# Лекция 8а

## ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Вырожденные и невырожденные коллективы частиц.
2. Классические и квантовые статистики. Функция распределения.
3. Фазовое пространство микрочастицы и его квантование.
4. Плотность состояний. Критерий невырожденности идеального газа.
5. Функция распределения для невырожденного газа.

# ВЫРОЖДЕННЫЕ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КОЛЛЕКТИВЫ ЧАСТИЦ

Свойства коллектива частиц как целого зависят от специфики частиц. Различают два вида коллективов частиц.

Пусть на $N$ одинаковых частиц приходится $G$ различных состояний, в которых может находиться отдельная частица.

Если число различных вакантных (свободных) состояний много больше числа микрочастиц ($G \gg N$), то свойства коллектива как целого не будут зависеть от специфики микрочастиц, из которого он состоит.

Такие коллективы называются *невырожденными*.

*Условие невырожденности*:

$$\boxed{\frac{N}{G} \ll 1}$$

# ВЫРОЖДЕННЫЕ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КОЛЛЕКТИВЫ ЧАСТИЦ

Если число состояний $G$ оказывается одного порядка с числом частиц $N$, т.е.

$$\frac{N}{G} \approx 1$$

то тогда возможно заселение частицами некоторых состояний не поодиночке, а группой.

В этом случае специфика микрочастицы проявляется в полной мере, оказывая значительное влияние на свойства коллектива как целого.

Такие коллективы называются *вырожденными*.

# КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Статистика, изучающая свойства невырожденных коллективов - *классическая* статистика или *статистика Максвелла – Больцмана*.

*Квантовая* статистика – это раздел статистической физики, исследующий свойства вырожденных коллективов.

По коллективным свойствам частицы делятся на *фермионы* и *бозоны*.

Фермионы – это частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны.

Бозоны – это частицы с нулевым или целочисленным спином (например, фотоны).

Для этих двух групп частиц существуют разные квантовые статистики.

Квантовую статистику фермионов называют *статистикой Ферми – Дирака*, а статистику бозонов – *статистикой Бозе – Эйнштейна.*

# КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Состояние частиц описывается *полной статистической функцией распределения*.

Полную функцию распределения $N(E)dE$ представляют в виде произведения числа состояний ***q(E)dE***, приходящихся на интервал энергий ***dE***, на вероятность ***f(E)*** заполнения частицами этих состояний:

$$N(E)dE = q(E)dE\, f(E)$$

Функцию ***f(E)*** называют просто *функцией распределения.*

Таким образом, отыскание полной функции распределения частиц по состояниям сводится к решению двух задач:

1. Отыскание функции ***q(E)dE***, описывающей распределение состояний по энергиям;

2. Отыскание функции ***f(E)***, определяющей вероятность заполнения этих состояний частицами.

# ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО МИКРОЧАСТИЦЫ И ЕГО КВАНТОВАНИЕ.

Для применения статистического метода нахождения функций распределения используется особая система координат – *фазовое пространство*.

Введем в рассмотрение воображаемое шестимерное пространство с взаимно перпендикулярными осями $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{p_x}$, $\boldsymbol{p_y}$, $\boldsymbol{p_z}$.

Такое пространство называют *фазовым μ-пространством*.

Положение точки в шестимерном фазовом пространстве определяется шестью координатами.

В *μ-пространстве* рассматриваются бесконечно малые области в виде кубических ячеек в пространстве координат и пространстве импульсов (элементарные объёмы).

# ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО МИКРОЧАСТИЦЫ И ЕГО КВАНТОВАНИЕ.

Особенность описания поведения квантовой частицы в фазовом пространстве: необходимо учитывать принцип неопределенностей.

Ячейки необходимо взять таких размеров, чтобы произведение объема ячейки (элемента объема) пространства координат $\Delta\Gamma_V$ на объем ячейки пространства импульсов $\Delta\Gamma_P$ было порядка $h^3$:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_V \cdot \Delta\Gamma_p = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \cdot (\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p)_z \sim h^3$$

$\Delta\Gamma$ по смыслу называется элементом объема шестимерного фазового пространства.

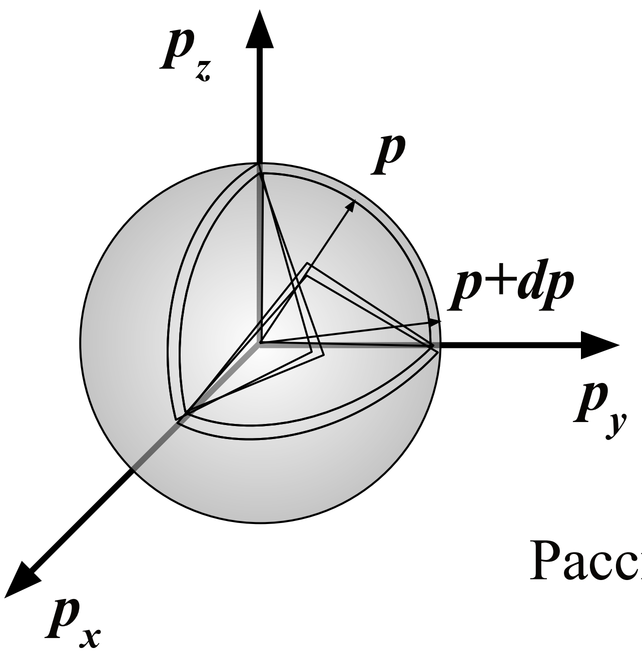
Формулировка записанной формулы:

*Различным элементам объема шестимерного фазового пространства будут отвечать различные квантовые состояния микрочастицы лишь в том случае, если размер этих элементов объема не меньше* $h^3$.

*Процесс деления фазового пространства на ячейки конечной величины ($h^3$ или $h^3/V$) называется квантованием фазового пространства*.

# ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

Итак, отыскание полной функции распределения частиц по состояниям мы разделили на два этапа.




На первом этапе необходимо определить вид функции ***q(E)dE***, описывающей распределение состояний по энергиям.

Проведем в пространстве импульсов две сферы радиусами ***p*** и ***p+dp***.

Между этими сферами находится шаровой слой объемом $4\pi p^2 dp$.

Рассмотрим простой случай свободных частиц.

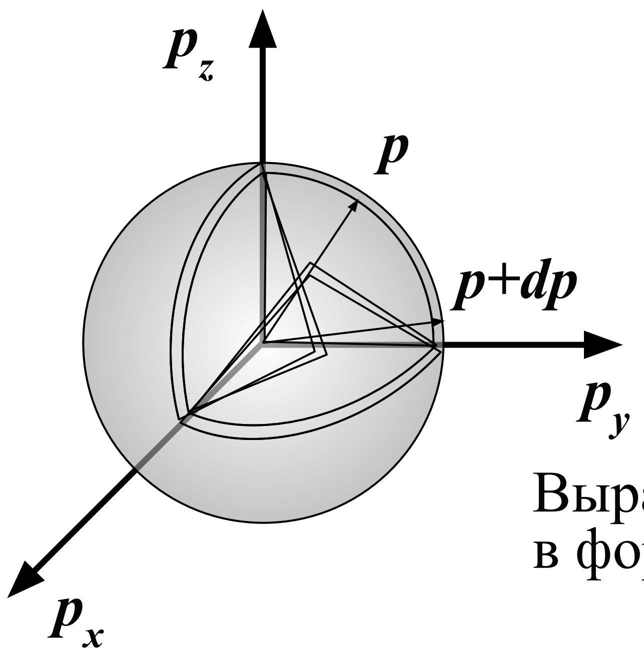
$$\Delta\Gamma_p = \frac{h^3}{V}$$

Число элементарных фазовых ячеек, содержащееся в этом слое, равно объему слоя, деленному на объем одной ячейки:

$$\frac{4\pi p^2 dp}{\Delta\Gamma_p} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

# ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

Так как каждой ячейке соответствует одно состояние микрочастицы, то число состояний, приходящееся на интервал $dp$, заключенный между $p$ и $p+dp$ , равно числу ячеек:




$$q(p)dp = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

Теперь осталось перейти от импульсов к энергии:

$$E = \frac{p^2}{2m}, \qquad dE = \frac{p}{m}dp$$

Выражая из этих формул $p$ и $dp$ и подставляя их в формулу, получим окончательно

$$\boxed{q(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}\,dE}$$

Это и есть число состояний частицы в интервале энергий $E$ и $E+dE$.

# ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

$$\boxed{q(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}\,dE}$$

Поделив правую и левую часть этого соотношения на $dE$, получим *плотность состояний* $q(E)$, выражающую число состояний микрочастицы, приходящееся на единичный интервал энергий:

$$q(E) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}$$

Видно, что плотность состояний пропорциональна $\sqrt{E}$ . Кроме того, плотность состояний увеличивается с ростом массы частиц.

В случае электронов каждой фазовой ячейке соответствует не одно, а два состояния, отличающихся друг от друга направлением спина. Поэтому для электронов число состояний и плотность состояний нужно удвоить.

# ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

$$\boxed{q(E) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}}$$

Если проинтегрировать это выражение в пределах от $0$ до $E$, получим число состояний микрочастицы, заключенное в интервале энергий от $0$ до $E$:

$$G = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{2}{3}E^{3/2}$$

Полагая $E = \frac{3}{2}kT$, получим $$G \approx V\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

Подставим это выражение в записанное ранее условие невырожденности $$\frac{N}{G} << 1$$

# ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ. КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

получим $\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \ll 1,$ или, поскольку $\frac{N}{V} = n,$

*n* - число частиц в единице объема, то условие невырожденности примет вид:

$$\boxed{n\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \ll 1}$$

Оценки показывают, что, например, молекулярный газ в нормальных условиях является невырожденным и, следовательно, описывается классической статистикой Максвелла-Больцмана.

Электронный газ в металле в реальных условиях всегда вырожден, вследствие чего к нему применима только квантовая статистика.

# ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА.

Мы определили вид функции ***q(E)dE***, описывающей число состояний, приходящихся на интервал энергии ***dE***

$$q(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}\,dE$$

Для того, чтобы записать полную функцию распределения частиц по состояниям, необходимо теперь знать вид функции распределения ***f(E)***, определяющей вероятность заполнения этих состояний частицами.

Функция распределения для невырожденного газа нам известна. *Это функция распределения Максвелла – Больцмана*:

$$f(E) = \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-E/kT}$$

# ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА.

Вспомним, что произведение $f(E)dE$ выражает вероятность заполнения частицами состояний с энергиями, заключенными между $E$ и $E+dE$.

Теперь легко записать выражение для полной статистической функции распределения $N(E)dE = f(E)q(E)dE$:

$$N(E)dE = \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} \cdot e^{-E/kT} \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E}\,dE$$

После преобразований получим

$$N(E)dE = \frac{2N}{\sqrt{\pi(kT)^3}} e^{-E/kT}\sqrt{E}\,dE$$

Это *полная функция распределения Максвелла – Больцмана.*