Кубанский государственный технологический университет

Институт информационных технологий и безопасности

Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина

# Электротехника

## Лекция № 11

# Электрические фильтры

## *Учебные вопросы:*

1. Определения и классификация электрических фильтров.

2. Достаточное условие работы классического фильтра в полосе пропускания.

3. Фильтры нижних частот типа «k» и типа «m».

4. Полиномиальные фильтры.

5. Понятия об активных фильтрах.

## *Литература:*


1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 169 –187.

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 208 –227.

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 128 –132.

# 1. Определения и классификация электрических фильтров.

**<u>Электрическим фильтром</u>** называется четырехполюсник, пропускающий без ослабления или с малым ослаблением колебания определенных частот и пропускающий с большим ослаблением колебания других частот.

$$A_C = 10\lg\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = 10\lg\frac{S_1}{S_2} = 20\lg\frac{U_1}{U_2} = 20\lg\frac{I_1}{I_2} \to [\partial Б]$$

Величина $A_C$ показывает в логарифмическом масштабе, во сколько раз уменьшилась мощность на выходе четырехполюсника по сравнению с мощностью на его входе при передаче энергии через четырехполюсник в согласованном режиме.

Полоса частот, в которой ослабление мало, называется ***<u>полосой пропускания (ПП)</u>***

Полоса частот, в которой ослабление велико, называется ***<u>полосой задерживания (ПЗ)</u>***

<u>Идеальный фильтр:</u>

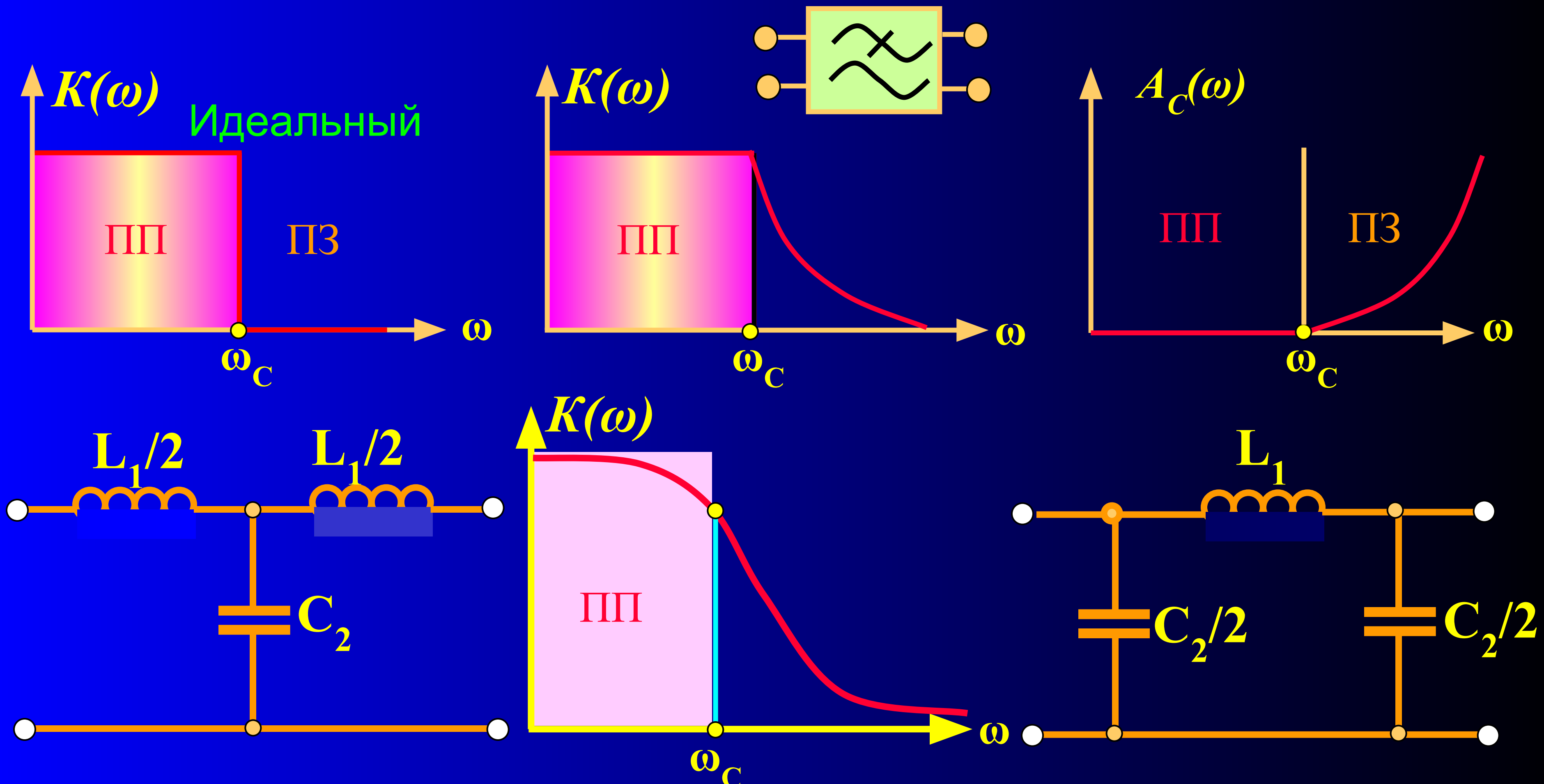
$$K(j\omega) = k = const; K(j\omega) = 1; \to A_C = 0$$ **в ПП**

$$K(j\omega) = 0; \to A_C = \infty$$ **в ПЗ**

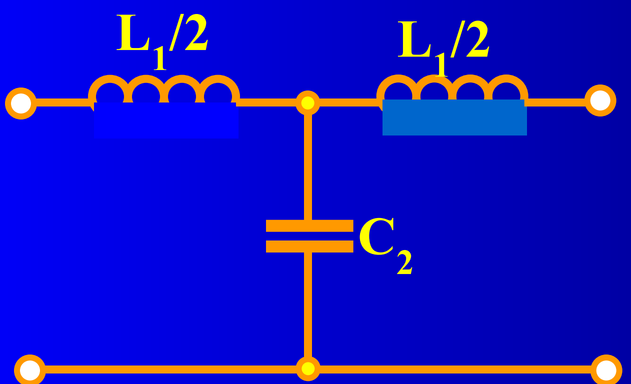
Граничные частоты полосы пропускания называются ***<u>частотами среза</u>***.

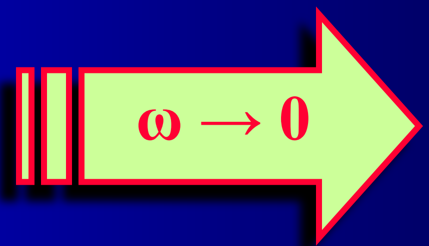
## ❖ Классификация фильтров

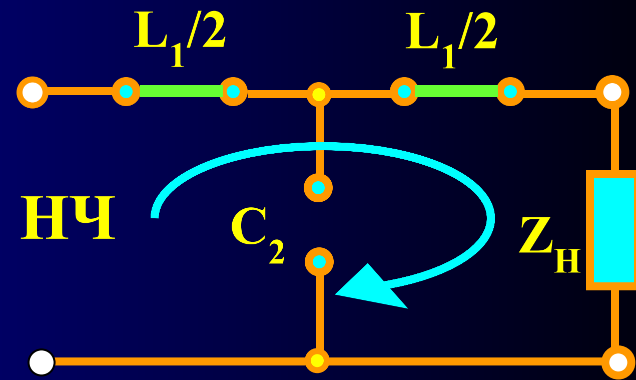
❑ **Фильтры нижних частот (ФНЧ)** имеют полосу пропускания в области низких частот (НЧ) $0 \le \omega \le \omega_c$ , а полосу задерживания в области высоких частот (ВЧ) $\omega_c \le \omega \le \infty$ .



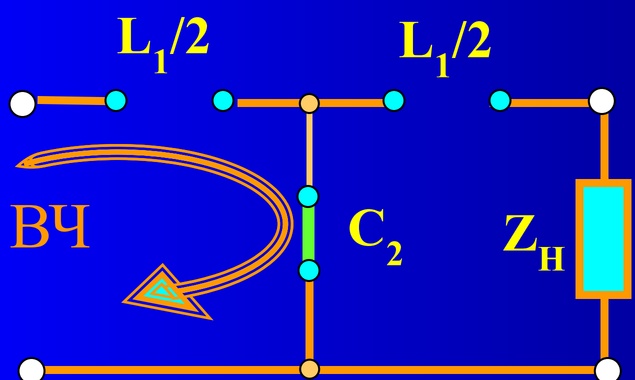

Рассмотрим физическую интерпретацию анализа Т – образной схемы ФНЧ при изменении частоты $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$.

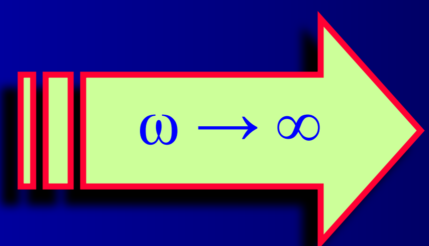


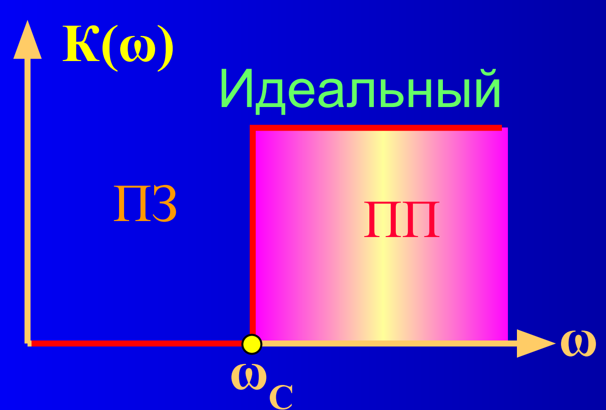

$$\omega_{CP} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

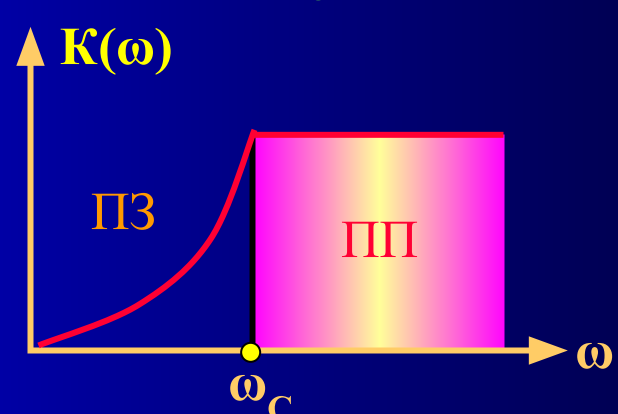


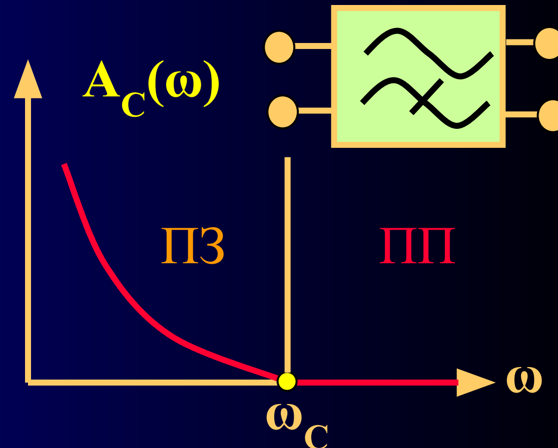



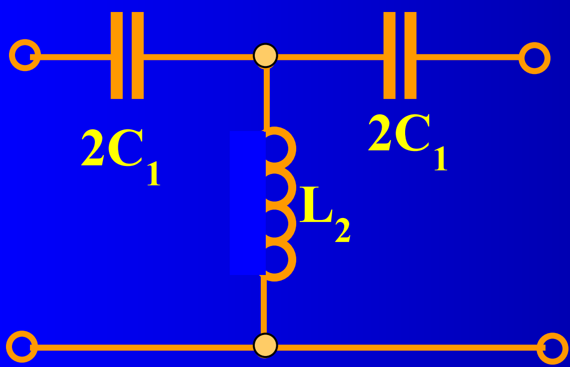

При $\omega \to \infty$ индуктивность эквивалентна разрыву цепи, а емкость короткозамкнутому участку

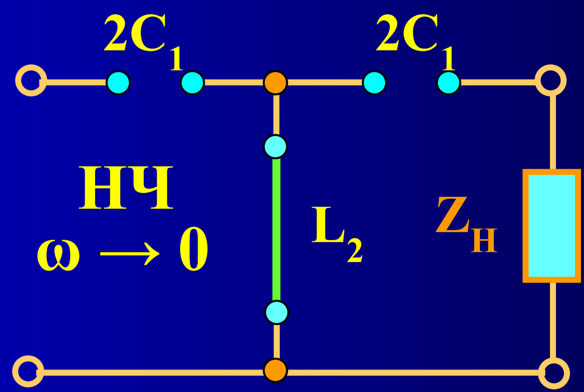
- **Фильтры верхних частот (ФВЧ)** имеют полосу пропускания в области высоких частот (ВЧ) $\omega_C \le \omega \le \infty$ , а полосу задерживания в области низких частот (НЧ) $0 \le \omega \le \omega_C$ .

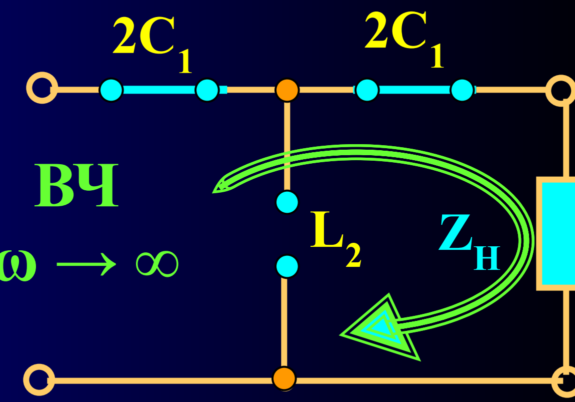




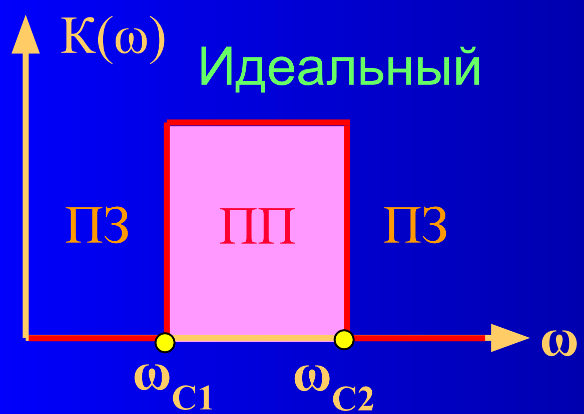


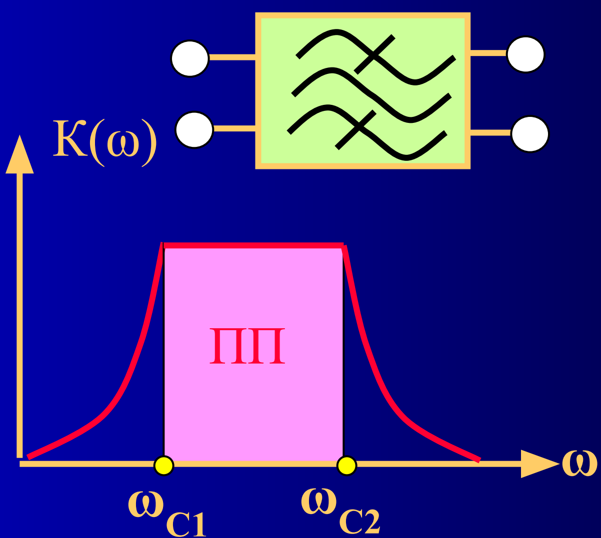


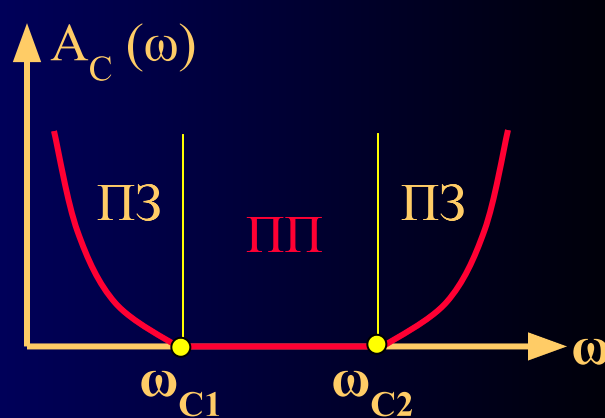

$$\omega_{CP} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}, \left[\frac{рад}{c}\right]$$

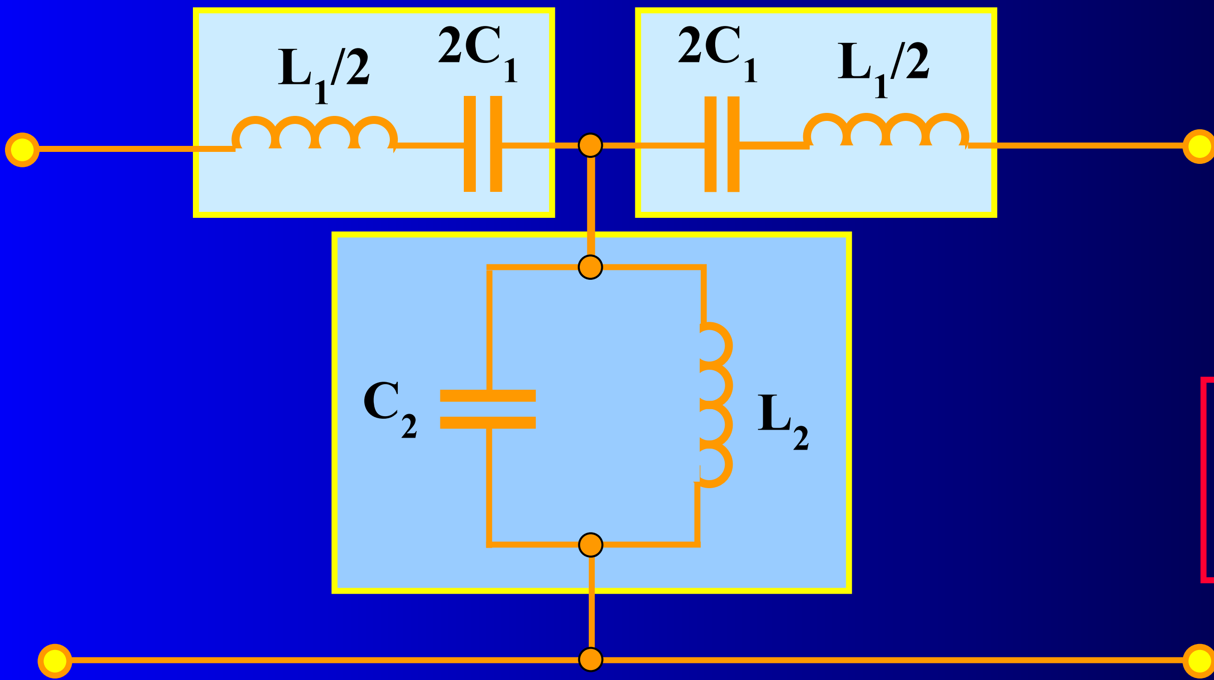
$$f_{CP} = \frac{1}{4\pi\sqrt{LC}}, [Гц]$$

- Полосовой пропускающий фильтр (ППФ) имеют полосу пропускания в некоторой области частот $\omega_{CP1} \le \omega \le \omega_{CP2}$ , а полосу задерживания в области частот $0 \le \omega \le \omega_{CP1}$ и $\omega_{CP2} \le \omega \le \infty$ .





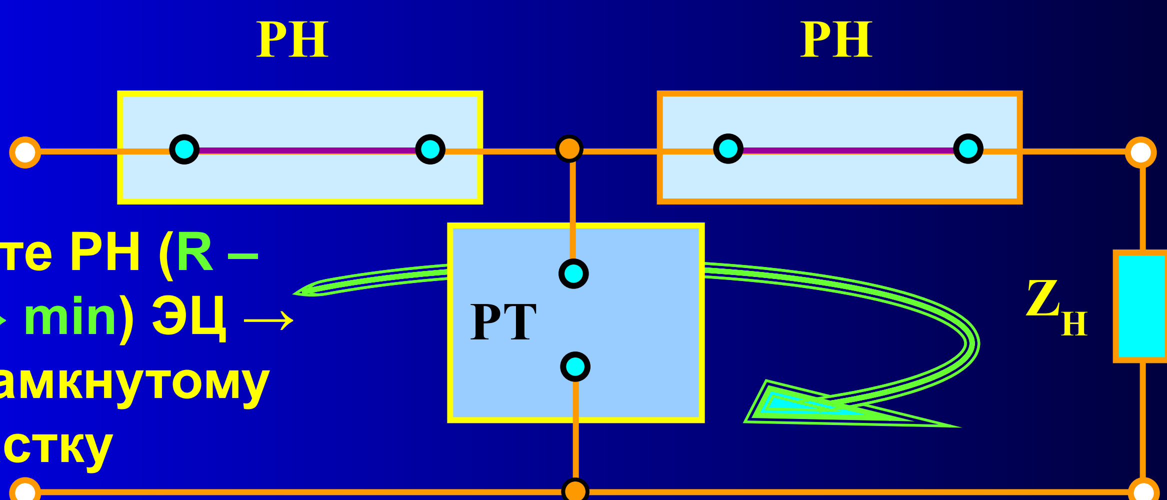





Резонансные частоты «продольного» и «поперечного» плеч ППФ одинаковы

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

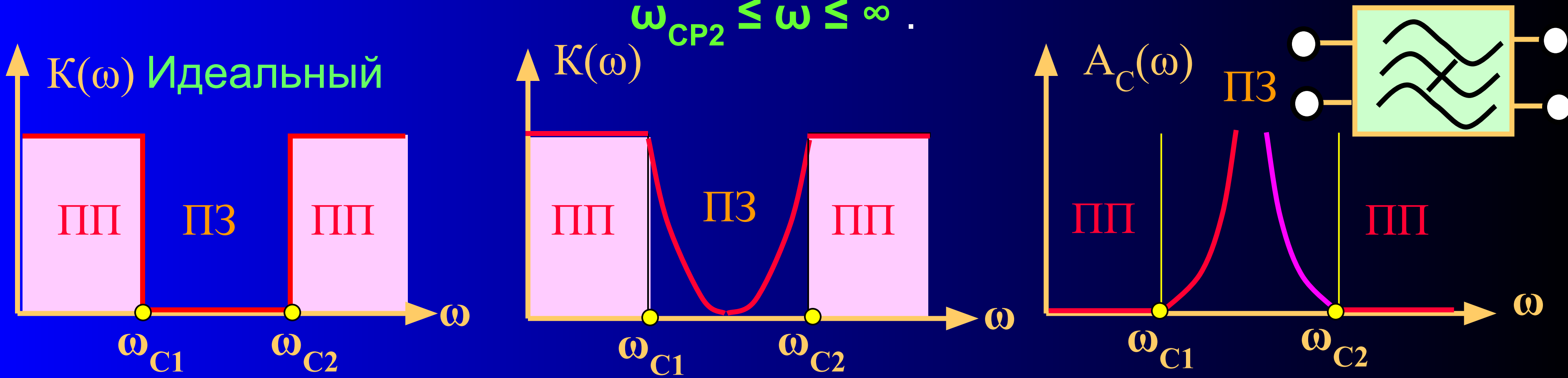
## ❖ Физическая интерпретация условий работы ППФ

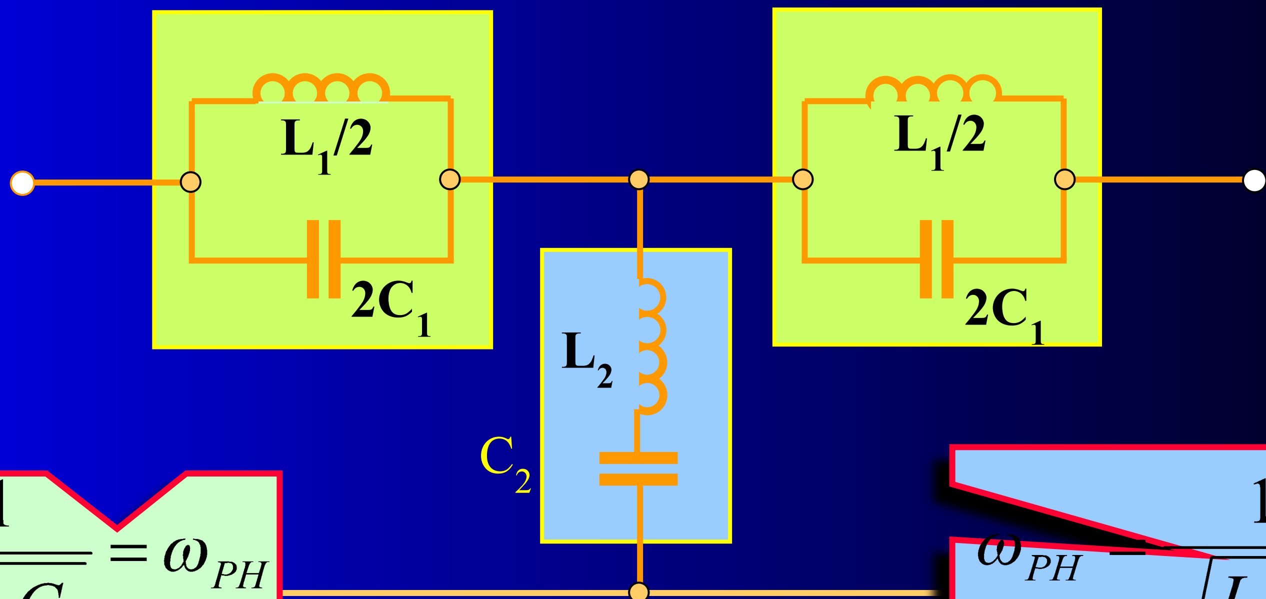



На частоте РН (R – контура → min) ЭЦ → короткозамкнутому участку

На частоте РТ (R –контура → max) ЭЦ → разрыву

❑ Полосовой заграждающий фильтр (ПЗФ) – режекторный фильтр (РФ) имеет полосу задерживания в некоторой области частот $\omega_{CP1} \le \omega \le \omega_{CP2}$ , а полосу пропускания в области частот $0 \le \omega \le \omega_{CP1}$ и $\omega_{CP2} \le \omega \le \infty$ .




$$\omega_{PT} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_{PH}$$

$$\omega_{PH} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_{PT}$$

## Требования к электрическим характеристикам фильтров

Избирательность фильтра (степень разграничения полос пропускания и заграждения) определяется крутизной характеристики рабочего ослабления

$$A_P = 20\lg\left|\frac{U_Г}{2U_2}\right| + 10\lg\left|\frac{Z_Н}{Z_Г}\right|, \rightarrow [\partial Б]$$

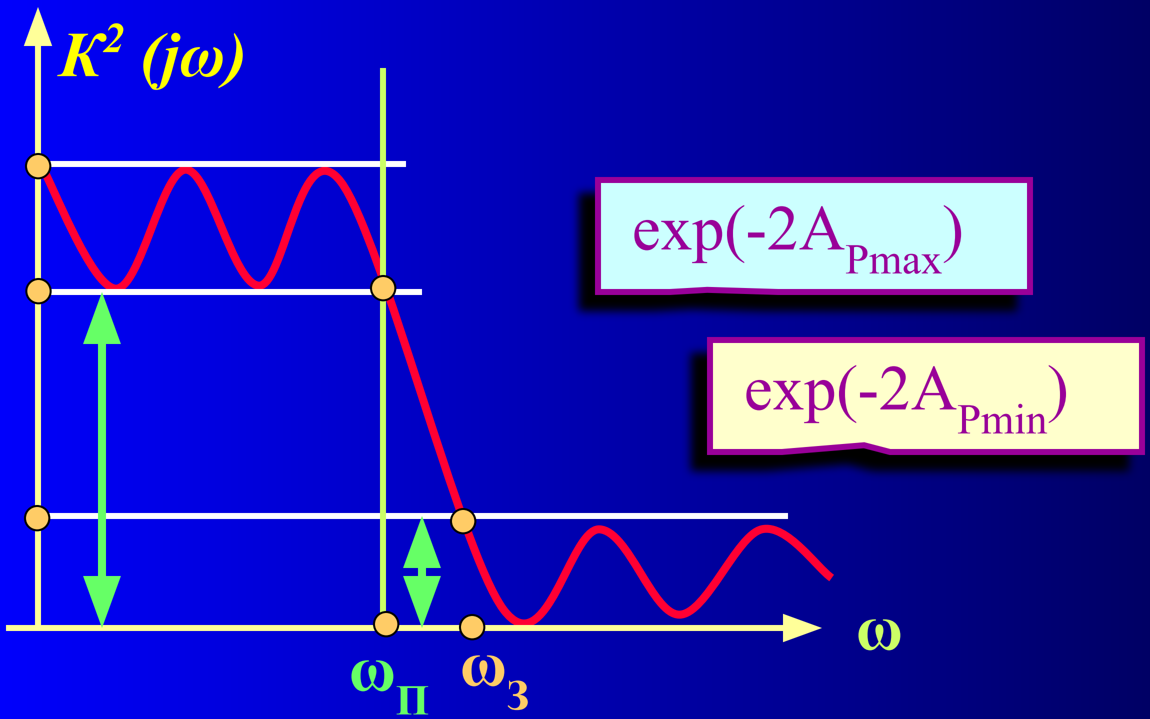
Чем больше крутизна этой характеристики и чем сильнее ослабление в полосе пропускания, тем лучше избирательность фильтра и, следовательно, меньше уровень помех от подавляемых колебаний.

**Требования к электрическим фильтрам задаются в виде допустимых пределов изменения этих характеристик.**

Так рабочее ослабление в полосе пропускания не должно превышать некоторого максимального допустимого значения $A_{P\ MAX}$, а в полосе задерживания не должно быть ниже некоторого минимально допустимого значения $A_{P\ MIN}$.

Требования к квадрату АЧХ

$$|K(j\omega)|^2 = \begin{cases} e^{-2A_{P\max}}, \rightarrow при \rightarrow 0 \le \omega \le \omega_П \\ e^{-2A_{P\min}}, \rightarrow при \rightarrow \omega \ge \omega_З \end{cases}$$




**Частотные характеристики реальных фильтров могут приближаться к ним с той или иной степенью точности в зависимости от сложности схемы фильтра.**

В общем случае передаточная функция фильтра, как четырехполюсника может быть представлена в следующем виде:

$$K(p)=\frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p^1 + a_0}{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p^1 + b_0}=$$

$$=\frac{a_n(p-p_{01})(p-p_{02})\ldots(p-p_{0n})}{b_m(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_m)}$$

$p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0n}$ - нули передаточной функции.

$p_1, p_2, \ldots, p_m$ - полюса этой же функции.

## 2. Достаточное условие работы классического фильтра в полосе пропускания

**1. Если у симметричного реактивного четырехполюсника в согласованном установившемся синусоидальном режиме сопротивление нагрузки положительно, то такой фильтр работает в полосе пропускания.**

$$R_C I_C^2 = \frac{U_1^2}{R_C} = R_C I_2^2 = \frac{U_2^2}{R_C} \rightarrow при \rightarrow Z_H = Z_{BX} = Z_C = R_C \square 0$$

**2. Если сопротивления симметричного четырехполюсника (фильтра) $Z_{XX}$ и $Z_{КЗ}$ «разнореактивны» (*т.е. одно имеет чисто индуктивный характер, а второе чисто емкостной*), то такой фильтр работает в полосе пропускания.**

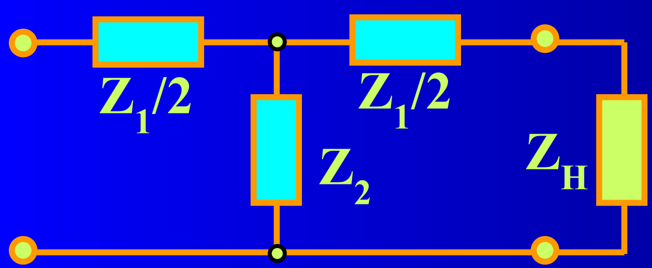
Для ***LC – фильтра,*** с учетом условия 1, можно записать

$$Z_C = \sqrt{Z_{XX}(j\omega)\cdot Z_{КЗ}(j\omega)} = \sqrt{jX_{XX}(\omega)\cdot jX_{КЗ}(\omega)} =$$
$$= \sqrt{-X_{XX}(\omega)\cdot X_{КЗ}(\omega)} = R_C \square 0$$

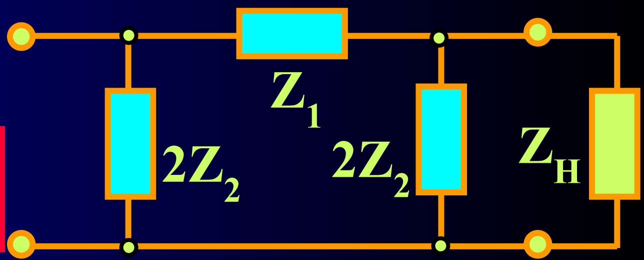
Следовательно, для того чтобы подкоренное выражение было положительным, значения $X_{XX}$ и $X_{КЗ}$ должны быть разными по знаку.

# 3. Фильтры нижних частот *типа «k»* и *типа «m»*

Классический реактивный фильтр называется ***фильтром типа k***, если произведение сопротивлений его продольного $Z_1(j\,\omega)$ и поперечного $Z_2(j\,\omega)$ плеч на любой частоте равно постоянному положительному числу, обозначаемому как $k^2$.



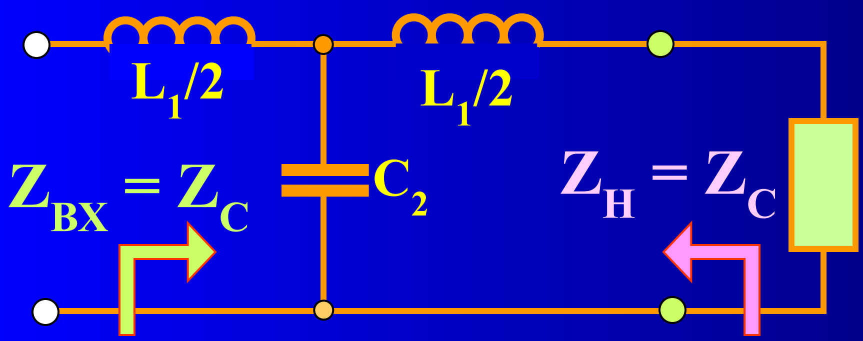

$$Z_1(j\omega)\cdot Z_2(j\omega)=k^2$$

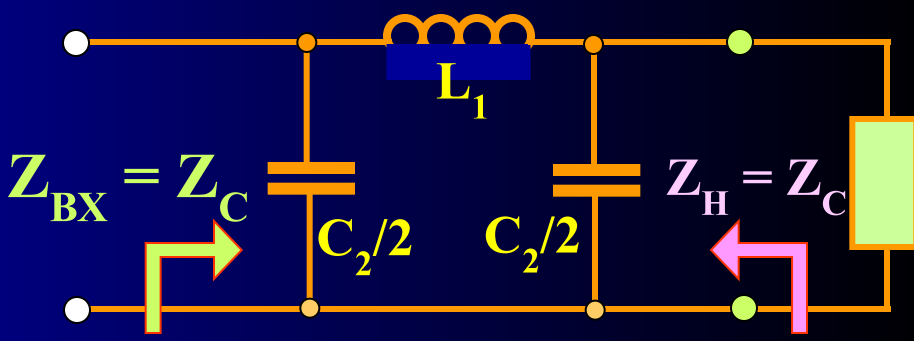



$$\rho_{0T}=\sqrt{0{,}25Z_1^2+Z_1Z_2}$$

Формулы для расчета **характеристических сопротивлений**

$$\rho_{0П}=\sqrt{\frac{Z_1Z_2}{1+Z_1/4Z_2}}$$

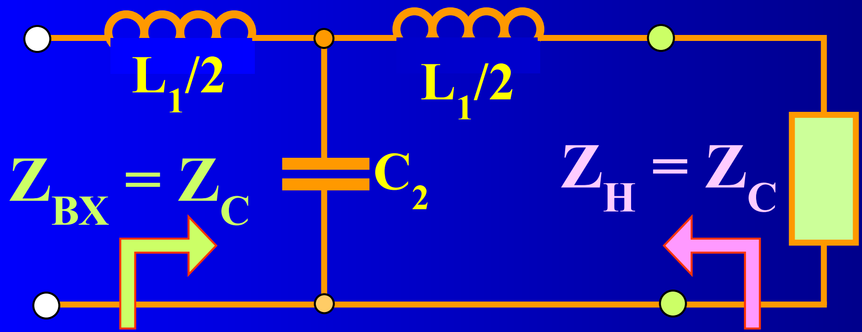


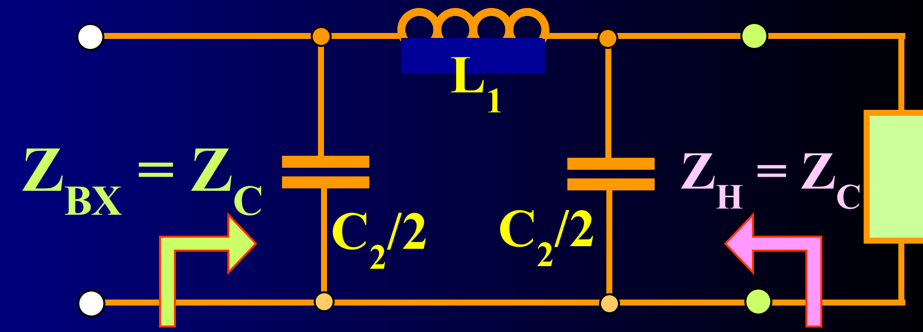




$$\rho_{0T}=\sqrt{\frac{L}{C}\Big(1-\frac{\omega^2LC}{4}\Big)}$$

$$\omega_0=\omega_{CP}=\frac{2}{\sqrt{LC}}\Rightarrow\rho_{0T}=\rho_{0П}$$

$$\rho_{0П}=\sqrt{\frac{L}{C}\Big(\frac{4}{4-\omega^2LC}\Big)}$$

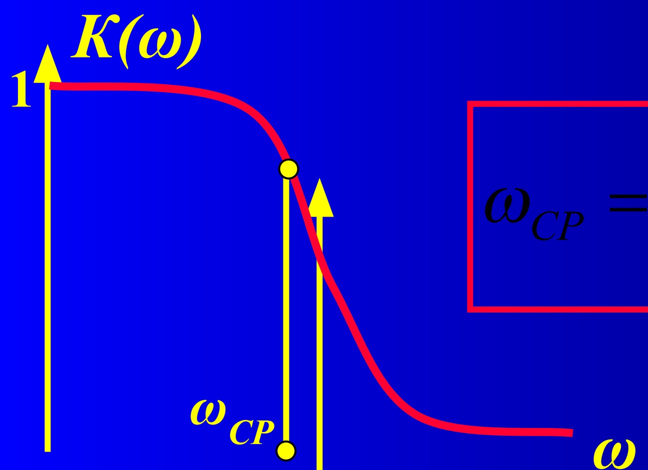



$$\rho_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C}\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4}\right)}$$

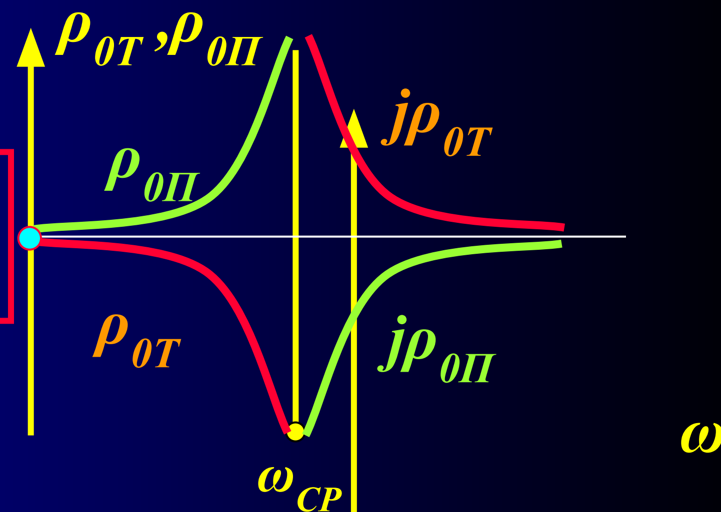
$$\omega_0 = \omega_{CP} = \frac{2}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \rho_{0T} = \rho_{0\Pi}$$

$$\rho_{0\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}\left(\frac{4}{4 - \omega^2 LC}\right)}$$




$$\omega_{CP} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

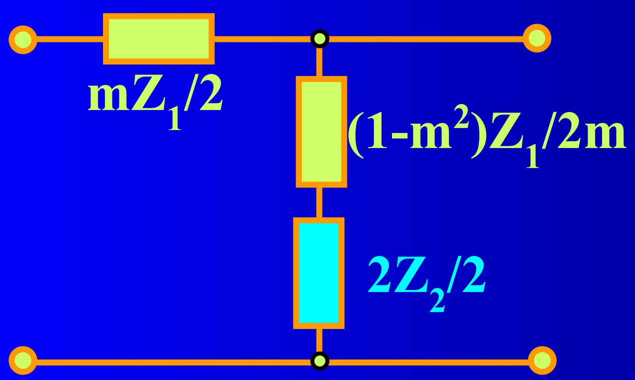



Для согласования реактивного фильтра нижних частот с нагрузкой сопротивление нагрузки на частоте ***ω = 0*** выбирают равным характеристическому сопротивлению звена фильтра

$$Z_H = R_H = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

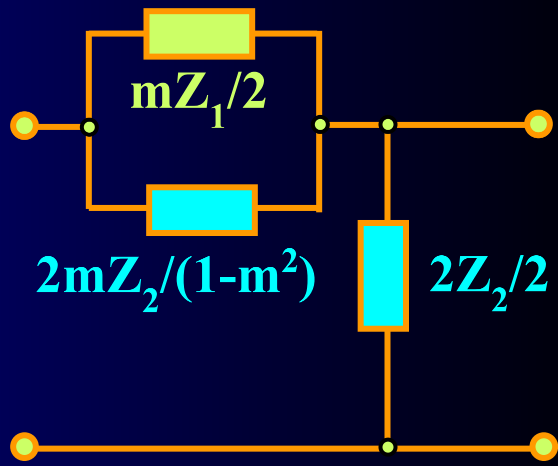
- Недостатком фильтров типа «k» является **медленное нарастание затухания** (ослабления) в полосе задерживания

Этот недостаток в определенной степени устраняются в **фильтрах типа «m» (**которые строятся обычно на базе фильтров типа «k»)

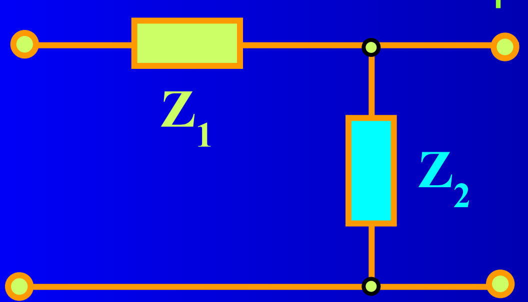


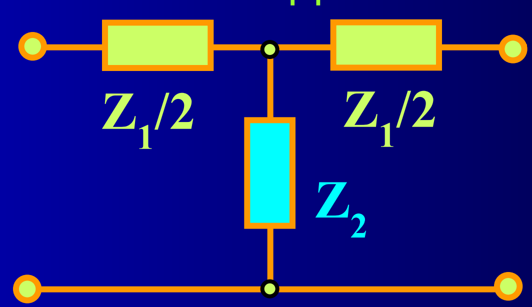

**Г – образные схемы фильтров типа «m»**

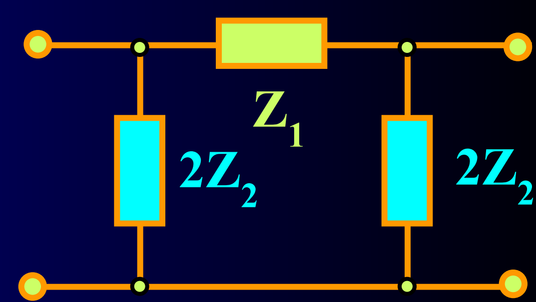
$$\boxed{0 \le m \le 1}$$




В таких фильтрах продольное или поперечное сопротивления изменяются таким образом, чтобы в в пределах полосы пропускания звена фильтра одно из характеристических сопротивлений $\rho_{0T}$ или $\rho_{0П}$ практически не зависело от частоты, а другое остается равным характеристическому сопротивлению исходного звена *k типа*



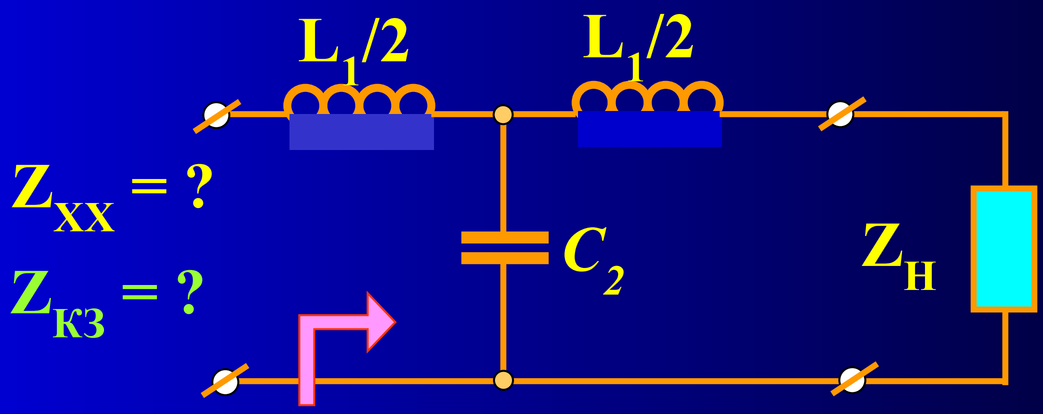



## Методика определения полосы пропускания классического фильтра

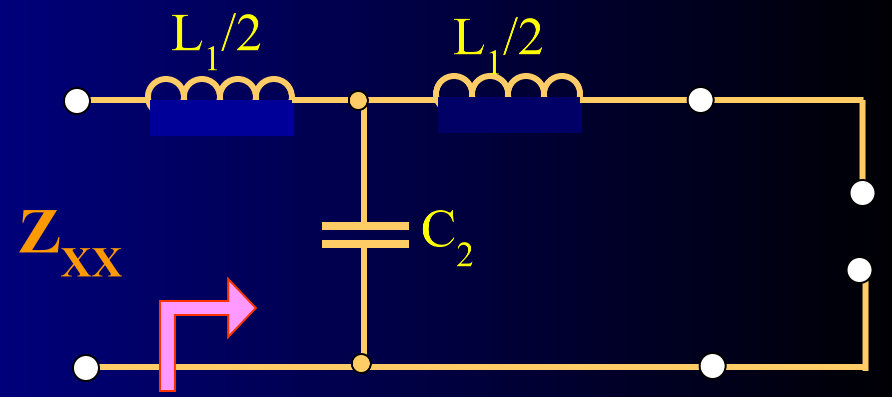
1. Найти операторные сопротивления $Z_{XX}(p)$ и $Z_{КЗ}(p)$ , а затем их нули $p_{0k}$ и полюса $p_k$ .

2. Размечают $p_{0k}$ и $p_k$ на мнимой оси и на каждом частотном интервале между ними определяют характер реакции («реактивности») фильтра отдельно для $Z_{XX}(p)$ и $Z_{КЗ}(p)$ ; зоны, где характер реакции $Z_{XX}$ и $Z_{КЗ}$ различен, определяют полосу пропускания.



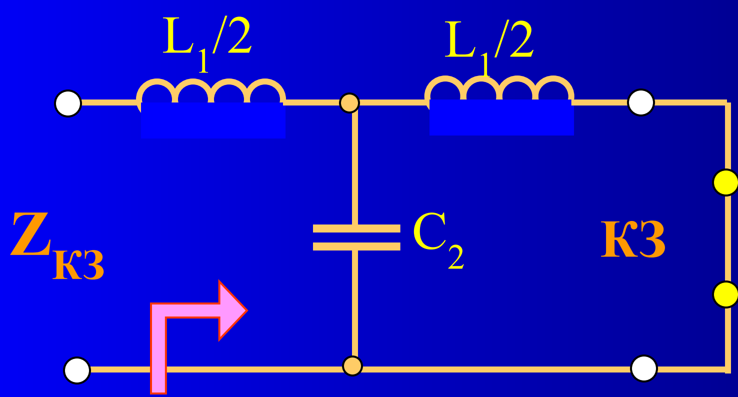
Определим сопротивление ХХ

$$Z_{XX}(p)=\frac{pL_1}{2}+\frac{1}{pC_2}=\frac{p^2L_1C_2+2}{2pC_2}$$




$$нули \to p_{01,02}=\pm j\sqrt{2/(L_1C_2)}, \to полюса \to p_1=0,\ p_2=\infty$$

Определим сопротивление КЗ

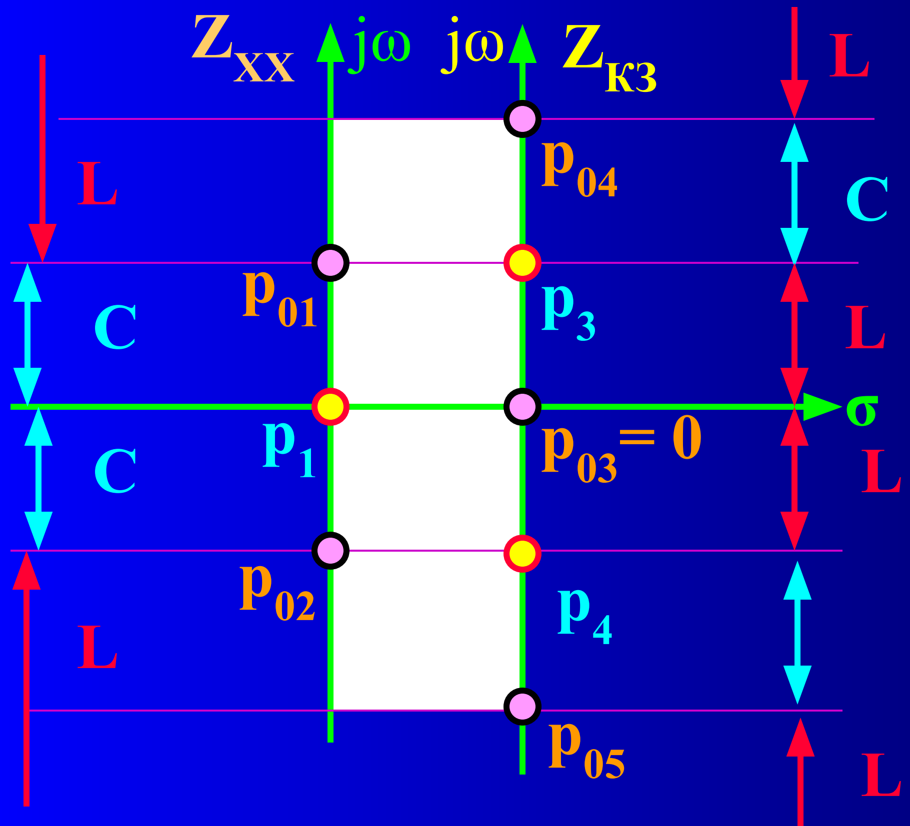


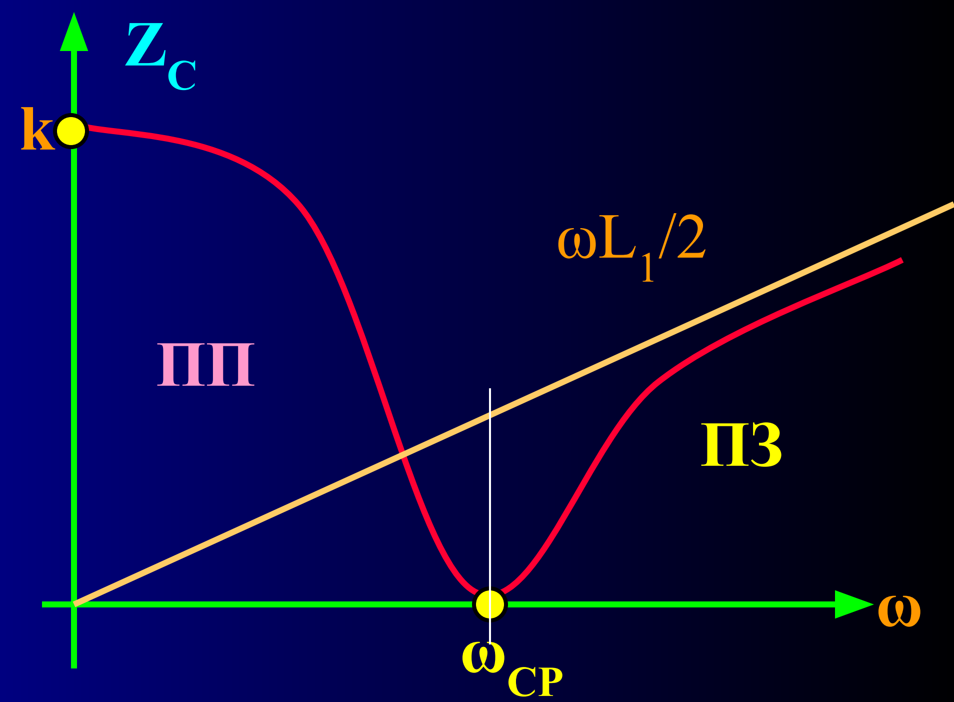

$$Z_{КЗ}(p)=\frac{pL_1}{2}+\left(pC_2+\frac{2}{pL_1}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{pL_1(p^2L_1C_2+4)}{2(p^2L_1C_2+2)}$$

$$нули \to p_{03}=0,\ p_{04,05}=\pm 2j\sqrt{L_1C_1},$$

$$полюса \to p_{3,4}=\pm j\sqrt{2/(L_1C_2)},\ p_5=\infty$$




Характеристическое сопротивление ФНЧ существенно зависит от частоты

$$Z_C(\omega) = \sqrt{Z_{XX}(\omega)\cdot Z_{КЗ}(\omega)} = \sqrt{\frac{L_1(-\omega^2 L_1 C_2 + 4)}{4C_2}} = k\sqrt{1-(\frac{\omega}{\omega_{CP}})^2}$$

частота среза ФНЧ

$$\omega_{CP} = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}$$

ФНЧ имеет в ПП чисто активный, а в ПЗ – чисто индуктивный характер $Z_C$

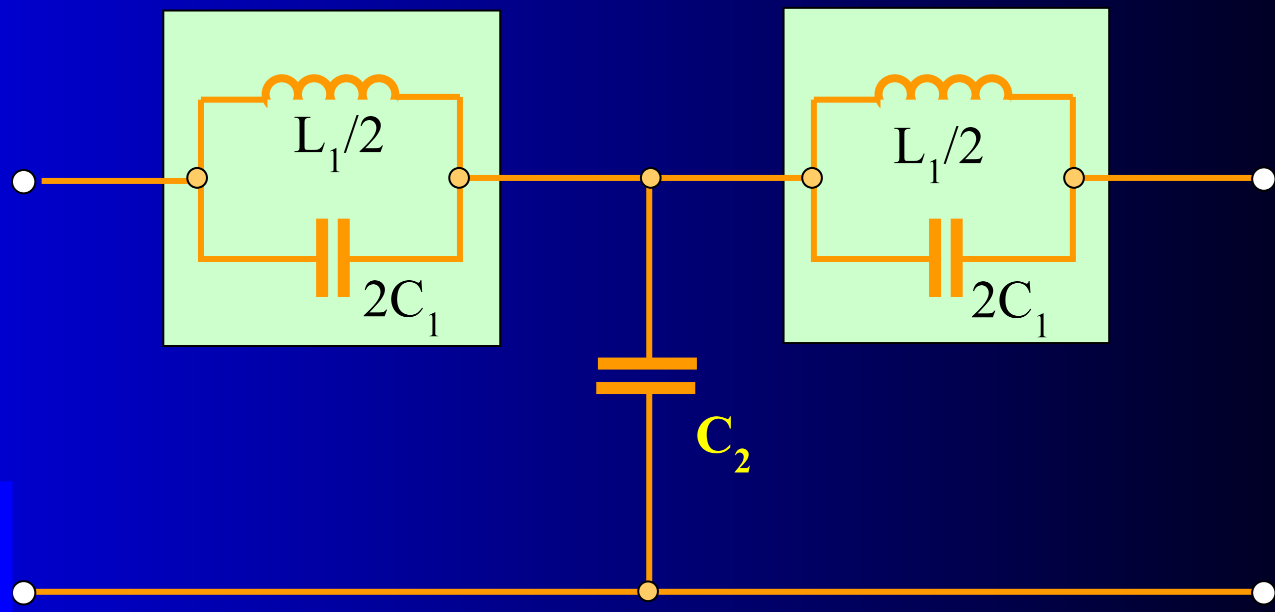
# 4. Полиномиальные фильтры.

Электрические фильтры с передаточной функцией вида

$$K(p) = \frac{1}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0}$$

принято называть **полиномиальными**

Фильтры, у которых на дополнительной резонансной частоте в полосе задерживания *вблизи частоты среза* $\boldsymbol{\omega_{CP}}$ АЧХ «*проваливается*» до нуля, благодаря чему она «*лучше приближается*» к идеальной принято относить к фильтрам типа ***m***.



## Фильтры Баттерворта

Фильтры, у которых квадрат АЧХ и рабочее ослабление описываются следующими зависимостями:

$$K^2(j\Omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\Omega^{2m}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 B_m^2(\Omega)}$$

$$A_P = 10\lg(1+\varepsilon^2\Omega^{2m}) = 10\lg\left[1+\varepsilon^2 B_m^2(\Omega)\right]$$

где $\varepsilon = \sqrt{10^{0,1 A_{P\max}} - 1}$

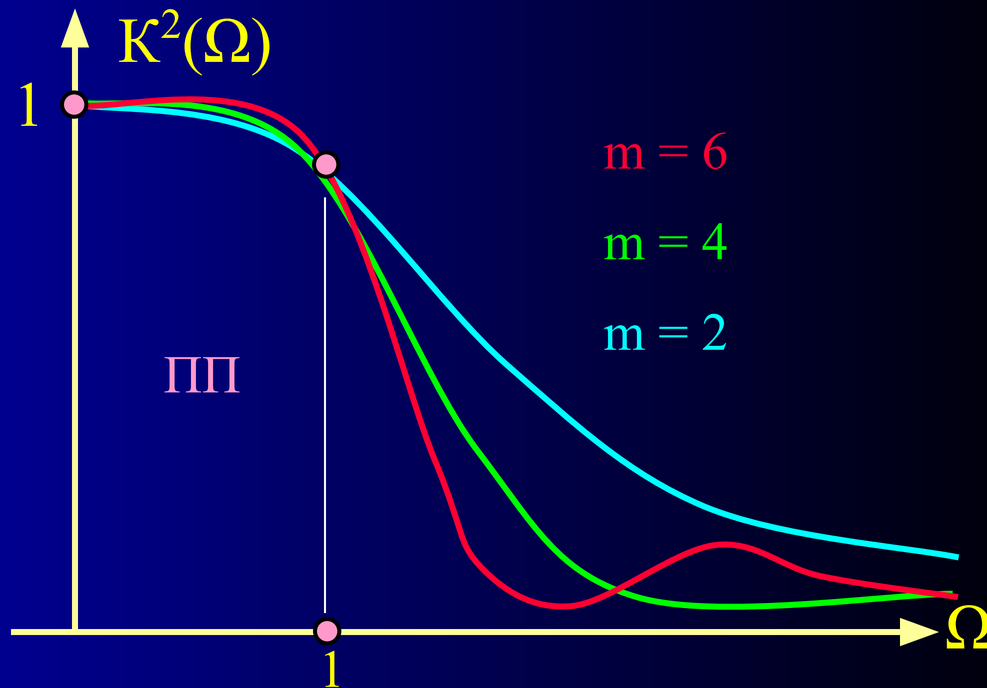
**Коэффициент неравномерности ослабления в полосе пропускания фильтра $A_{P\max}$, дБ**

$\Omega = \omega/\omega_{CP}$ – нормирующая частота

$\Omega^m = B_m(\Omega^m)$ – полиномы Баттерворта

Фильтры с максимально плоской АЧХ **m – го порядка**

Чем больше степень **m**, тем выше крутизна характеристик



## Фильтры Чебышева

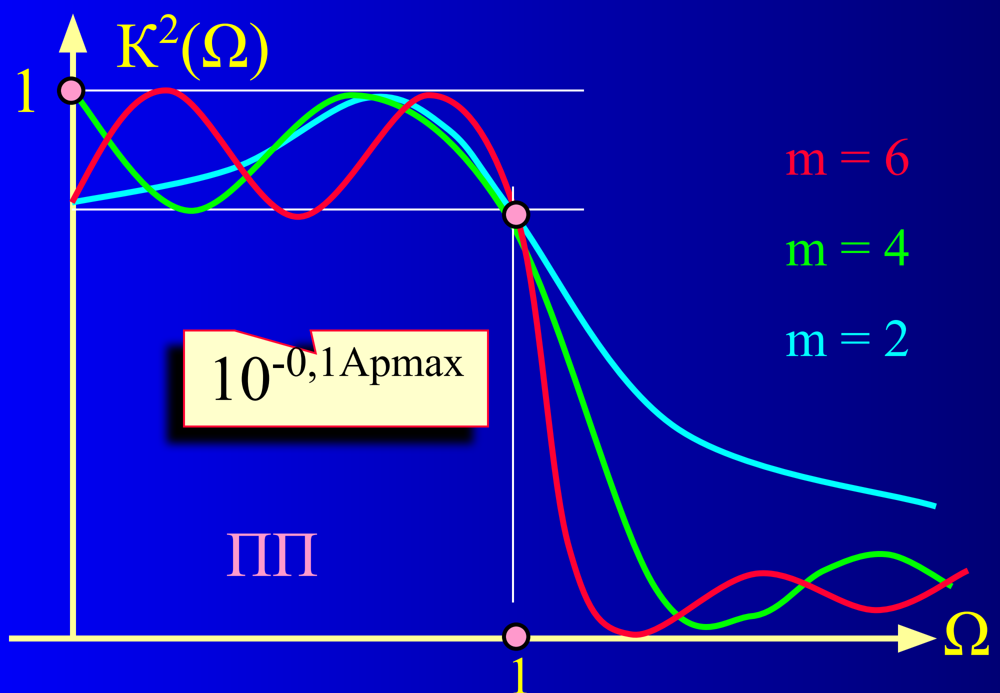
Фильтры с равномерно-колебательными частотными характеристиками вида

$$K^2(j\Omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_m^2(\Omega)}$$

$$A_P = 10\lg\left[1+\varepsilon^2 T_m^2(\Omega)\right]$$

где $\mathrm{T_m}(\Omega)$ – полиномы Чебышева

$$T_0(\Omega) = 1, \rightarrow T_1(\Omega) = \Omega, \rightarrow T_m(\Omega) = 2\Omega T_{m-1}(\Omega) - T_{m-2}(\Omega)$$

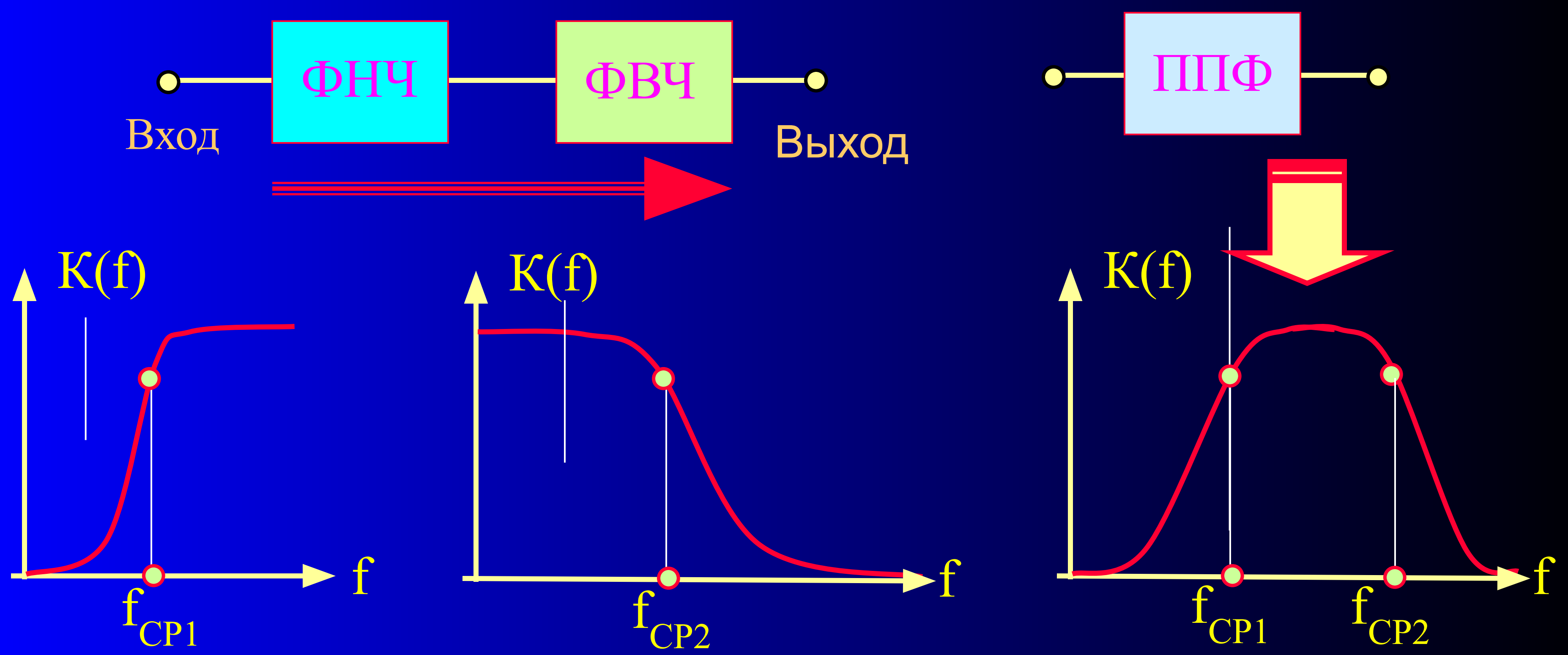


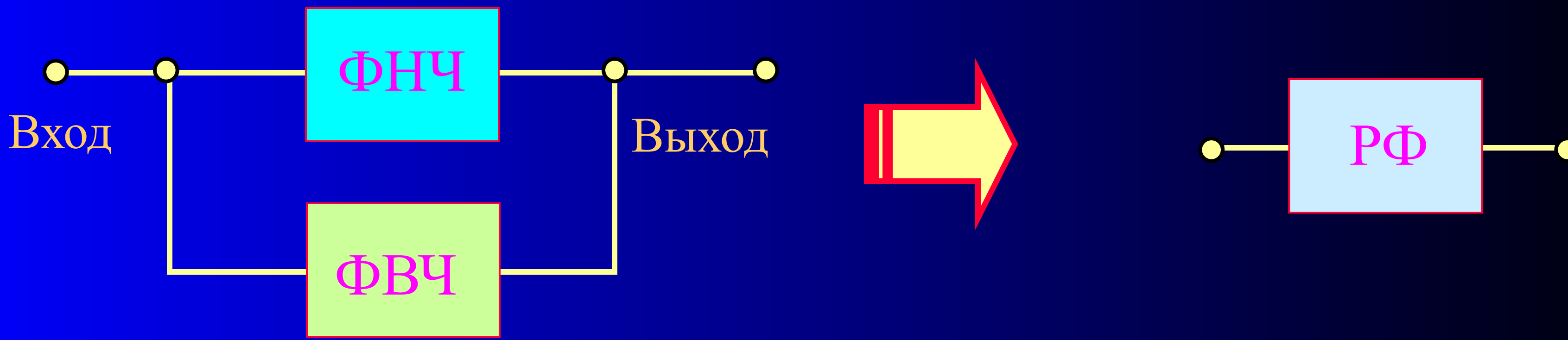

При одинаковом значении m из всех полиномиальных фильтров, ослабление которых в полосе пропускания не превышает $\mathbf{A_{pmax}}$, *наибольшее значение ослабления в полосе задерживания имеет фильтр Чебышева*

# 5. Понятия об активных фильтрах.

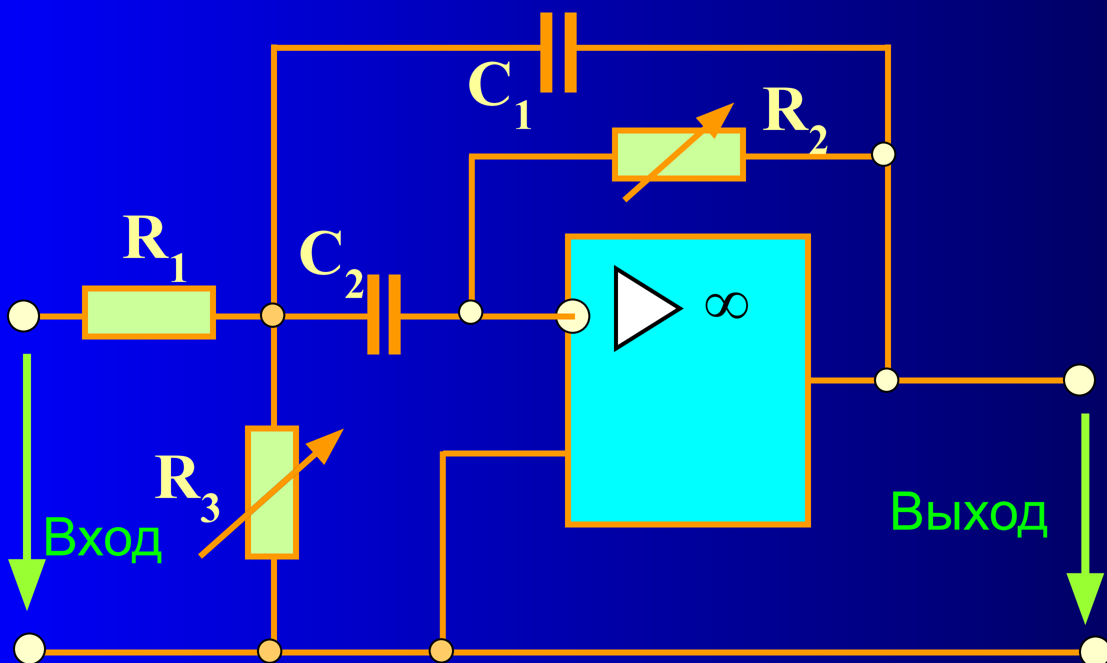
Используя операционный усилитель можно получить характеристику любого фильтра на пассивных элементах, причем схема активного фильтра не содержит катушек индуктивности.

Активные фильтры рассчитывают в основном на получение характеристик Баттерворта потому, что ФНЧ легко преобразовать в ФВЧ простой заменой местами его резисторов и конденсаторов. При этом добротность и частота среза фильтра не изменяются.






Активные RC фильтры представляют собой комбинацию пассивной RC – цепи и активного фильтра (операционного усилителя).




$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1+\frac{R_1}{R_3}}{1+\frac{C_2}{C_1}}}$$

$$K_U = \frac{R_1 C_1}{R_2 (C_1 + C_2)}$$

Регулировка добротности осуществляется с помощью резистора **$R_3$**, а частота устанавливается одновременной регулировкой **$R_3$** и **$R_2$**

# Задание на самостоятельную работу

***Литература:***


1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 169 –187.
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 208 –227.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 128 –132.
4. Фрикс В.В. Основы теории цепей: *Учебное пособие для межвузовского использования вузов*, - М.: Радио Софт, 2002 г, с. 250 –259.