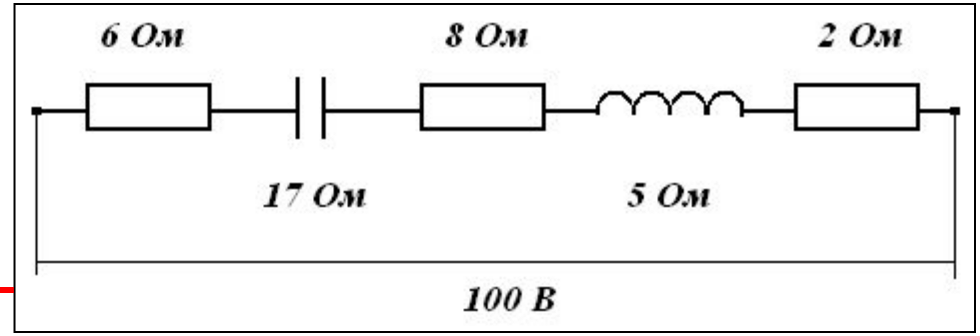
6.5) R , L и C включены последовательно



$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left((\omega L) - 1/(\omega C) \right)^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

7. Для схемы определить ток в цепи, коэффициент мощности, активную и реактивную и полную мощность и построить векторную диаграмму



Решение:

1. импеданс

$$Z,\ Ом = \sqrt{\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = 20$$

2. Полный ток в цепи

$$I,\ A = \frac{U}{Z} = 5$$

3. Коэффициент мощности цепи

$$\cos\varphi = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{Z} = 0.8 \qquad \varphi = 37^\circ$$

4. Полная мощность

$$S,\ BA = UI = 500$$

$$S,\ BA = I^2 Z = 500$$

5. Активная мощность

$$P,\ Вт = S\cos\varphi = 400$$

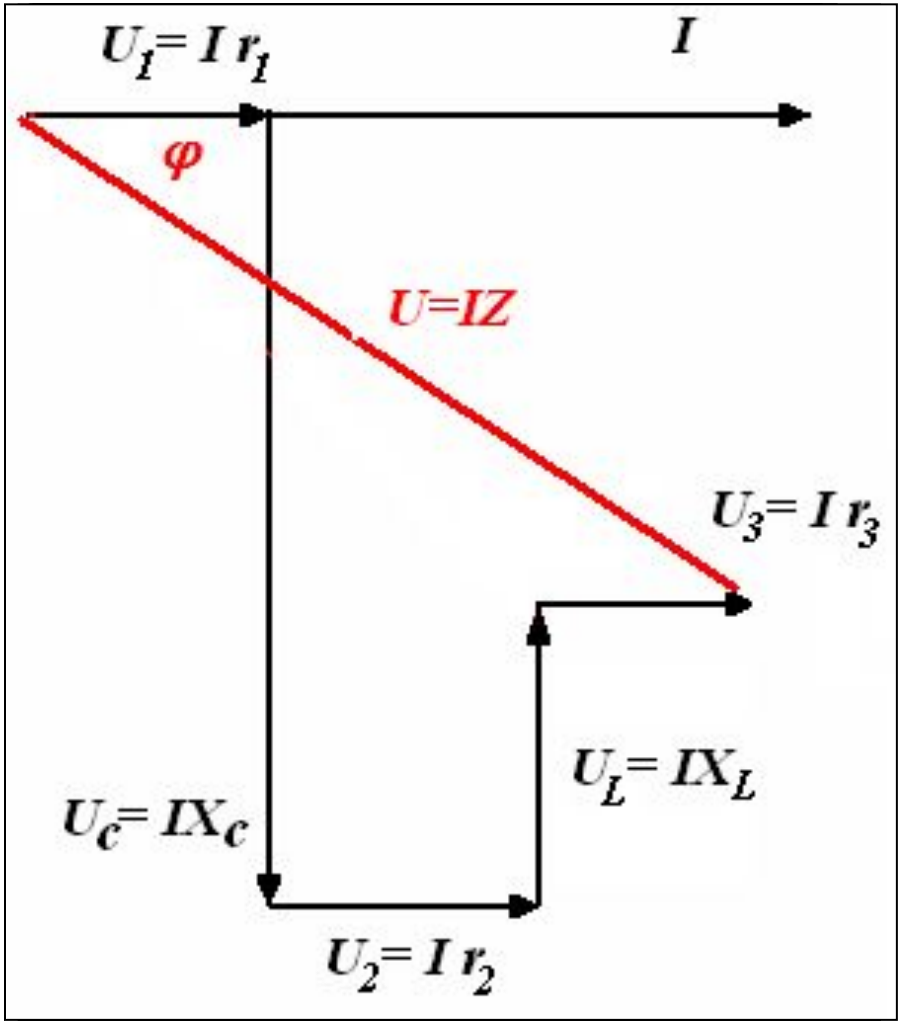
$$P,\ Вт = I^2\left(r_1 + r_2 + r_3\right) = 400$$

6. Реактивная мощность

$$Q,\ Вар = S\sin\varphi = -300$$

$$\sin\varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} = -0.6$$

практика



$$\omega_0 = {}^{1}\!/\!\sqrt{LC}$$

8 … льном последовательном контуре … вы… гармонические колебания. При … вынуждающе… ЭДС ω_1 = 300 с$^{-1}$ и ω_2 = 600 с$^{-1}$ амплиту… составляет по… вину своего максимального значения … пределить частоту собст… енных колебаний и резона… ную частоту вынуждающей Э… С.

$$I_0 = C\omega U_0$$

Решение:

$$U_0 = \frac{\varepsilon_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+4\beta^2\omega^2}} \qquad I_0 = \frac{\varepsilon_0\omega_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\omega = \omega_0$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad I_{0,max} = \frac{\varepsilon_0}{2\beta L}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_1^2\right)+4\beta^2\omega_1^2}} = \frac{\varepsilon_0}{4\beta L} \qquad \frac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_2^2\right)+4\beta^2\omega_2^2}} = \frac{\varepsilon_0}{4\beta L}$$

практика

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_2^2\right)+4\beta^2\omega_2^2}}=\dfrac{\varepsilon_0}{4\beta L} \\ \dfrac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_1^2\right)+4\beta^2\omega_1^2}}=\dfrac{\varepsilon_0}{4\beta L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2}-\omega_2\right)^2+4\beta^2=16\beta^2 \\ \left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1}-\omega_1\right)^2+4\beta^2=16\beta^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2}-\omega_2\right)^2+4\beta^2}}=\dfrac{\varepsilon_0}{4\beta L} \\ \dfrac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1}-\omega_1\right)^2+4\beta^2}}=\dfrac{\varepsilon_0}{4\beta L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2}=\beta\sqrt{12} \\ \dfrac{\omega_0^2}{\omega_1}-\omega_1=\beta\sqrt{12} \end{cases}$$

практика

$$\omega_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} - \omega_1$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_1} - \omega_1 = \beta\sqrt{12}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{12}}$$

$$\omega_0 = 424c^{-1}$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Существенное отличие резонансной частоты от собственной частоты свидетельствует о быстром затухании колебаний – большом логарифмическом декременте затухания

$$\omega_p = 406c^{-1}$$

$$\lambda \approx \frac{2\pi\beta}{\omega_0} = 1.3$$

лекции

ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ № 2

1. Две формы уравнения колебаний, примеры колебательных систем
2. Параметры колебательных систем. Энергия при колебательном движении.
3. Затухающие колебания
4. Вынужденные колебания
5. Резонанс, автоколебания и другие виды колебательных движений
6. Метод векторных диаграмм. Пример.
7. Сложение колебаний одинакового направления
8. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний
9. Примеры колебательных систем. Параметры систем.
10. Физический маятник. Приведенная длина.
11. Гармонические электромагнитные колебания
12. Затухающие электромагнитные колебания.
13. Вынужденные электромагнитные колебания.
14. Резонанс в различных контурах. Метод диаграмм.
15. Переменный ток. Закон Ома. Импеданс.
16. Переменный ток . Мощность.