Сегодня: *

Лекция 2

Тема: Физические основы механики

Содержание лекции:

1. Математическая справка:
   §3. Элементы математического анализа.

2. Элементы кинематики
   §1. Пространство, время, системы отсчета.
   §2. Кинематика материальной точки.

Векторное произведение

- *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ назовем вектор $\vec{c}$, модуль которого

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$$

а) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ (первого сомножителя) к вектору $\vec{b}$ (второму сомножителю) виден против часовой стрелки. (Начала векторов предполагаются совмещенными).

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$$

§3. Элементы математического анализа

- **Производная.** Если *f(x)* - непрерывная функция одной переменной, то ее производной называется

$$f_x' = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Пример:

$$\left(x^2\right)' = 2 \cdot x;$$

$$\left(16x^3\right) = 16 \cdot 3x^2 = 48x^2.$$

- **Частная производная**. $f(x, y, z)$ - непрерывная функция нескольких переменных. Частной производной по одной из переменных называется:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

$$\left(3x^2 + 2y^3\right)_x' = 6x;$$

$$\left(3x^2 + 2y^3\right)_y' = 6y$$

- Полная производная сложной функции *f(x, y, z, t)*, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$,

t – параметр (время).

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Таблица производных

Функция	Производная
$y = C, \quad C = Const$	0
$y = Cx$	$y' = C$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = ne^{nx}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(cu)' = cu', c = const$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{u^2}$$

$$(f(u(x)))'_x = f'_u(u(x)) \cdot u'(x)$$

- ***Неопределенный интеграл***

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (U + V - W) dx = \int U dx + \int V dx - \int W dx$$

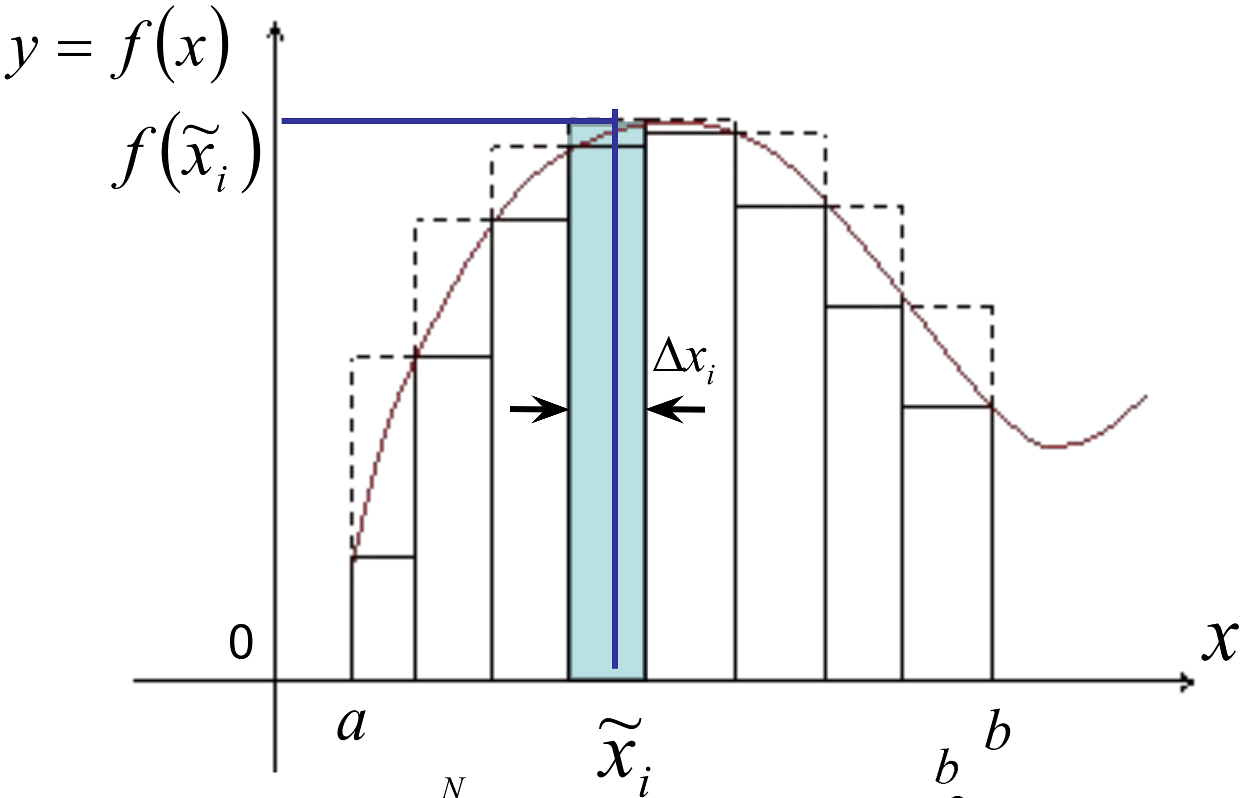
$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Определенный интеграл



$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\tilde{x}_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. Элементы кинематики

§1. Пространство, время. Системы отсчета

Пространство и время - формы существования материи, органически связанные между собой:

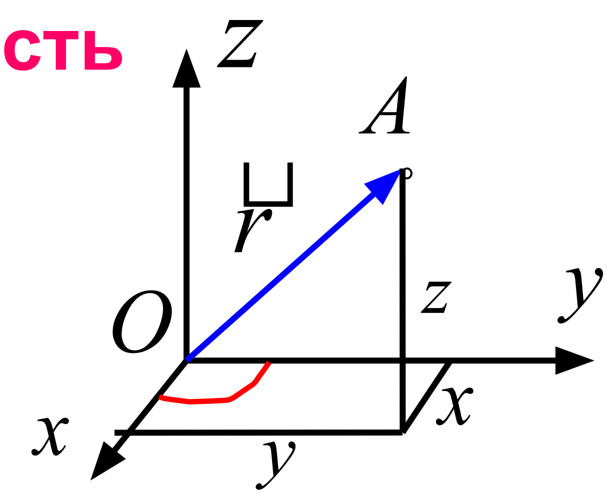
наблюдаемый мир четырехмерен.

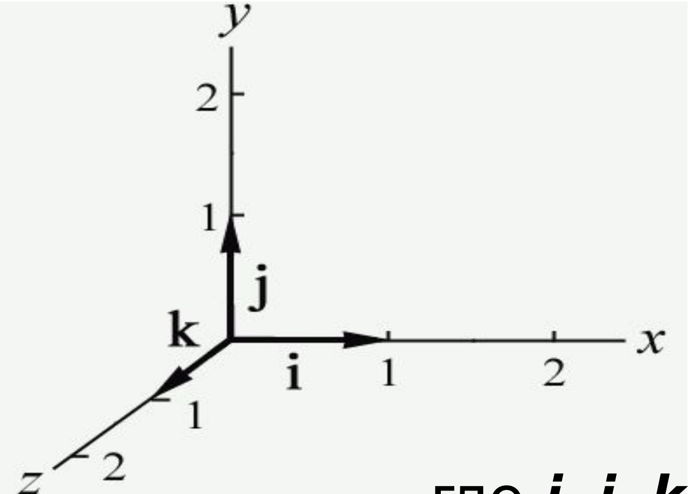
Пространство - порядок существования материальных объектов. **Время** - порядок смены явлений.

Положение любого движущегося тела определяется по отношению к телу отсчета, поэтому *механическое движение относительно*.

Тело отсчета   Произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение других (движущихся) тел.

Система отсчета – это совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов.





$$\vec{k} = \left[\vec{i}, \vec{j}\right], \quad \vec{i} = \left[\vec{j}, \vec{k}\right], \quad \vec{j} = \left[\vec{k}, \vec{i}\right]$$

где ***i, j, k*** – единичные векторы (орты).

Число независимых координат, однозначно определяющих положение тела (или системы тел) в пространстве, называется числом степеней свободы тела (или системы тел).

Любые k величин q_1, q_2, …, q_k, однозначно определяющие положение системы, называются обобщенными координатами.

- ***Свободная материальная точка***:
  число степеней свободы $k = 3$;
- ***N-точек***: $k = 3N$.
- ***Точка не свободна, а движется по поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат***

  Три координаты x, y, z связаны между собой соотношением

  $$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

  т.е. $k = 3 – n = 3 – 1 = 2$, где n – число связей.

  Обобщенные координаты: $q_1 = x$, $q_2 = y$ или $q_1 = \alpha$, $q_2 = \Theta$.
- ***Точка движется по заданной кривой например***, точка движется по окружности R в плоскости оху, (две связи n=2):

  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - уравнение сферы и $z = 0$ – уравнение плоскости

  $$k = 3 – n = 3 – 2 = 1.$$

  Обобщенные координаты $q = x$ или $q = \alpha$.

В общем случае число степеней свободы тела или системы тел, и, следовательно, обобщенных координат $k = 3N - n$, где N – число материальных точек входящих в состав тела.

- ***«Жесткий» треугольник*** A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3):

k = 3N - n = 6,

где n =3 – число связей на координаты. Уравнения связей:

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = const,$$

$$l_{13} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} = const,$$

$$l_{32} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} = cons$$

Моделирует абсолютно твердое тело, у которого тоже будет 6 степеней свободы. Из них 3 описывают поступательное движение, 3 – вращательное.

- Для определения положения необходимо задать:

1) x, y, z; 2) Θ, ϕ; α.

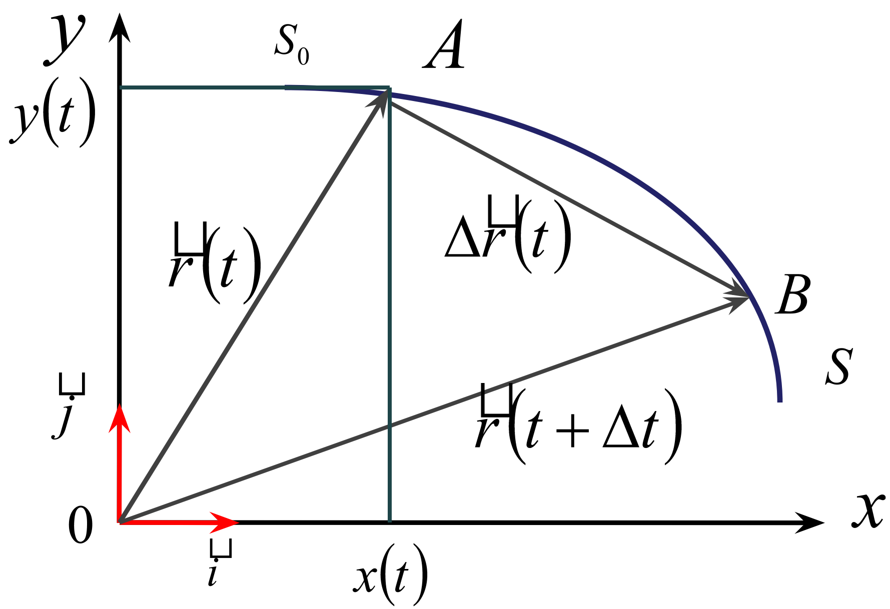
Если тело закреплено в точке (еще три дополнительные связи), то тело может лишь вращаться вокруг этой точки, остается только три степени свободы.

У твердого тела, которое может вращаться вокруг закрепленной оси, остается одна степень свободы, характеризуемая одной обобщенной координатой – углом поворота вокруг этой оси.

§2. Кинематика материальной точки

Имеем материальную точку – тело, размерами, формой и внутренним строением которого можно пренебречь.

Для описания механического движения введем СО:



S – линия, которую описывает при своем движении точка – траектория.

$\vec{r}(t)$ - радиус – вектор.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Кинематические уравнения движения - это уравнения, с помощью которых описываются изменения положения материальной точки в пространстве и времени

$$\left[\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right.$$

Вектор перемещения - Вектор, соединяющий начальную (1) движения с конечной (2).

$$\boxed{\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}$$

Путь S - расстояние, пройденное точкой вдоль траектории движения от начальной точки (1) до конечной (2), величина скалярная.

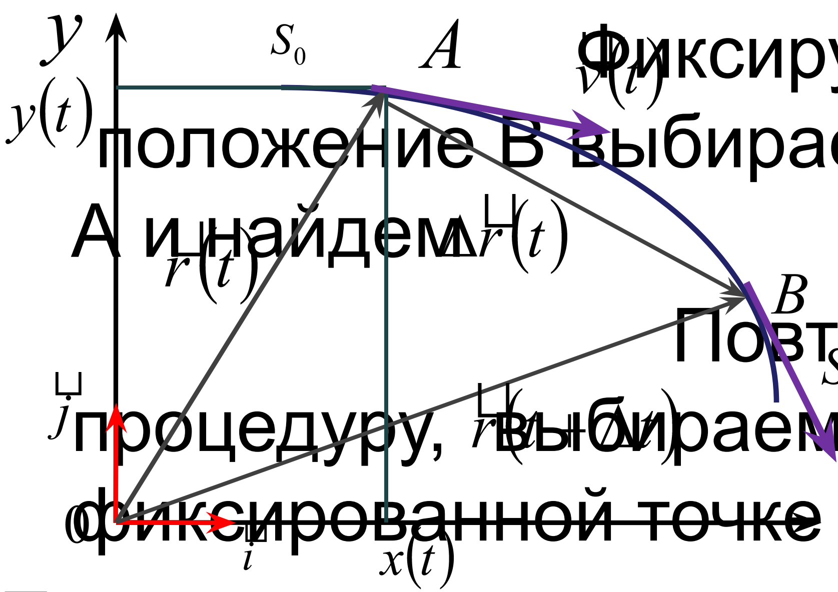
При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения равен пройденному пути:

$$\boxed{S = |\Delta \vec{r}|}$$

Рассмотрим еще раз рисунок. Возьмем отношение

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{v}_{cp}\left(t,t+\Delta t\right)$$

- вектор средней скорости перемещения между точками А и В.



Фиксируем положение А, положение В выбираем ближе к точке А и найдем новое отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Повторяем эту процедуру, выбираем точку В ближе и ближе к фиксированной точке А.

Предел последовательности указанного отношения дает мгновенную скорость материальной точки в положении А.

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Из способа нахождения мгновенной скорости ясно, что она всегда направлена по касательной к траектории.

$$\vec{v} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

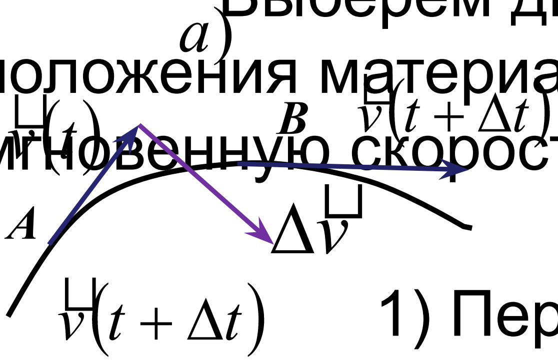
$$v_x = \frac{dx}{dt} = x', \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y', \quad v_z = \frac{dz}{dt} = z'$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

Вектор мгновенной скорости определяет быстроту изменения радиус-вектора ***r*** со временем, т.е. быстроту изменения положения точки в пространстве.

Аналогично определяется и вектор мгновенного ускорения.

Выберем два последовательных положения материальной точки A и B. Найдем мгновенную скорость в этих положениях $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}(t+\Delta t)$.



1) Перенесем вектор $\vec{v}(t+\Delta t)$ параллельно самому себе из B в A.

2) Найдем разность $\Delta\vec{v}$ векторов $\vec{v}(t+\Delta t)$ и $\vec{v}(t)$.

Отношение

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\vec{a}_{cp}(t,t+\Delta t)$$

представляет собой вектор среднего ускорения между точками A и B.

3) Будем повторять процедуру, постоянно приближаясь к фиксированной точке A. Предел последовательности таких отношений (предел средних ускорений) – мгновенное ускорение материальной точки в положении A:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Ускорение и его составляющие

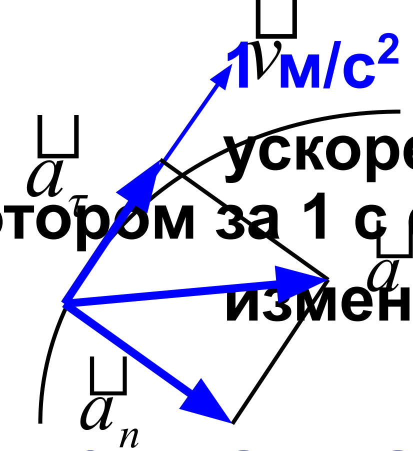
Ускорение – Характеристика неравномерного движения, определяющая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

Среднее ускорение – векторная величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени, за которое это изменение произошло.

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение – векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dv_x(t)}{dt} + \vec{j}\,\frac{dv_y(t)}{dt} + \vec{k}\,\frac{dv_z(t)}{dt} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}\,a_y + \vec{k}\,a_z$$



1 м/с² - ускорение прямолинейного ускоренного движения точки, при котором за 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с.

Тангенциальная составляющая Характеризует быстроту изменения скорости по модулю

(направлена по касательной к траектории)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Нормальная составляющая Характеризует быстроту изменения скорости по направлению

(направлена к центру кривизны траектории)

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Полное ускорение – геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

- Задача 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси OX имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где A = 2 м, B = 1,5 м/с, C = -0,5 м/с^3. Найти:
  1. *Координату x, скорость v_x, ускорение a_x точки в момент времени t = 2 с.*
  2. *Среднюю скорость и среднее ускорение за этот промежуток времени.*

Решение:

$$x = \left(A + Bt + Ct^3\right)_{t=2c} = 2м + 1{,}5м/c \cdot 2c + \left(-0{,}5м/c^3\right)\cdot\left(2c\right)^3 =$$
$$= 2м + 3м - 4м = 1м$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 1{,}5м/c + 3\cdot\left(-0{,}5м/c^3\right)\cdot\left(2c\right)^2 =$$

$$= 1{,}5м/c - 6м/c = -4{,}5м/c$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct = 6\cdot\left(-0{,}5м/c^3\right)\cdot 2c = -6м/c^2$$

Средняя скорость – отношение всего пути, пройденного телом ко времени. Найдем значение времени, когда тело изменило направление движения на противоположное. В этот момент времени мгновенная скорость равна 0.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 0, \quad t_1^2 = -\frac{B}{3C},$$

$$t_1 = \sqrt{-\frac{B}{3C}} = \sqrt{\frac{1{,}5м/с}{3 \cdot 0{,}5м/с^2}} = 1с$$

Определим путь за время 2 с:

$$S_1 = A + Bt + Ct^3 = 2м + 1{,}5м/с \cdot 1с - 0{,}5м/с^3 \cdot (1с)^3 = 3м,$$

$$S_2 = A + Bt_1 + Ct_1^3 = 2м + 1{,}5м/с \cdot (2с - 1с) - 0{,}5м/с^3 \cdot (2с - 1с)^3 = 3м$$

$$S = \underset{\substack{\textit{до}\\ \textit{изменения}\\ \textit{направления}\\ \textit{движения}\\ \textit{на обратное}}}{S_1} + \underset{\textit{после}}{S_2}$$

$$S = S_1 + S_2 = 6м$$

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{6м}{2с} = 3м/с$$

Среднее ускорение – $$\langle a\rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 + t_1}$$

v_2 - скорость в момент времени t_2 = 2 с.

v_1 - скорость в момент времени t_1 = 0 с.

$$v_2 = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 1{,}5м/с + 3\cdot\left(-0{,}5м/с^3\right)\cdot(2с)^2 =$$

$$= 1{,}5м/с - 6м/с = -4{,}5м/с$$

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 1{,}5м/с + 3\cdot\left(-0{,}5м/с^3\right)\cdot(0с)^2 =$$

$$= 1{,}5м/с - 0м/с = 1{,}5м/с$$

$$\langle a_x\rangle = \frac{-4{,}5м/с - 1{,}5м/с}{2с} = -3м/с^2$$

Задача 2. Электрон движется в некоторой системе отсчета из начального положения, определяемого радиус-вектором $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + z_0\vec{k}$, где $x_0 = 3$ м, $z_0 = 1$ м с начальной скоростью $\vec{v}_0 = v_{0y}\vec{j}$, где $v_{0y} = 2$ м/с и ускорением $\vec{a}(t) = At\vec{i} + B\vec{k}$, где A = 12 м/с^2, B = 8 м/с^2.

Найти:

1. *Координату z электрона в момент времени t = 0,5 с.*
2. *Скорость электрона в момент времени t = 1 с,*
3. *Угол между радиусом–вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{v}$ в момент времени t = 0 с.*

Решение:

2) Модуль скорости, если ускорение зависит от времени определяется:

$$v(t) = v_0 + \int_0^1 a(t)dt$$

Модуль ускорения:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Кинематические уравнения скоростей:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^1 a_x dt = v_{0x} + \int_0^1 At dt = v_{0x} + \frac{At^2}{2};$$

$$v_y = v_{0y};$$

$$v_z = v_{0z} + \int_0^1 a_z dt = v_{0z} + \int_0^1 B dt = v_{0z} + Bt;$$

Учитываем начальные условия $v_{0x} = v_{0z} = 0$; $v_{0y} = 2$ м/с;

$$v_x = \frac{At^2}{2}; \qquad v_y = v_{0y}; \qquad v_z = Bt;$$

Вектор модуля скорости:

$$\bar{v} = \frac{At^2}{2}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} + Bt\vec{k} = 6t^2\vec{i} + 2\vec{j} + 8t\vec{k}, \text{ (м/с)}$$

Модуль скорости в момент времени *t* = 1 с:

$$v = \sqrt{\left(\frac{At^2}{2}\right)^2 + \left(v_{0y}\right)^2 + \left(Bt\right)^2} = \sqrt{\left(6t^2\right)^2 + \left(2\right)^2 + \left(8t\right)^2} = 10{,}2 \text{ м/с;}$$

1) Координата z электрона в момент времени *t* = 0,5 с:

$$z = z_0 + \int_0^{0,5} Btdt = z_0 + \left.\frac{Bt^2}{2}\right|_0^{0,5} = 1 + \frac{8\left(0{,}5^2 - 0^2\right)}{2} = 1 + 1 = 2 \text{ м}$$

3) Угол между радиусом–вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{v}$ в момент t = 0 с определим, используя скалярное произведение этих векторов:

$$\frac{(\vec{r}_0, \vec{v}_0)}{|\vec{r}_0| \cdot |\vec{v}_0|} = \cos\alpha, \quad \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + z_0\vec{k}, \qquad \vec{v}_0 = v_{0y}\vec{j}.$$

$$(\vec{r}_0, \vec{v}_0) = \left(x_0\vec{i} + z_0\vec{k}\right) \cdot \left(v_{0y}\vec{j}\right) =$$

$$= x_0 v_{0y}\left(\vec{i}, \vec{j}\right) + z_0 v_{0y}\left(\vec{k}, \vec{j}\right) = \left\{ \begin{matrix} \left(\vec{i}, \vec{j}\right) = 0 \\ \left(\vec{k}, \vec{j}\right) = 0 \end{matrix} \right\} = 0$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = 0, \quad \alpha = \arccos(0) = \pi/2.$$

Задача 3. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны $R = 50$ м. Уравнение движения автомобиля $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где А = 10 м, В = 10 м/с, С = -0,5 м/с^2.

Найти:

1. *Скорость автомобиля v, его тангенциальное ускорение a_τ, нормальное a_n и полное ускорения a в момент времени t = 5 с.*
2. *Длину пути и модуль перемещения автомобиля за интервал времени τ = 10 с, отсчитанный с момента начала движения.*

Решение:

1) Мгновенная скорость – первая производная от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct = \{10 + 2 \cdot (-0{,}5) \cdot 5\} \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}.$$

Тангенциальное ускорение найдем, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2C, \qquad a_\tau = 2 \cdot (-0{,}5) = -1 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{5^2}{50} = 0{,}5 \text{ м/с}^2$$

Полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

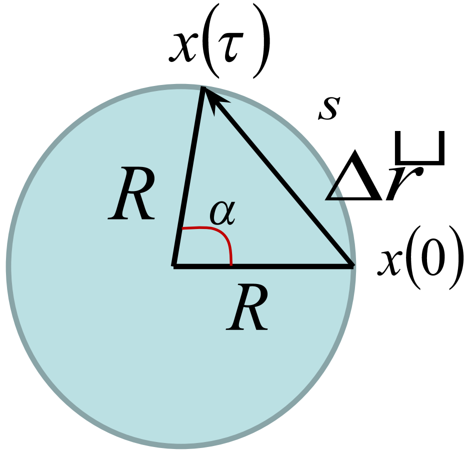
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0{,}5)^2} = 1{,}12 \text{ м/с}^2$$

2) Путь, пройденный автомобилем в одном направлении, равен изменению координаты:

$$s = x(\tau) - x(t_0) = A + B\tau + C\tau^2 - (A + 0 + 0) =$$

$$= B\tau + C\tau^2 = 10 \cdot 10 + (-0{,}5) \cdot 10^2 = 50 \text{ м.}$$

Модуль перемещения:



$$|\Delta \vec{r}| = 2R\sin\left(\alpha/2\right),$$

$$\alpha = \frac{s}{R}\,(рад)$$

$$|\Delta \vec{r}| = 2R\sin\left(s/2R\right) = 2 \cdot 50 \cdot \sin\left(\frac{50}{2 \cdot 50}\right) = 47{,}9 \text{ м.}$$

1. Средняя скорость

Задача 1. Первую четверть пути автомобиль двигался со скорость 60 км/ч, остальной путь – со скоростью 20 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

Решение: Средняя скорость $$v_{cp} = \frac{S}{t}$$

Полное время движения равно сумме времен движения на отдельных участках:

$$t = \frac{s/4}{v_1} + \frac{3s/4}{v_2}.$$

Подставляем: $$t = s/v_{cp}$$

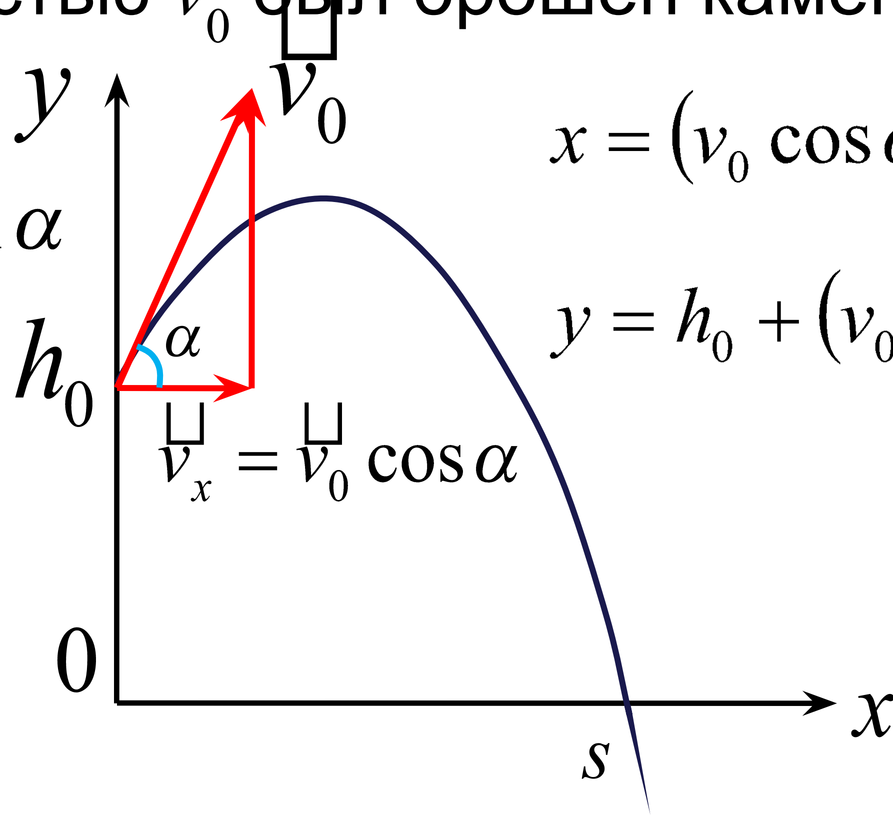
Получим: $$v_{cp} = \frac{4v_1 v_2}{3v_1 + v_2} = 24 \text{ км/ч}.$$

2. Бросок под углом

Задача 2. Из окна, находящегося на высоте h_0 = 7,5 м, бросают камень под углом 45^0 к горизонту. Камень упал на расстоянии s = 15 м от стены дома. С какой скоростью v_0 был брошен камень?

Решение:

$$\vec{v}_y = \vec{v}_0 \sin\alpha$$



$$\vec{v}_x = \vec{v}_0 \cos\alpha$$

$$x = (v_0 \cos\alpha)t,$$

$$y = h_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Запишем зависимость координат камня от времени

Учтем, что в момент падения $x = s, \quad y = 0.$

Из первого уравнения выразим время

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Подставим во второе уравнение

$$y = h_0 + (v_0 \sin\alpha)\frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

$$y = h_0 + s\,tg\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{s}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 = 0$$

$$v_0 = \left(\frac{gs^2}{2\cos^2\alpha\,(h_0 + s\,tg\alpha)}\right)^{1/2} = 10 \text{ м/с.}$$

3. Движение в поле тяжести

Задача 3. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $v_0 = 50$ м/с. Через сколько секунд его скорость будет равна $v = 30$ м/с и направлена вниз.

Решение: Формулы равноускоренного движения действуют все время равноускоренного движения.

- Направим ось OY вертикально вверх.
- Воспользуемся формулой: $v_y = v_{0y} + a_y t.$
- В данном случае $v_{0y} = v_0, \;\; a_y = -g, \;\; v_y = -v.$

Получаем:

$$-v = v_0 - gt, \qquad t = \frac{(v + v_0)}{g} = 8 \;\; c.$$

Проверка: за время $t_1 = v_0/g = 5$ с – поднимается вверх, а затем за $t_2 = t - t_1 = 3$ с набирает скорость $v = g\, t_2 = 30$ м/с.