

**Кубанский государственный технологический университет**  
**Институт информационных технологий и безопасности**  
Кафедра компьютерных технологий и информационной  
безопасности

**Учебная дисциплина**

**Электротехника и электроника**

**Лекция № 7**

**Резонанс**

**в электрических цепях**

### Учебные вопросы:

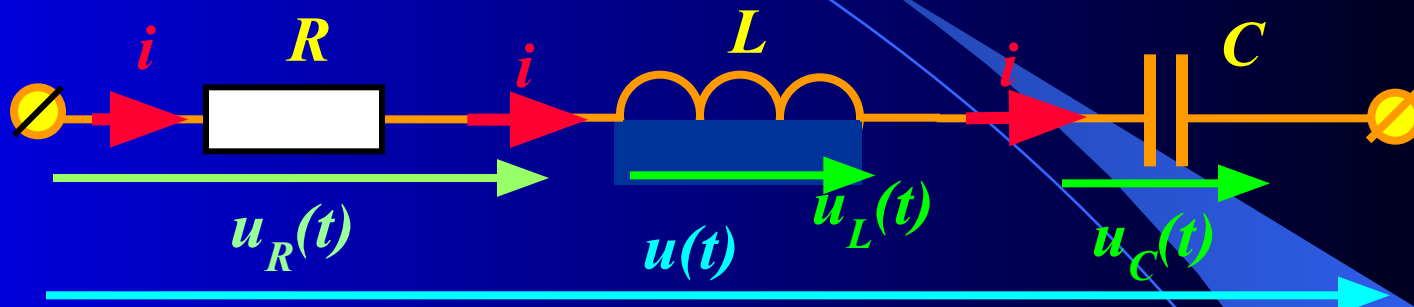
1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.
2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.
3. Полоса пропускания колебательного контура.

### Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 105 – 113
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.

# 1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

Резонанс напряжений возможен на участке ЭЦ, содержащей последовательно соединенные: резистивный - R, индуктивный - L и емкостной - C элементы.



Действующее значение тока в цепи на основании закона Ома

$$\dot{I} = I(j\omega) = I \cdot e^{j\varphi_I} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U}}{Z \cdot e^{j\varphi_Z}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{j(\varphi_U - \varphi_Z)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{j\varphi_I}$$

$$Z = Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Модуль комплексного сопротивления цепи (последовательного контура)

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{X(\omega)}{R}, & X(\omega) \geq 0 \\ -\arctg \frac{X(\omega)}{R}, & X(\omega) < 0 \end{cases}$$

Аргумент Z характеризует сдвиг фаз между U и I

Режим работы неразветвленного участка цепи, содержащей последовательно соединенные резистивный - R, индуктивный - L и емкостной - C элементы, при котором ее ток и напряжение совпадают по фазе называется **резонансом напряжений**

$$I = I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \rightarrow \max? = 0$$

При резонансе  $\phi = 0$ , если  $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C = 0$ , что может быть выполнено лишь для некоторой частоты  $\omega = \omega_0$ . В этом случае

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Leftrightarrow \omega_0^2 LC = 1$$

$$I_0 = I(\omega_0) = I_{\max} = \frac{U}{R} \rightarrow \text{var}[L, C \rightarrow \text{или} \rightarrow \omega]$$

В последовательном контуре из токов с различными частотами выделяется ток, только одной определенной частоты

Частота входного напряжения при которой наступает резонанс, обозначается  $\omega_0$  и называется резонансной или собственной частотой последовательного колебательного контура.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \rightarrow \text{или} \rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

Реактивные сопротивления контура на частоте  $\omega_0$  равны друг другу.

$$X_L(\omega_0) = X_C(\omega_0) = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \rightarrow [Ом]$$

Характеристическое (волновое) сопротивление контура

Резонансные свойства (избирательность) контура



$$Q = \frac{\rho}{R}$$

или

$$d = \frac{1}{Q}$$

Пример: Пусть  $U = 12 В$ ,  $X_L(\omega_0) = X_C(\omega_0) = 500 Ом$ ,  $R = 6 Ом$ .

Значение тока на резонансной частоте

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{12}{6} = 2 А$$

$$U_{C0} = I_0 X_C(\omega_0) = U_{L0} = I_0 X_L(\omega_0) = 2 \cdot 500 = 1000 В$$

$$U_{R0} = I_0 R = 2 \cdot 6 = 12 В, \rightarrow m.e. \rightarrow U_{C0} = U_{L0} \gg U_{R0}$$

Физический смысл добротности

$$\frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{U} = \frac{I_0}{U \omega_0 C} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C \cdot R}} = \frac{\rho}{R} = Q$$

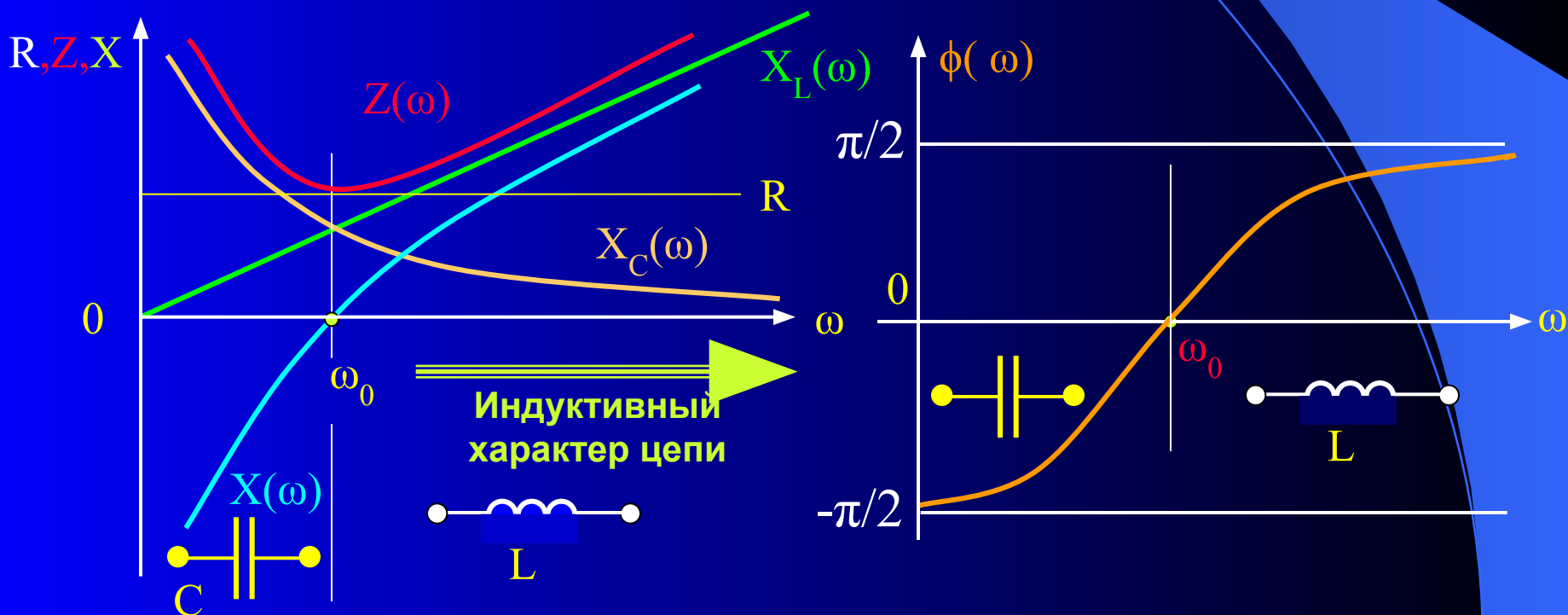
Добротность показывает, во сколько раз резонансные напряжения на реактивных элементах превышают приложенное напряжение (напряжение источника входного сигнала)  $\Rightarrow$  термин «резонанс напряжений»

# Частотные характеристики последовательного контура

Анализ характера уравнений напряжений и токов в RLC цепи показывает, что они все являются частотно-зависимыми.

$$X_L(\omega) = \omega L, \rightarrow X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}, \rightarrow X(\omega) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \rightarrow \varphi(\omega) = \arctg \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

$X_L(\omega), X_C(\omega), X(\omega), Z(\omega) \Rightarrow$  частотные характеристики цепи,  
 $\varphi(\omega) \Rightarrow$  фазочастотная характеристика цепи



Рассмотрим частотные зависимости действующих значений тока в цепи и напряжений на реактивных элементах контура.

$$I(\omega) = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

$$I_0 = I_{\max} = \frac{U}{R}, \rightarrow \text{при } \omega = \omega_0$$

$$U_L(\omega) = I(\omega)X_L(\omega) = \frac{U \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

$$\omega_{L0} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \square \omega_0$$

$$U_C(\omega) = I(\omega)X_C(\omega) = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

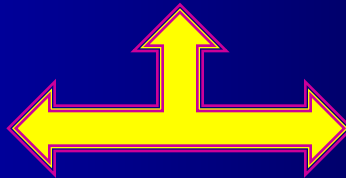
$$\omega_{C0} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \square \omega_0$$

Экстремумы на частоте

Зависимости  $I(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$ ,  $U_C(\omega)$  – называются амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ) относительно тока и напряжений, или резонансными характеристиками.

Для нахождения экстремумов  $U_L(\omega)$ ,  $U_C(\omega)$  необходимо:

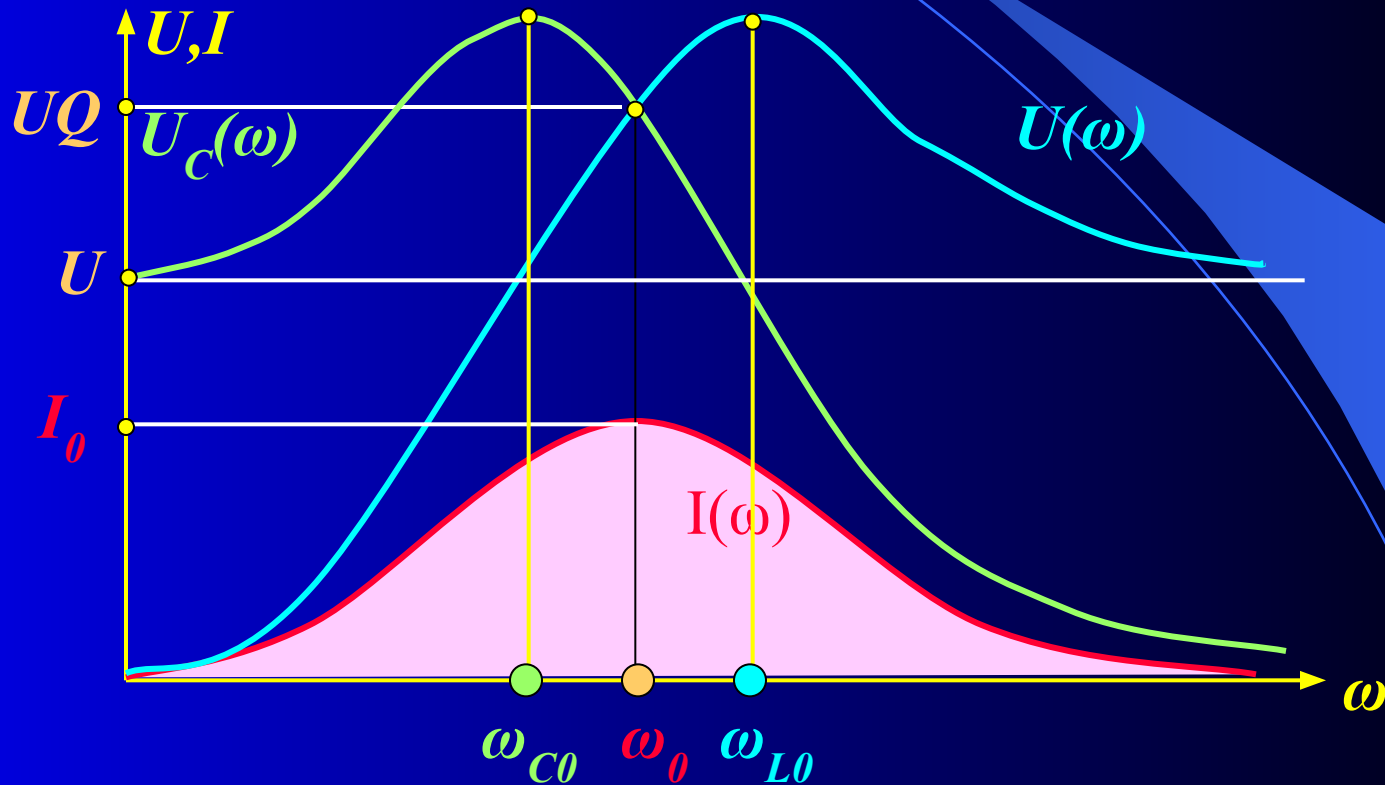
$$\frac{\partial U_L(\omega)}{\partial \omega} = 0$$



$$\frac{\partial U_C(\omega)}{\partial \omega} = 0$$

На частотах  $\omega_{L0}$  и  $\omega_{C0}$  напряжения на реактивных элементах контура примут максимальное значение.

$$U_{C_{\max}} = U_{L_{\max}} = \frac{2UQ^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{2U}{d\sqrt{4 - d^2}}$$

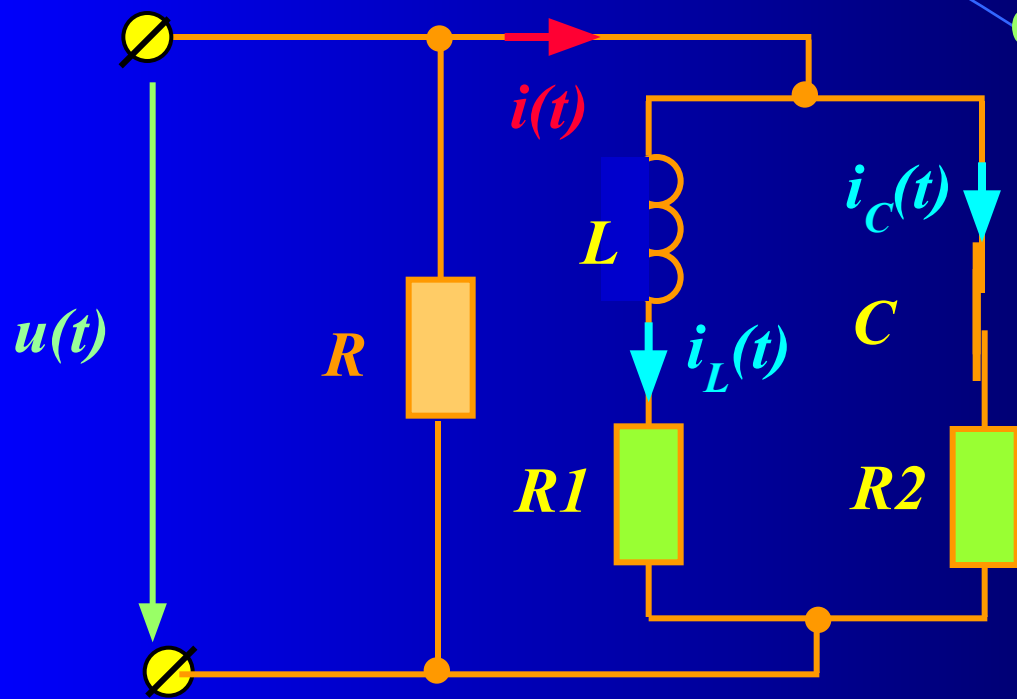


С увеличением добротности контура (уменьшением затухания) частоты  $\omega_{L0}$  и  $\omega_{C0}$  сближаются с резонансной частотой  $\omega_0$ , при этом  $I_0$ ,  $U_L(\omega)$ ,  $U_C(\omega)$  возрастают и кривые становятся острее.



## 2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

Резонанс токов возможен на участке ЭЦ, в которой катушка индуктивности – L и конденсатор – C включены параллельно источнику сигнала.



Сопротивления R1 и R2 учитывают потери в ветвях контура

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

$$B_1 = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + (1/\omega C)^2}$$

$$B_2 = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \\ &= G_1 + G_2 - j(B_1 - B_2) = G - jB \end{aligned}$$

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_1^2 + (1/\omega C)^2}$$

Рассмотрим случай  $-jB_1 + jB_2 = 0$

Равенство выполняется на частоте резонанса  $\rightarrow$   
 $\omega_P$

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}; \rightarrow \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}; \rightarrow \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Условие резонанса

$$R_1 < \rho, R_2 < \rho \text{ или } R_1 > \rho, R_2 > \rho$$

Реактивные составляющие токов при резонансе равны друг другу

$$I_{P1} = U \cdot B_1 = I_{P2} = U \cdot B_2 = U \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = U \frac{1/\omega C}{R_1^2 + (1/\omega C)^2}$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I_0 = U \cdot G_{0Э} = \frac{U}{R_{0Э}}$$

$R_{0Э}$  – эквивалентное резонансное сопротивление контура

Режим работы участка цепи с параллельными ветвями, **при котором ток в неразветвленной части и напряжение на выводах контура совпадают по фазе** называется **резонансом токов**

При этом эквивалентное резонансное сопротивление параллельного контура

$$R_{0Э} = \frac{\rho^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow \infty$$

Наибольший теоретический и практический интерес представляют резонанс токов в контурах **без потерь** ( $R_1 = R_2 = 0$ ) и с малыми потерями ( $R_1 \ll \rho, R_2 \ll \rho$ )

# Контур без потерь ( $R_1 = R_2 = 0$ )

Уравнение резонансной частоты

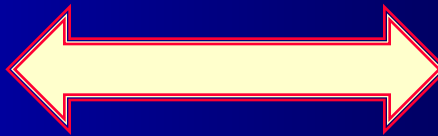


$$\omega_P = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Эквивалентное сопротивление контура без потерь  $R_{0Э} = \infty$  и входной ток равен нулю, а добротность обращается в бесконечность.

Комплексные действующие значения токов в ветвях контура:

$$\dot{I}_1 = \frac{U}{j\omega_0 L} = \frac{U}{\rho} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



$$\dot{I}_2 = Uj\omega_0 C = \frac{U}{\rho} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

## Контур с малыми потерями ( $R_1 \ll \rho, R_2 \ll \rho$ )

$$\omega_P \approx \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

при  
условии

$$\rho^2 \gg R_1 R_2$$

$$R_{0Э} \approx \frac{\rho^2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho^2}{R_\Sigma} = Q^2 R_\Sigma$$

Токи в  
контуре

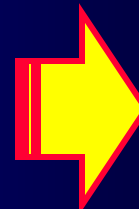
$$I_0 = \frac{U}{R_{0Э}} = \frac{U}{Q^2 R_\Sigma}$$

$$\dot{I}_1 \approx \frac{U}{j\omega_0 L} \approx \frac{U}{\rho} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{I}_2 \approx Uj\omega_0 C \approx \frac{U}{\rho} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{\rho} = \frac{U}{QR_\Sigma}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{I_2}{I_0} = \frac{U / (Q^2 R_\Sigma)}{U / (Q R_\Sigma)} = Q$$

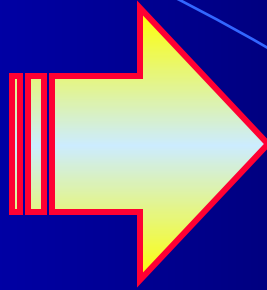


Отсюда и название  
резонанс токов

# Частотные характеристики параллельного контура

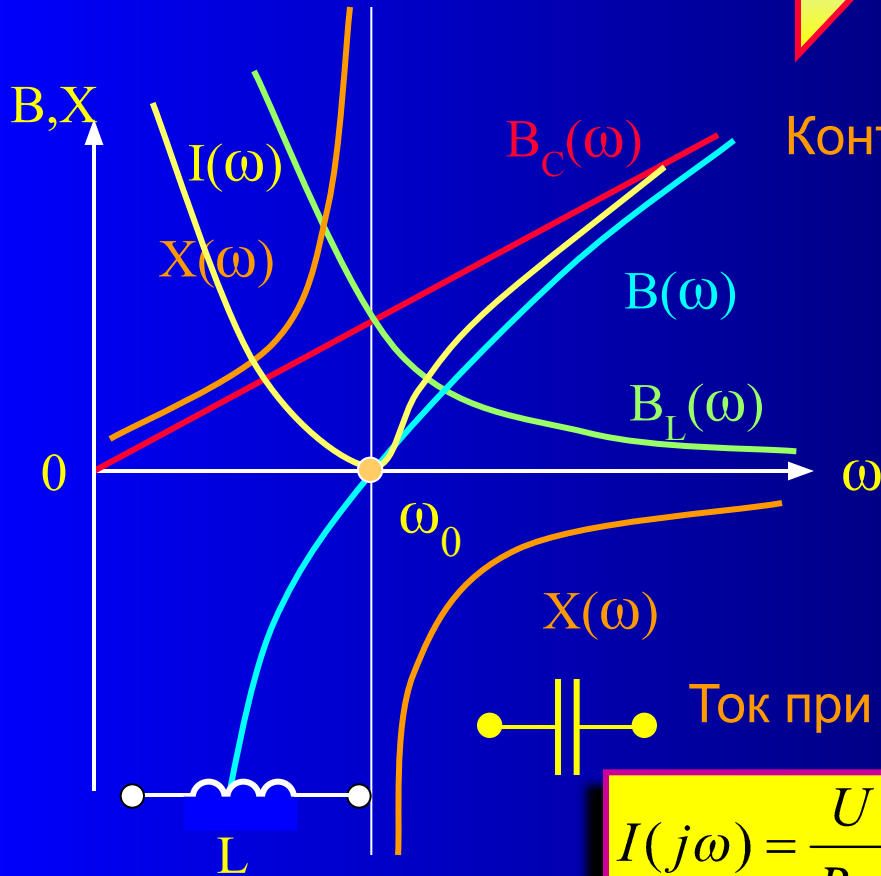
Контур без потерь ( $R_1 = R_2 = 0$ )

Частотные зависимости параметров контура имеют вид



$$B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}, \rightarrow B_C(\omega) = \omega C$$

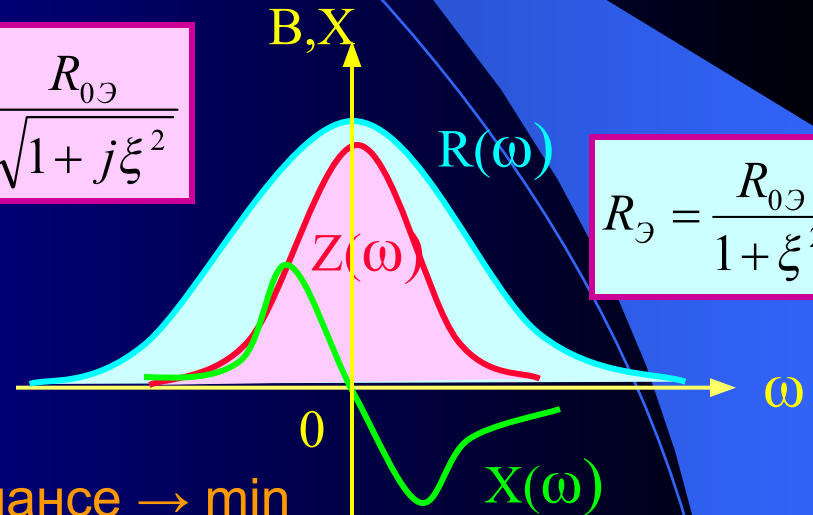
$$B(\omega) = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right), \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{B(\omega)}$$



Контур с малыми потерями ( $R_1 \ll \rho, R_2 \ll \rho$ )

$$Z_{\partial} = \frac{R_{0\partial}}{\sqrt{1 + j\xi^2}}$$

$$R_{\partial} = \frac{R_{0\partial}}{1 + \xi^2}$$

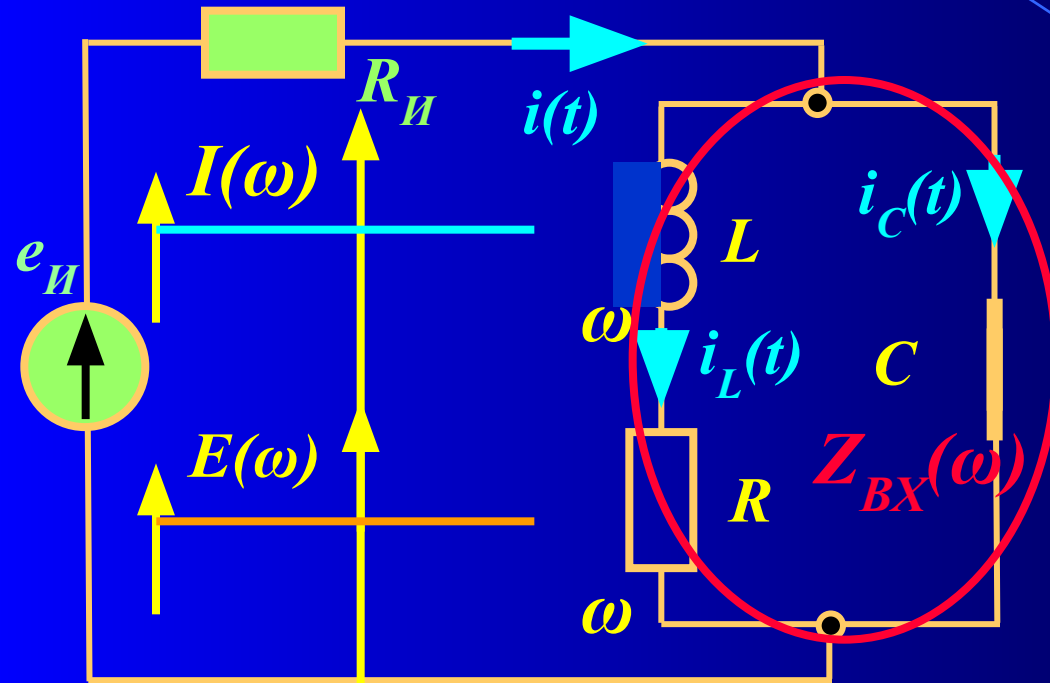


Ток при резонансе  $\rightarrow \min$

$$I(j\omega) = \frac{U}{R_{0\partial}} (1 + j\xi) = I_0 (1 + j\xi)$$

$$X_{0\partial} = \frac{-R_{0\partial} \cdot \xi}{1 + \xi^2}$$

В реальном параллельном колебательном контуре резонансные избирательные характеристики зависят от соотношения сопротивления контура  $Z_{BX}(\omega)$  и внутреннего сопротивления  $R_{И}$  источника входного сигнала



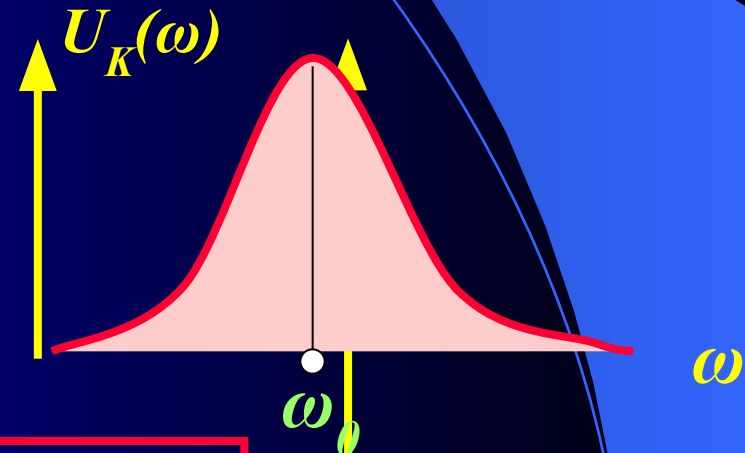
Сопротивление контура  $Z_{BX}(\omega)$  совместно с внутренним сопротивлением источника  $R_{И}$  образуют делитель напряжения

1) При  $R_{И} > Z_{BX}(\omega)$

$$I(\omega) = \frac{e_{И}}{R_{И} + Z_{BX}(\omega)} \approx \frac{e_{И}}{R_{И}} \rightarrow const$$

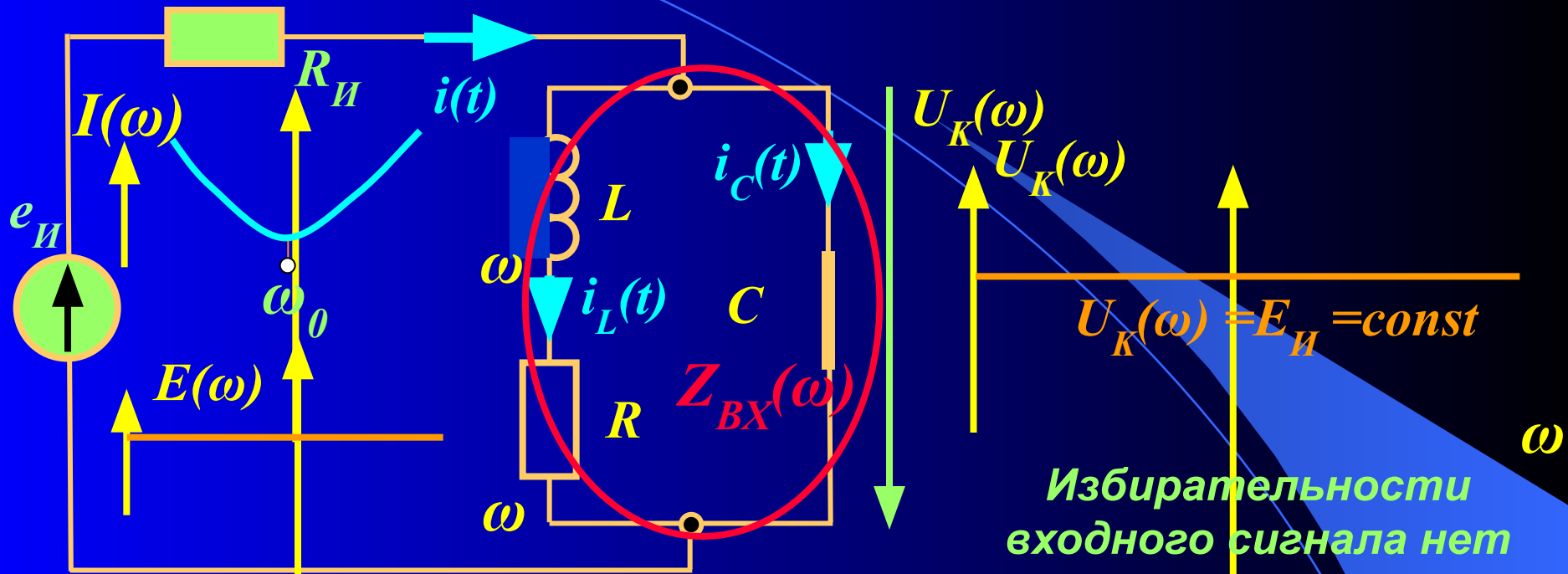
$$U_K(\omega) = \frac{e_{И}}{R_{И}} \cdot Z_{BX}(\omega) \rightarrow var$$

$$K_{ДН}(\omega) = \frac{Z_{BX}(\omega)}{R_{И}} \rightarrow мал$$



Необходимо усиление  $U_K(\omega)$

2) При  $R_{И} < Z_{ВХ}(\omega)$



$$I(\omega) = \frac{e_{И}}{R_{И} + Z_{ВХ}(\omega)} \approx \frac{e_{И}}{Z_{ВХ}(\omega)} \rightarrow \text{var}$$

$$U_K(\omega) = \frac{e_{И}}{Z_{ВХ}(\omega)} \cdot Z_{ВХ}(\omega) = e_{И} = \text{const}$$

Избирательности  
входного сигнала нет

Параллельный  
колебательный  
контур включают в  
цепи, обладающие

$$R_{И} \ll Z_{ВХ}(\omega)$$

### 3. Полоса пропускания колебательного контура.

Избирательностью называется способность колебательного контура выделять сигналы заданной частоты и уменьшать (подавлять) сигналы всех других частот.

Контур с лучшей избирательностью обладает большей добротностью

*Избирательность характеризуется формой амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) контура*

Полосой пропускания называется область частот, вблизи резонансной частоты, в пределах которой напряжение (ток, модуль коэффициента передачи) уменьшается в заданное число раз (чаще всего в  $\sqrt{2}$  раз).

#### □ Последовательный колебательный контур

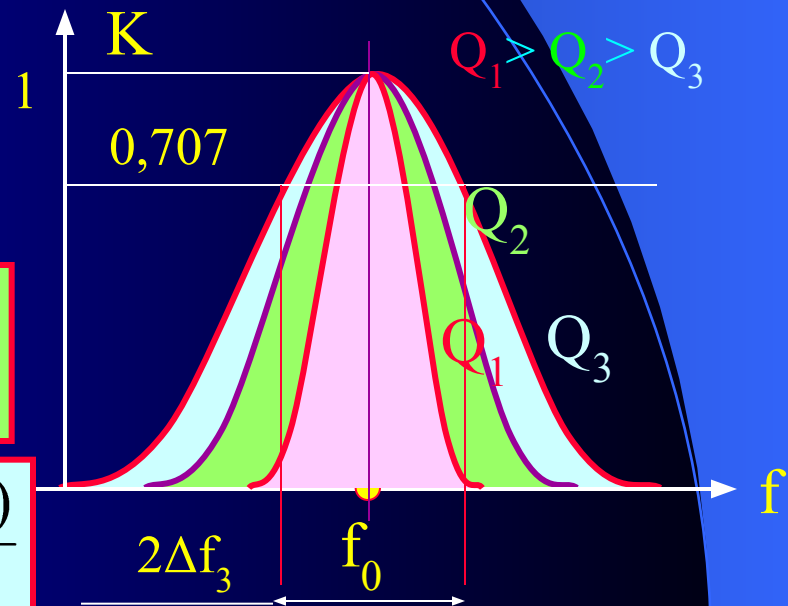
Нормированная АЧХ ( $U_{\text{ВЫХ}} = U_C$ )

$$K_U = \frac{K(f)}{K(f_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q\Delta f / f_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

Полоса пропускания

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \rightarrow [\Gamma\Omega]$$

$$\uparrow 2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot (R + R_H)}{\rho} \rightarrow \frac{f_0 \cdot (R + R_i)}{\rho}$$



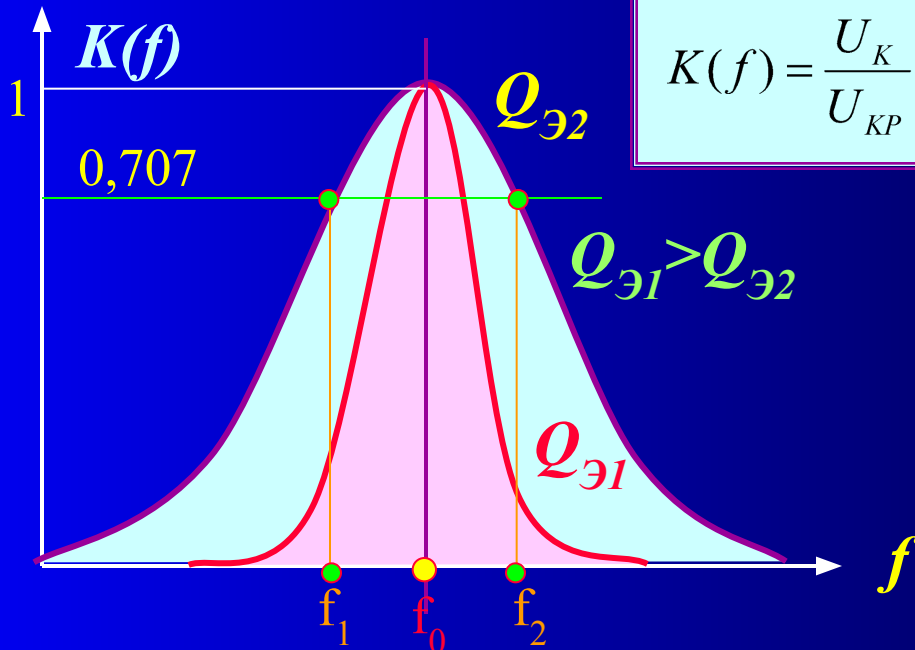
## □ Параллельный колебательный контур

Обобщенная расстройка

$$\xi_{\text{об}} = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Полоса пропускания параллельного контура определяется выражением:

$$2\Delta f = \frac{f_P}{Q_{\text{Э}}} = \frac{f_P}{Q} = \frac{f_0 \cdot (1 + R_{0\text{Э}}/R_i)}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\rho}{R}; Q_{\text{Э}} = \frac{Q}{1 + R_{0\text{Э}}/R_i}$$



$$K(f) = \frac{U_K}{U_{KP}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{\text{Э}}^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

Граничные частоты

$$f_{1,2} = \frac{f_0}{2Q_{\text{Э}}} (\sqrt{1 + 4Q_{\text{Э}}^2} \pm 1)$$

$$2\Delta f = |f_2 - f_1|$$



# Расширение полосы пропускания

На практике в ряде случаев требуется существенно расширить полосу пропускания контура, не изменяя его резонансной частоты. ( $Q \downarrow \rightarrow R$ ) или ( $\rho \downarrow$  - применяется редко  $\rightarrow$  необходимо изменять одновременно L и C)

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \rightarrow [\Gamma u]$$

$$2\Delta f = \frac{f_P}{Q_{\Sigma}} = \frac{f_P}{Q_{\Sigma}}$$

Практически часто уменьшают добротность за счет увеличения активного контура двумя путями:

- введением в контур добавочного сопротивления  $R_D$ ;
- шунтированием контура резистором  $R_{Ш}$ .

Сопротивление добавочного резистора рассчитывают по формуле

$$R_D = \frac{2\Delta f_{ТРЕБ} \cdot \rho}{f_0}$$

Подключение к контуру шунтирующего резистора  $R_{Ш}$  эквивалентно включению последовательно с элементами контура добавочного резистора  $R_D$

$$R_{Ш} = \frac{\rho^2}{R_D}$$

$$R_D = \frac{\rho^2}{R_{Ш}}$$

# Задание на самостоятельную работу

## Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 105 – 113
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.