ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- **1. Виды и признаки колебаний**
- **2. Параметры гармонических колебаний**
- **3. Графики смещения скорости и ускорения**
- **4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний**
- **5. Энергия гармонических колебаний**
- **6. Гармонический осциллятор**

Виды и признаки колебаний

- **В физике особенно выделяют колебания двух видов – *механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации*, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека.**
- **Так, механические колебания плотности воздуха воспринимаются нами как звук, а быстрые электромагнитные колебания – как свет.**
- **С помощью звука и света мы получаем основную часть информации об окружающем нас мире.**
- **Для колебаний характерно *превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.***
- ***Колебательным движением* (*или просто колебанием*) *называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости во времени.***

Виды и признаки колебаний

- ***Три признака колебательного движения:***
- ***повторяемость (периодичность) – движение по одной и той же траектории туда и обратно;***
- ***ограниченность пределами крайних положений;***
- ***действие силы, описываемой функцией***

$$F = -kx.$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- **Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются, так называемые, *гармонические колебания.***
- **Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, $F = -kx$), совершает *гармонические колебания*.**

- **Саму такую систему часто называют *гармоническим осциллятором*.**
- **Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:**
- **колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, *близкий к гармоническому*;**
- **различные *периодические процессы* (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как *наложение гармонических колебаний*.**

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- **Периодический процесс можно описать уравнением:** $f(t) = f(t + nT)$
- **.**
- **По определению, *колебания называются гармоническими*, если зависимость некоторой величины** $x = f(t)$ **имеет вид**
- $x = A\sin\varphi$ **или** $x = A\cos\varphi$
- **Здесь синус или косинус используются в зависимости от условия задачи, *A* и φ – параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.**

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- **Для изучения колебательного движения нам придется ввести несколько терминов – *параметров колебательного движения.***
- **Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют *смещением х*.**
- ***Максимальное смещение* – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется *амплитудой* и обозначается, буквой *А*.**

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- **Выражение, являющееся аргументом синуса или косинуса в формуле , определяет смещение *x* в данный момент времени *t* и называется *фазой колебания.***
- **При t=0 $\varphi = \varphi_0$, поэтому называется *начальной фазой колебания*.**
- **Фаза измеряется в радианах и определяет *значение колеблющейся величины* в данный момент времени.**
- **Т.к. синус и косинус изменяются в пределах от +1 до , то -1, то х может принимать значения от +*А* до –*А.***

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- **Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку называется *полным колебанием.***
- ***Частота колебаний* ν определяется, как число полных колебаний в 1 секунду.**
- **Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен числу полных колебаний в одну секунду.**
- **Очевидно, что** $\nu = \dfrac{1}{T}$

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- ***T* – период колебаний** – **минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

- **ω –** ***циклическая*** **(*круговая*)** ***частота*** **– число полных колебаний за 2π секунд.**
-

$$\omega = 2\pi\nu$$

- **Заметим, что фаза φ** ***не влияет на форму кривой x(t), а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени t.***

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- **Колебания характеризуются не только смещением, но и *скоростью* и *ускорением* .**
- **Если смещение описывается уравнением**

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

то, по определению

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Графики смещения скорости и ускорения

- Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ \upsilon_x = \upsilon_m \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

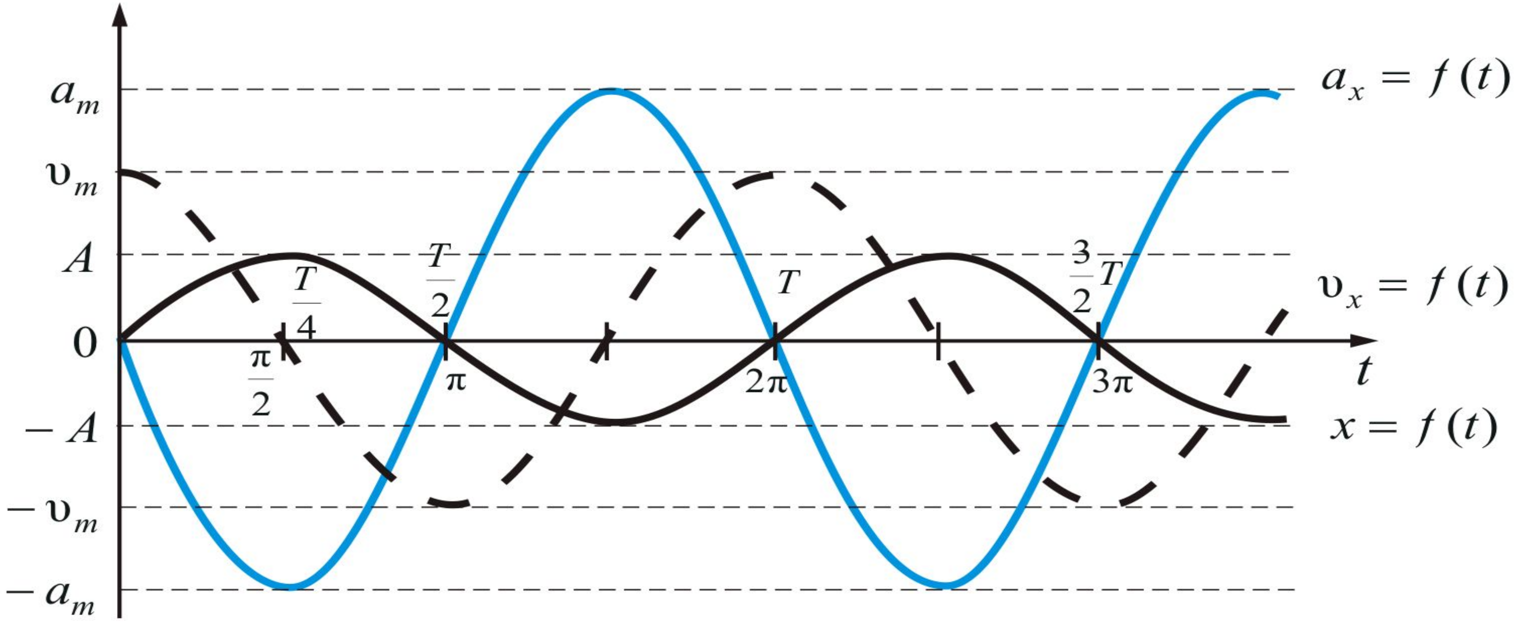
- Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

Графики смещения скорости и ускорения

- *Скорость колебаний тела максимальна и, по абсолютной величине, равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия .*
- *При максимальном смещении скорость равна нулю*;
- *Ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях*.
- *Ускорение всегда направленно к положению равновесия*, поэтому, удаляясь от положения равновесия, тело двигается замедленно, приближаясь к нему – ускоренно.
- Ускорение всегда прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения.
- Все эти выводы могут служить определением гармонического колебания.

Графики смещения скорости и ускорения

- Графики смещения, скорости и ускорения гармонических колебаний:



Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- **Второй закон Ньютона позволяет, в общем виде, записать связь между силой и ускорением, при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой *m*.**

$$F_x = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x$$

- **Отсюда следует, что сила *F* пропорциональна *x* и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют возвращающей силой).**
- **Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.**

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- Примером сил удовлетворяющих этому уравнению являются ***упругие силы.***
- Силы же имеющие иную природу, но удовлетворяющие этому уравнению называются ***квазиупругими.***
- Квазиупругая сила $F_x = -kx,$
- Подставляя F_x в основное уравнение получаем:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- В случае прямолинейных колебаний вдоль оси *x*, проекция ускорения на эту ось

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

- Подставив выражения для a_x и F_x во второй закон Ньютона, получим ***основное уравнение динамики гармонических колебаний***, вызываемых **упругими** или **квазиупругими** силами: $m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$ или $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- **Решение этого уравнения всегда будет выражение вида** $x = A\sin(\omega t + \varphi)$
- **т.е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является *гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону.***

Энергия гармонических колебаний

- **Вычислим энергию тела массой *m*, совершающего гармонические колебания с амплитудой *A* и круговой частотой ω.**
- ***Потенциальная энергия тела U*, смещенного на расстояние *x* от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила ,перемещая тело в положение равновесия.**

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}; \quad \mathrm{d}U = -F\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x \qquad U = k\int_0^x x\mathrm{d}x$$

Энергия гармонических колебаний

- **Или** $U = \dfrac{kx^2}{2}$ $U = \dfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$

- ***Кинетическая энергия***

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

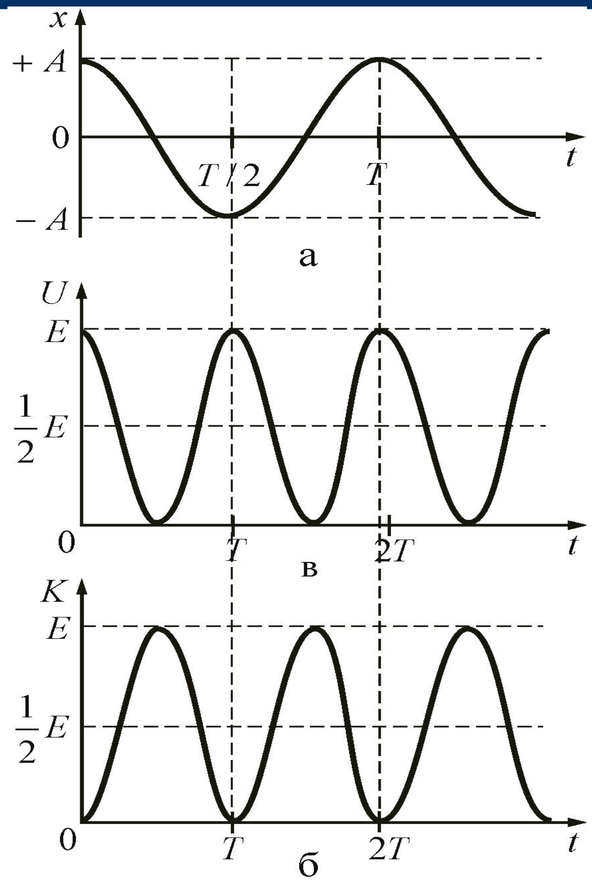
- ***Тогда***

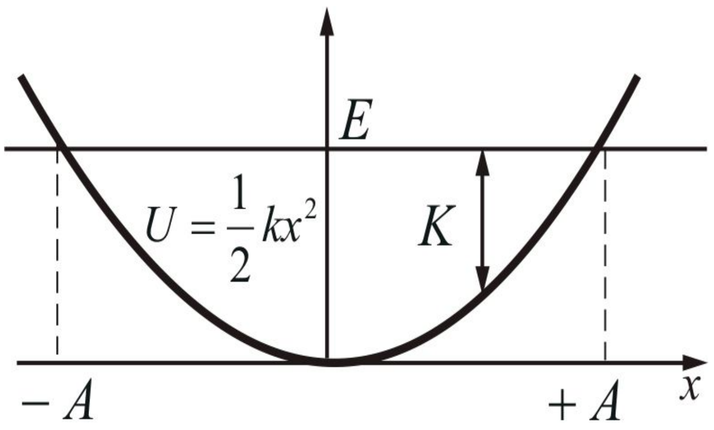
$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Энергия гармонических колебаний

- **Или** $$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$
- **Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.**
- **В случае свободных незатухающих колебаний полная энергия не зависит от времени, поэтому и амплитуда *A* – не зависит от времени.**

Энергия гармонических колебаний





Гармонические осцилляторы

- Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики.
- Примерами гармонического осциллятора являются *пружинный, математический и физический маятники*, а также *колебательный контур* (для малых токов и напряжений).

Гармонические осцилляторы

- ***Пружинный маятник***
- $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$ ***или*** $$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

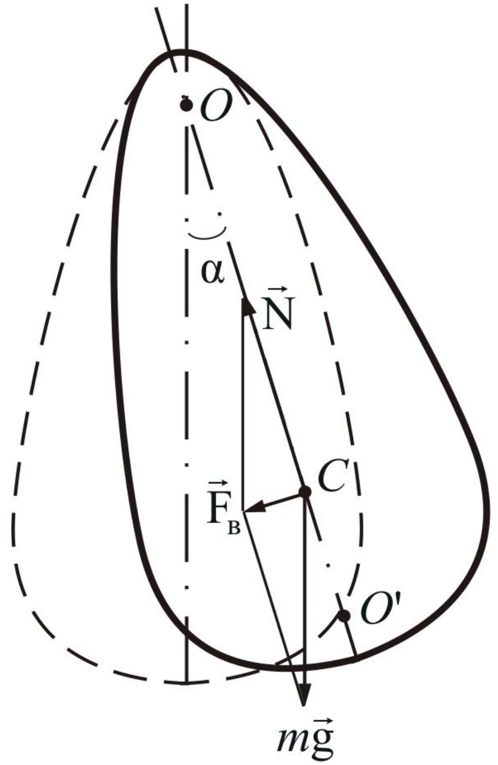
- **Математический маятник (только для малых колебаний)**

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Гармонические осцилляторы

- **Физический маятник** – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку *O*, не совпадающую с центром масс *C*



Гармонические осцилляторы

- При отклонении этого тела от положения равновесия на угол α, также возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl\sin\alpha$$

- где *l* – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника *C*.
- Обозначим через *J* – момент инерции маятника относительно точки подвеса *O*.

Гармонические осцилляторы

- **Тогда** $$J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\sin\alpha$$
- **В случае малых колебаний** $$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{mgl}{J} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

- **Величину момента инерции *J* иногда бывает трудно вычислить.**

Гармонические осцилляторы

- Сопоставляя формулы для периода колебаний физического и математического маятников, можно обозначить: $l_{\text{пр}} = \dfrac{J}{ml}$

- где $l_{\text{пр}}$ – ***приведенная длина физического маятника*** – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

- 1. Свободные затухающие механические колебания
- 2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания
- 3. Вынужденные механические колебания
- 4. Автоколебания

Затухающие колебания

- Все реальные колебания являются затухающими.
- Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается.
- Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например, маятник).

Затухающие колебания

- Тогда *сила трения* (или *сопротивления*)

$$\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon}$$

- Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси ***x***

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x$$

- ***Или***

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

- Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta$ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

Затухающие колебания

- **Тогда однородное дифференциальное уравнение второго порядка запишется так:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- **Решение этого уравнения имеет вид при** $\beta \le \omega_0$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \varphi_0)$$

- ***A_0* и φ_0 – определяются из краевых условий (начальных и граничных) задачи. β и ω – из самого уравнения.**

Затухающие колебания

- Найдем ω. Здесь оно уже не равно ω_0 $(\omega \neq \omega_0)$.
- Подставим решение дифференциального уравнения в само дифференциальное уравнение продифференцировав решение один и два раза по времени.
- Тогда имеем: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ или $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$.
- где ω_0 – *круговая частота собственных колебаний* (без затухания); ω – *круговая частота свободных затухающих колебаний*.

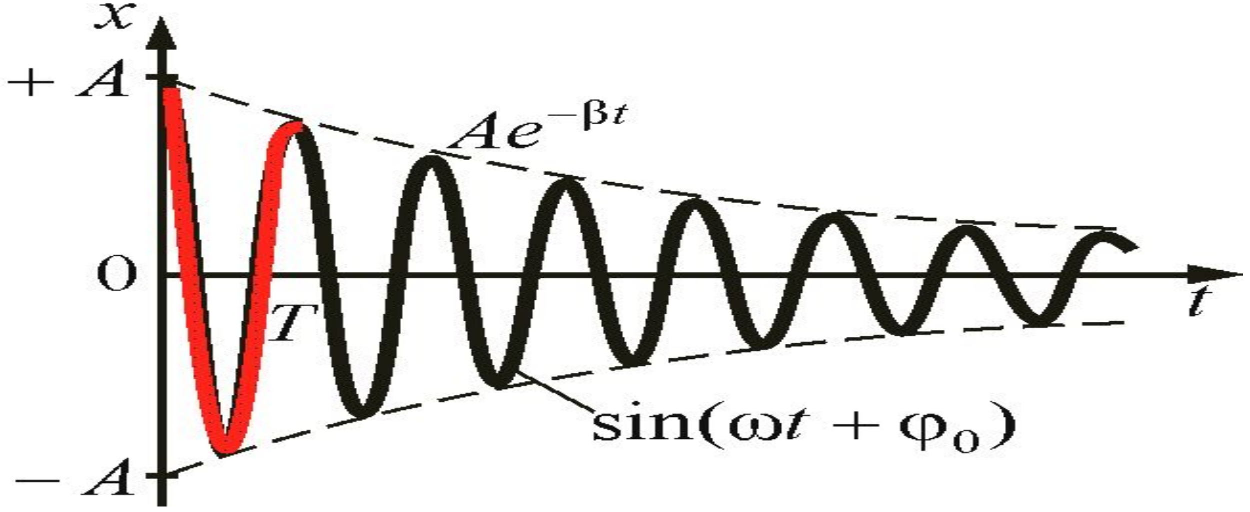
Затухающие колебания

- **Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды.**
- **Поэтому называть ω – *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*.**
- **По этой же причине и** $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$ **называется *условным периодом* затухающих колебаний.**

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- **Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени *t* и** $t+T$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)}=\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+T)}}=\frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t}e^{-\beta T}}=e^{\beta T}$$



Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T, называется логарифмическим декрементом затухания.

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

- Выясним физический смысл χ и β.
- Обозначим через τ – время, в течение которого амплитуда *A* уменьшается в e раз.
- $\dfrac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1,$ откуда $\beta\tau = 1;$ $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tau}}.$

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- Следовательно, коэффициент затухания β – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в е раз, τ – время релаксации.
- Пусть *N* число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в е – раз.
- Тогда

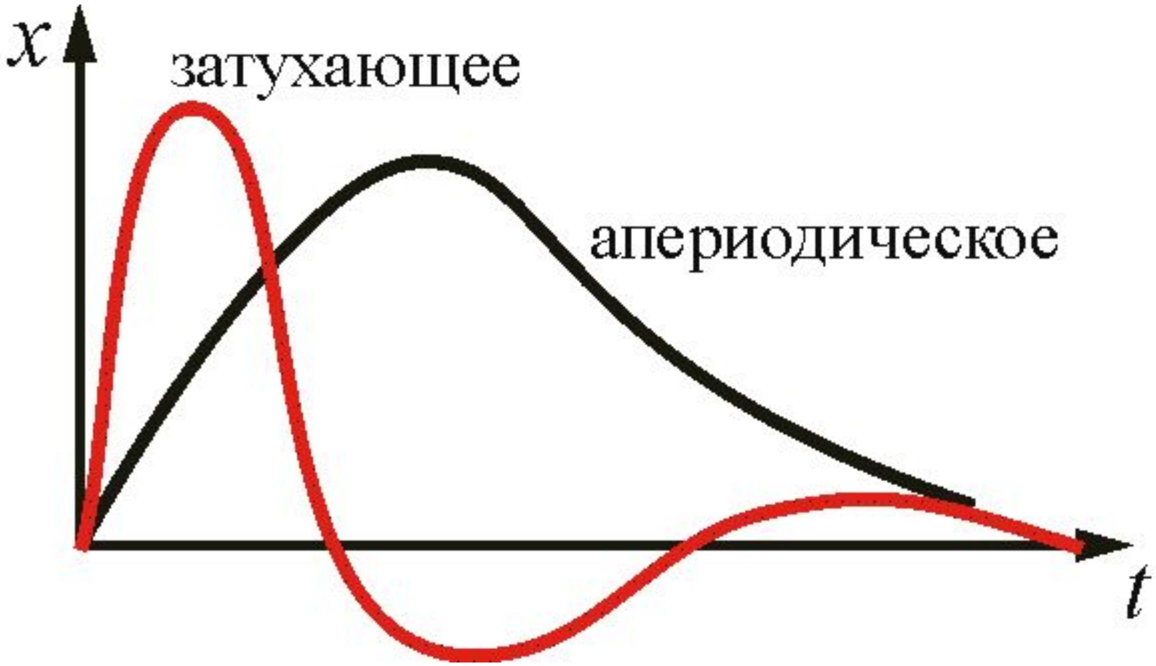
$$\tau = NT; \qquad \beta = \frac{1}{\tau}$$

$$\chi = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N}$$

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- Следовательно, логарифмический декремент затухания χ есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечению которых амплитуда *A* уменьшается в *e* раз.
- Если χ = 0,01 то *N* = 100.
- При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний.
- Когда сопротивление становится равным *критическому* , то процесс будет *апериодическим* .

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания



Вынужденные механические колебания

- Рассмотрим систему, на которую кроме упругой силы ($-kx$) и сил сопротивления ($-r\upsilon$) **действует добавочная *периодическая сила F – вынуждающая сила***. Для колебаний вдоль оси x запишем *основное уравнение колебательного процесса*,
- $ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$ или $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x$
- где $f_x = F_x/m$ – вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$f_x = F_0 \cos\omega t.$$

Вынужденные механические колебания

- Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы, ω.
- Уравнение установившихся вынужденных колебаний $x = A\sin(\omega t + \varphi)$
- Наша задача найти амплитуду *A* и разность фаз φ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Вынужденные механические колебания

- **Обратим внимание на то, что скорость на π/2 опережает смещение, а ускорение на π/2 опережает скорость.**

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos\left(\omega t + \varphi + \pi/2\right)$$

- **Преобразуем и** $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ **через косинус:**

$$x = A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2),$$

Вынужденные механические колебания

- Обозначим $\alpha = \varphi - \pi / 2$ – угол между смещением и вынуждающей силой.
- Подставим все эти выражения в дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний и получаем в итоге:

$$\omega^2 A\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega A\cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

- или

$$\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega\cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA}\cos\omega t$$

Вынужденные механические колебания

- Каждое слагаемое последнего уравнения можно представить в виде соответствующего вращающегося вектора амплитуды: амплитуда ускорения, амплитуда скорости, амплитуда смещения, амплитуда вынуждающей силы, причем $|A_3| > |A_1|$.

$$A_1 = \omega^2$$

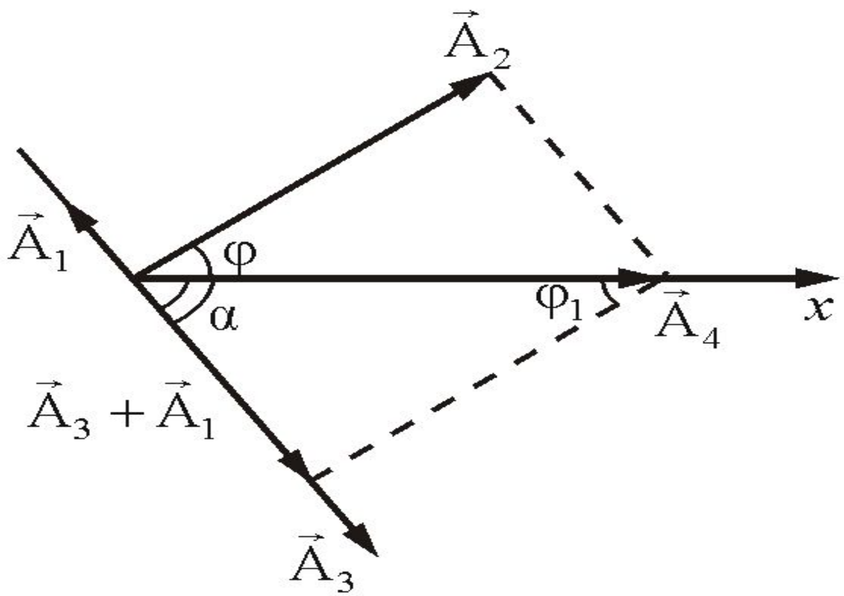
$$A_2 = 2\beta\omega$$

$$A_3 = \omega_0^2$$

$$A_4 = F_0 / mA$$

Вынужденные механические колебания

- **Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов:** $\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$



Вынужденные механические колебания

- Из рисунка видно, что $A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$
- Найдем амплитуду *A*:

$$A = \frac{F_0}{mA_4} = \frac{F_0}{m\sqrt{(A_3 - A_1)^2 + A_2^2}},$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

- Таким образом, $A \sim F_0/m$ и $\sim 1/\beta$.

Вынужденные механические колебания

- При постоянных F_0, m и β – амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы ω и свободных незатухающих колебаний системы ω_0.
- Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}$$

Вынужденные механические колебания

- Из рисунка видно, что сила опережает смещение на угол, который определяется из выражения:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_3 - A_1} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Проанализируем выражение для амплитуды.
- (частота вынуждающей силы $\omega = 0$ равна нулю), тогда $x = F_0/m\omega_0^2$
- Статическая амплитуда, колебания не совершаются.

Вынужденные механические колебания

- 2. Затухания нет $\beta = 0$
- С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \to \infty$).
- Это явление называется – ***резонанс***.
- При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается.

Вынужденные механические колебания

- Если $\beta \neq 0.$ амплитуда будет максимальна при минимальном значении знаменателя.
- Для нахождения точки перегиба возьмем первую производную по ω от подкоренного выражения и приравняем ее к нулю.
- Тогда резонансная частота будет определяться выражением:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 1. Квазистационарные токи
- 2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления
- 3. Свободные затухающие электрические колебания
- 4. Вынужденные электрические колебания
- 5. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Квазистационарные токи

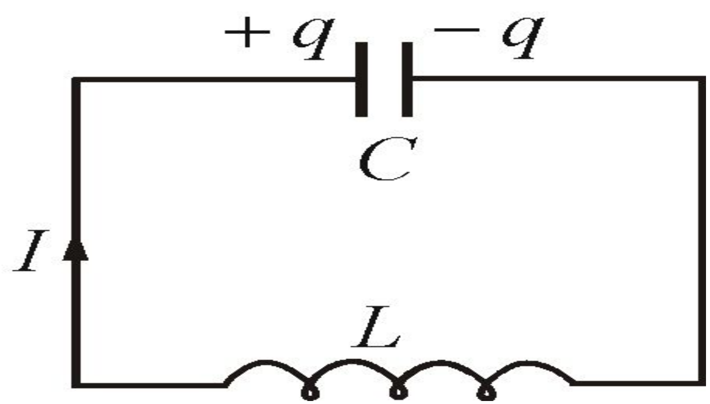
- При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени.
- Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа, были установлены для постоянного тока.
- Однако, они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющихся тока и напряжения, если их изменения происходят не слишком быстро.
- Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света *c*.

Квазистационарные токи

- Пусть *l* – длина электрической цепи.
- Тогда время распространения сигнала в данной цепи $t = l / c.$
- Если $t << T$ (*T* – период колебаний электрического тока), то такие токи называются ***квазистационарными.***
- При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным.
- Для частоты условие квазистационарности выполняется при длине цепи ~ 100 км.

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

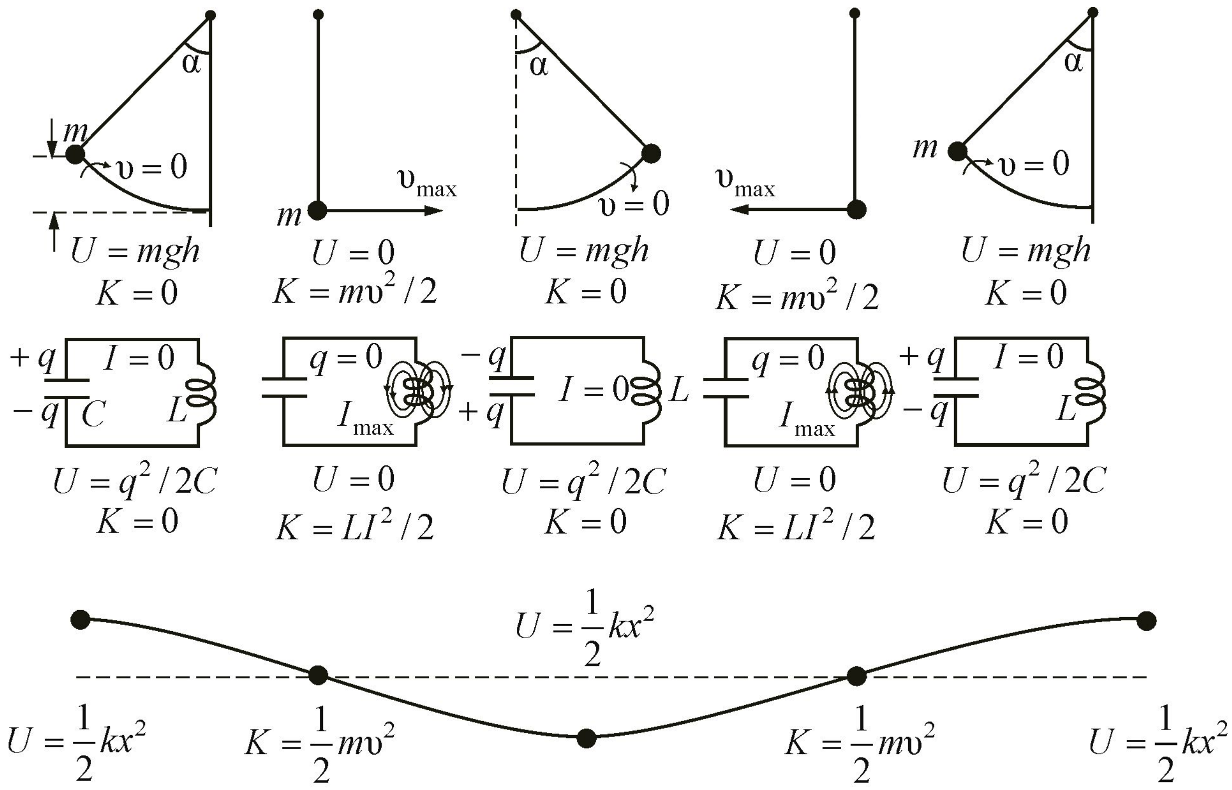
- **В цепи, содержащей индуктивность *L* и ёмкость *C* могут возникать электрические колебания.**
- **Такая цепь называется *колебательным контуром***



Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Поскольку активное сопротивление контура , полная энергия остаётся постоянной.
- Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна и наоборот.
- Рассмотрим процессы, происходящие в колебательном контуре в сравнении с колебаниями маятника .

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления



Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что, энергия электрического поля аналогична потенциальной энергии, а энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии; *L* играет роль массы *m,* а 1/*C* – роль коэффициента жесткости *k.*
- Наконец заряду *q* соответствует смещение маятника из положения равновесия *x*, силе тока *I* – скорость υ, а напряжению *U* – ускорение *a.*

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Эта аналогия сохраняется и в математических уравнениях.
- В соответствии с законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии), можно записать

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$I = \frac{dq}{dt}, \qquad \varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt},$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- **Введем обозначение:** $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ **–** ***собственная частота контура*****, отсюда получим** ***основное уравнение колебаний в контуре*****:**

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

- **Решением этого уравнения является выражение вида:**

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- **Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с собственной частотой контура – ω_0.**
- **Для периода колебаний справедлива, так называемая *формула Томсона*:**

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Продифференцируем по времени выражение для заряда и получим выражение для тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем 1/*C*:

$$U = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Максимальные значения

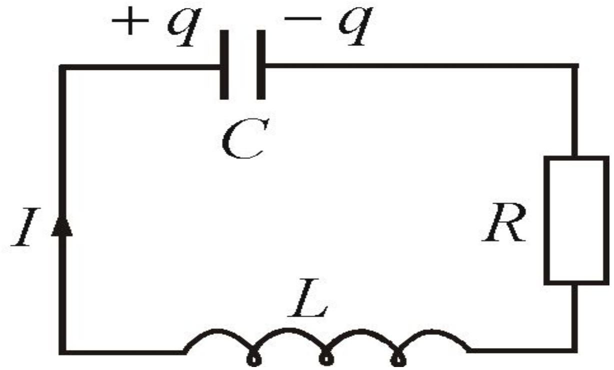
$$U_m = \frac{q_m}{C}; \qquad I_m = \omega_0 q_m; \qquad U_m C = \frac{I_m}{\omega_0};$$

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{вол}$$

Свободные затухающие электрические колебания

- Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением.
- Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.



Свободные затухающие электрические колебания

- По второму закону Кирхгофа

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0.$$

- Обозначив $\beta=\frac{R}{2L}$ – *коэффициент затухания*;
-

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- получим ***уравнение затухающих колебаний*** в контуре с *R*, *L* и *C*:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2=0$$

Свободные затухающие электрические колебания

- При $\beta \leq \omega_0$ т.е. $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, *решение этого уравнения* имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega o + \varphi),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

- Затухание принято характеризовать ***логарифмическим декрементом затухания***

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \qquad \chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}$$

Свободные затухающие электрические колебания

- Колебательный контур часто характеризуют ***добротностью Q,*** которая определяется как величина, обратно пропорциональная χ:

$$Q = \frac{\pi}{\chi} \qquad \chi = \frac{1}{N} \qquad Q = \pi N$$

, ,

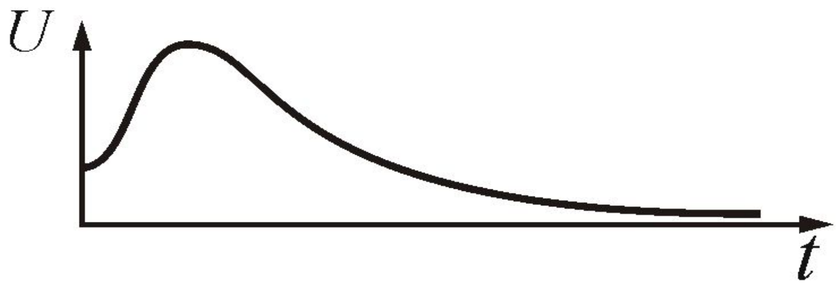
- Добротность определяется и по другому:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

- где *W* – энергия контура в данный момент, Δ*W* – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом.

Свободные затухающие электрические колебания

- При $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т.е. при $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ происходит апериодический разряд

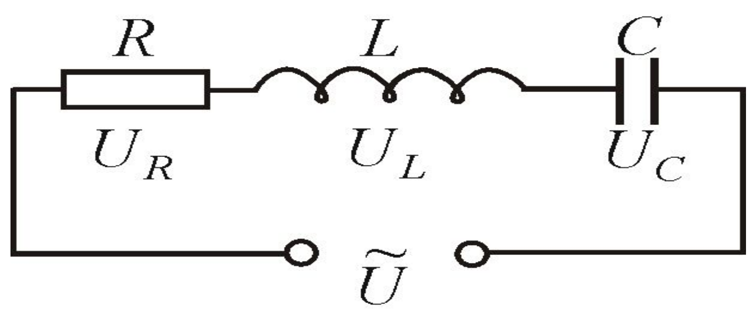


- Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется ***критическим сопротивлением*** **.**

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

- **К контуру, изображенному на рисунке подадим переменное напряжение *U***

$$U = U_m \cos \omega t$$



$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega c$$

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

- Это *уравнение* ***вынужденных электрических колебаний,*** которое совпадает с аналогичным уравнением механических колебаний.
- Его решение имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega o + \varphi)$$

$$q_m = U_m/\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m/\omega\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

- Величина $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ называется полным сопротивлением контура

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

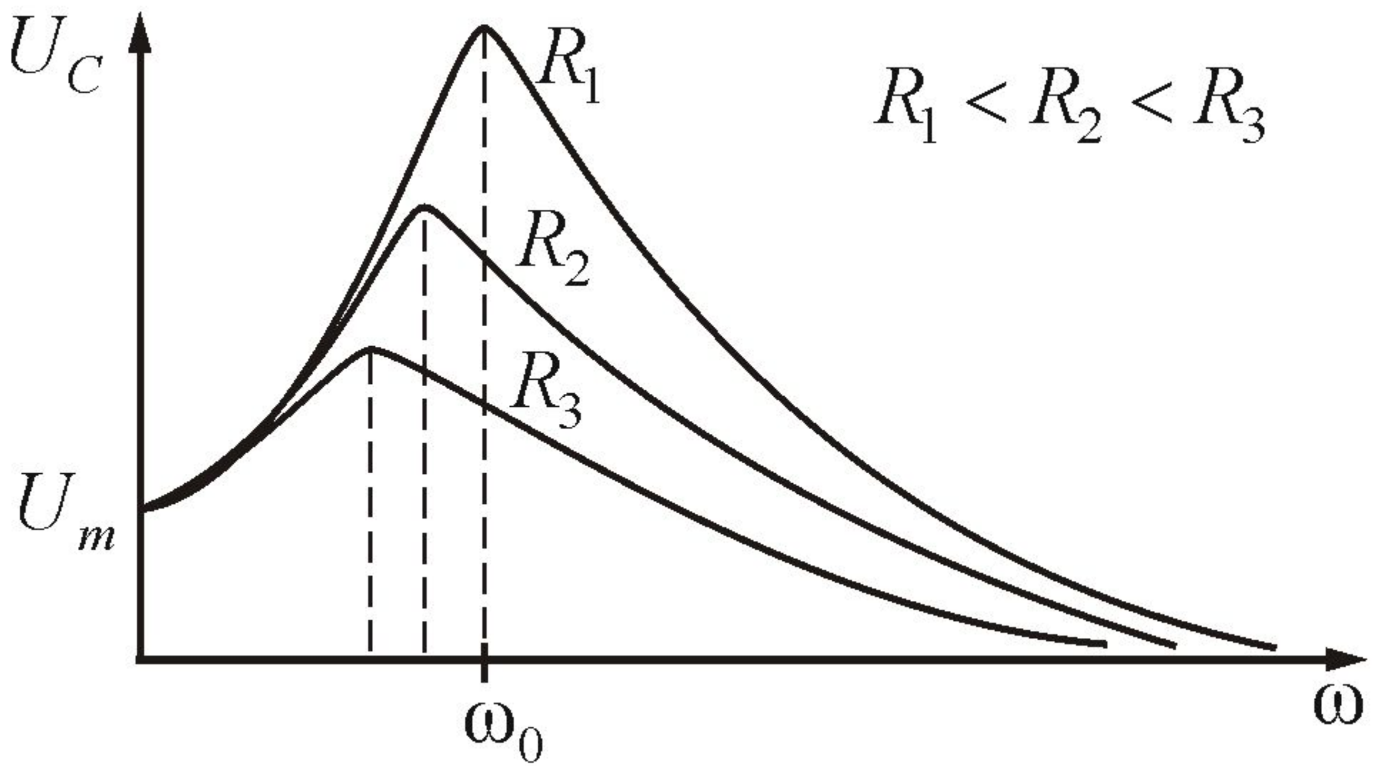
- При последовательном соединении *R*, *L*, *C*, в контуре когда $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ – наблюдается ***резонанс.***
- При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ($\varphi = 0$).
- ***Резонансная частота*** при напряжении на конденсаторе U_c равна

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

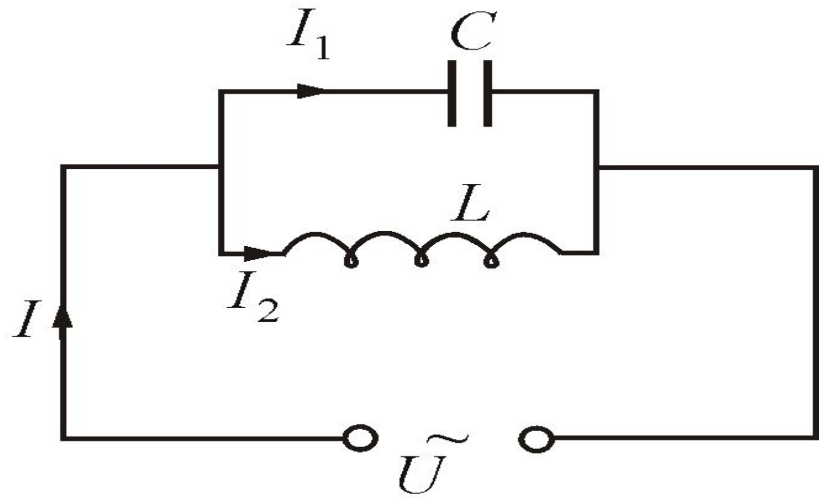
- Тогда $\mathbf{U} = \mathbf{U_R}$, а U_c и U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе.
- Такой вид резонанса называется ***резонансом напряжения*** или ***последовательным резонансом***.
- Резонансные кривые для напряжения *U* изображены на рисунке.
- Они сходны с резонансными кривыми для ускорения *a* при механических колебаниях.

Вынужденные электрические колебания. Резонанс



Вынужденные электрические колебания. Резонанс

- В цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность, наблюдается другой тип резонанса.



Вынужденные электрические колебания. Резонанс

Вынужденные электрические колебания. Резонанс