

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 1. Виды и признаки колебаний
- 2. Параметры гармонических колебаний
- 3. Графики смещения скорости и ускорения
- 4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний
- 5. Энергия гармонических колебаний
- 6. Гармонический осциллятор

Виды и признаки колебаний

- В физике особенно выделяют колебания двух видов – *механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации*, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека.
- Так, механические колебания плотности воздуха воспринимаются нами как звук, а быстрые электромагнитные колебания – как свет.
- С помощью звука и света мы получаем основную часть информации об окружающем нас мире.
- Для колебаний характерно *превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.*
- *Колебательным движением (или просто колебанием) называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости во времени.*

Виды и признаки колебаний

- *Три признака колебательного движения:*
- **повторяемость (периодичность)** – движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- **ограниченность** пределами крайних положений;
- **действие силы**, описываемой функцией

$$F = -kx.$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются, так называемые, *гармонические колебания*.
- Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, $F = -kx$), совершает *гармонические колебания*.

- Саму такую систему часто называют ***гармоническим осциллятором***.
- Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:
- колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, ***близкий к гармоническому***;
- различные ***периодические процессы*** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как ***наложение гармонических колебаний***.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- Периодический процесс можно описать уравнением:
$$f(t) = f(t + nT)$$
- .
- По определению, **колебания называются гармоническими**, если зависимость некоторой величины x имеет вид
- или
- $x = A \sin \varphi$ или $x = A \cos \varphi$ используются в зависимости от условия задачи, A и φ – параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- Для изучения колебательного движения нам придется ввести несколько терминов – *параметров колебательного движения.*
- Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют *смещением x .*
- *Максимальное смещение* – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется *амплитудой* и обозначается, буквой *A .*

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- Выражение, являющееся аргументом синуса или косинуса в формуле , определяет смещение x в данный момент времени t и называется **фазой колебания**.
- При $t=0$ $\varphi = \varphi_0$, поэтому называется **начальной фазой колебания**.
- Фаза измеряется в радианах и определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени.
- Т.к. синус и косинус изменяются в пределах от +1 до , то -1, то x может принимать значения от $+A$ до $-A$.

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку называется ***полным колебанием***.
- ***Частота колебаний ν*** определяется, как число полных колебаний в 1 секунду.
- Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен числу полных колебаний в одну секунду.
- Очевидно, что
$$\nu = \frac{1}{T}$$

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- ***T* – период колебаний** – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

- ***\omega* – циклическая (круговая) частота** – число полных колебаний за 2π секунд.

- $$\omega = 2\pi\nu$$

- Заметим, что фаза φ не влияет на форму кривой $x(t)$, а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени t .

ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- Колебания характеризуются не только смещением, но и *скоростью* и *ускорением* .
- Если смещение описывается уравнением

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

то, по определению

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Графики смещения скорости и ускорения

- Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

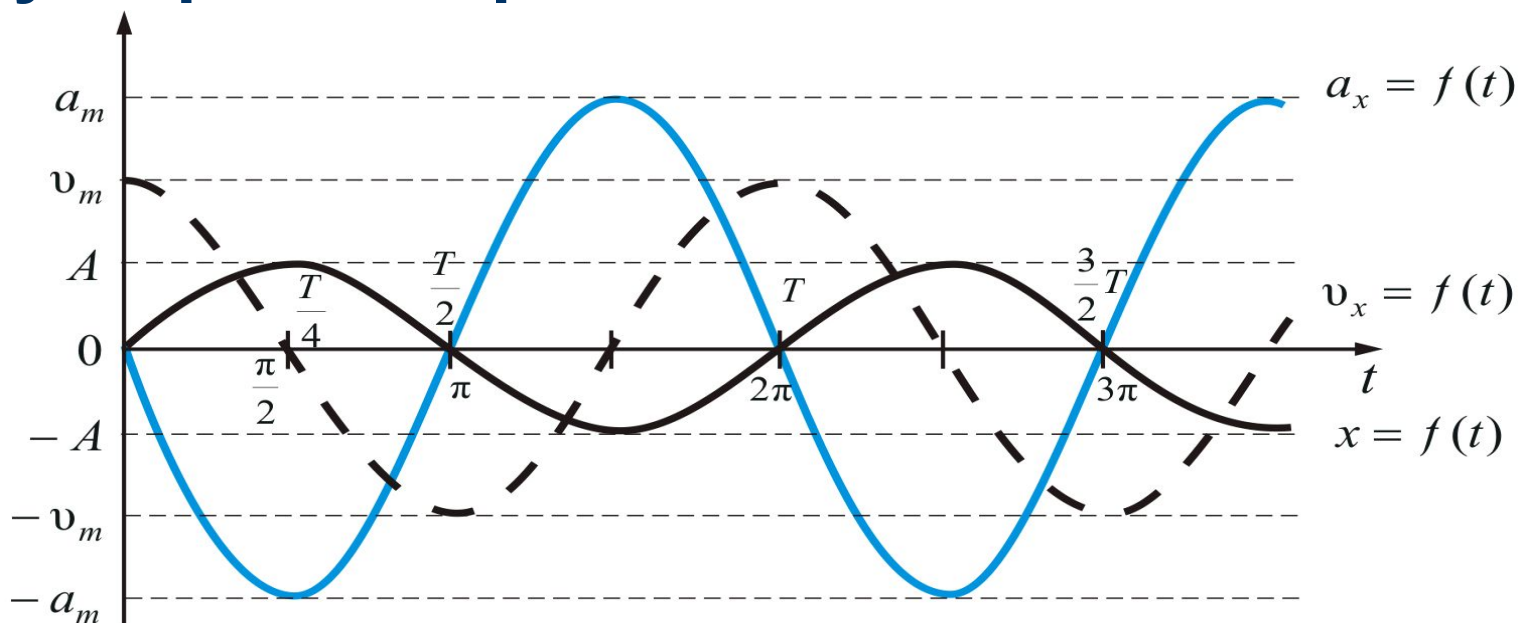
- Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

Графики смещения скорости и ускорения

- *Скорость колебаний тела максимальна и, по абсолютной величине, равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия .*
- *При максимальном смещении скорость равна нулю;*
- *Ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.*
- *Ускорение всегда направленно к положению равновесия, поэтому, удаляясь от положения равновесия, тело движется замедленно, приближаясь к нему – ускоренно.*
- *Ускорение всегда прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения.*
- *Все эти выводы могут служить определением гармонического колебания.*

Графики смещения скорости и ускорения

- Графики смещения, скорости и ускорения гармонических колебаний:



Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- Второй закон Ньютона позволяет, в общем виде, записать связь между силой и ускорением, при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой m .

$$F_x = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x$$

- Отсюда следует, что сила F пропорциональна x и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют возвращающей силой).
- Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- Примером сил удовлетворяющих этому уравнению являются **упругие силы**.
- Силы же имеющие иную природу, но удовлетворяющие этому уравнению называются **квазиупругими**.
- Квазиупругая сила $F_x = -kx$,
- Подставляя F_x в основное уравнение получаем:
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- В случае прямолинейных колебаний вдоль оси x , проекция ускорения на эту ось

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- Подставив выражения для a_x и F_x во второй закон Ньютона, получим **основное уравнение динамики гармонических колебаний**, вызываемых **упругими** или **квазиупругими** силами:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

- Решение этого уравнения всегда будет выражение вида $x = A \sin(\omega t + \varphi)$
- т.е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является *гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону.*

Энергия гармонических колебаний

- Вычислим энергию тела массой m , совершающего гармонические колебания с амплитудой A и круговой частотой ω .
- **Потенциальная энергия тела U** , смещенного на расстояние x от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила, перемещая тело в положение равновесия.

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \quad dU = -Fdx = kx dx \qquad U = k \int_0^x x dx$$

Энергия гармонических колебаний

- Или $U = \frac{kx^2}{2} \quad U = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$

- **Кинетическая энергия**

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

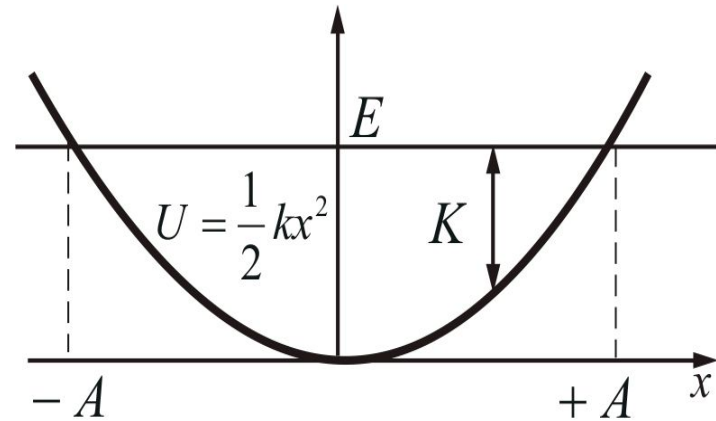
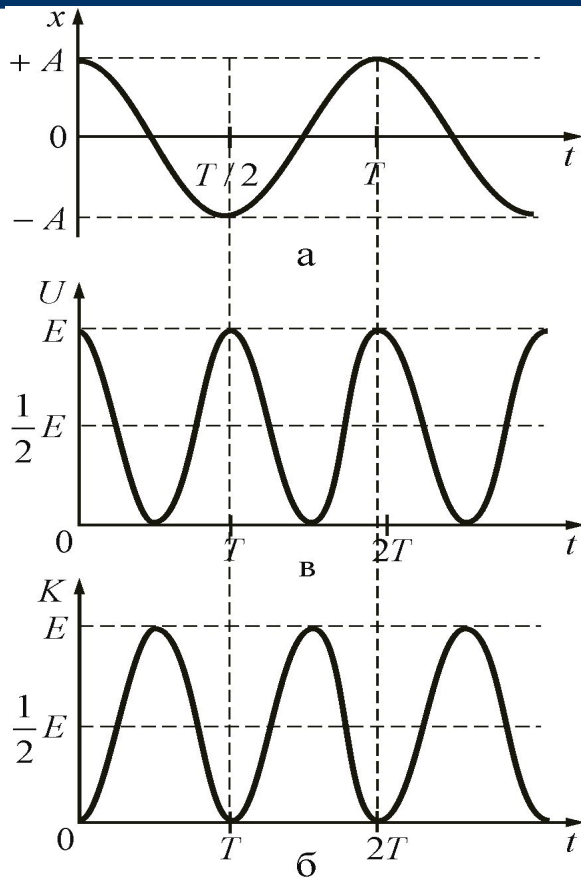
- **Тогда**

$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Энергия гармонических колебаний

- Или
$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$
- Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.
- В случае свободных незатухающих колебаний полная энергия не зависит от времени, поэтому и амплитуда A – не зависит от времени.

Энергия гармонических колебаний



Гармонические осцилляторы

- Колебания **гармонического осциллятора** являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики.
- Примерами гармонического осциллятора являются **пружинный, математический и физический маятники**, а также **колебательный контур** (для малых токов и напряжений).

Гармонические осцилляторы

- **Пружинный маятник**

- $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$ **или** $\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

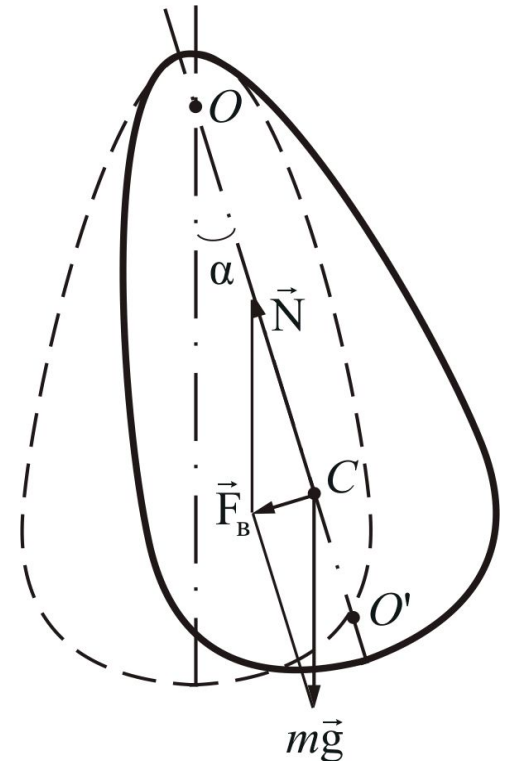
- **Математический маятник (только для малых колебаний)**

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Гармонические осцилляторы

- **Физический маятник** — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C



Гармонические осцилляторы

- При отклонении этого тела от положения равновесия на угол α , также возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl \sin \alpha$$

- где l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника C .
- Обозначим через J – момент инерции маятника относительно точки подвеса O .

Гармонические осцилляторы

- Тогда $J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha$

- В случае малых колебаний $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0$

$$\omega^2 = \frac{mgl}{J} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

- Величину момента инерции J иногда бывает трудно вычислить.

Гармонические осцилляторы

- Сопоставляя формулы для периода колебаний физического и математического маятников, можно обозначить: $l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}$
- где $l_{\text{пр}}$ – **приведенная длина физического маятника** – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

- 1. Свободные затухающие механические колебания
- 2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания
- 3. Вынужденные механические колебания
- 4. Автоколебания

Затухающие колебания

- Все реальные колебания являются затухающими.
- Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается.
- Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например, маятник).

Затухающие колебания

- Тогда сила трения (или сопротивления)

$$F_{\text{тр}} = -r\dot{x}$$

- Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x

$$ma_x = -kx - r\dot{x}$$

- Или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

- Введем обозначения

$$\frac{r}{2m} = \beta \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

Затухающие колебания

- Тогда однородное дифференциальное уравнение второго порядка запишется так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- Решение этого уравнения имеет вид при $\beta \leq \omega_0$

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi_0)$$

- A_0 и φ_0 – определяются из краевых условий (начальных и граничных) задачи. β и ω – из самого уравнения.

Затухающие колебания

- Найдем ω . Здесь оно уже не равно ω_0 ($\omega \neq \omega_0$).
- Подставим решение дифференциального уравнения в само дифференциальное уравнение продифференцировав решение один и два раза по времени.
- Тогда имеем: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ или $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$.
- где ω_0 – **круговая частота собственных колебаний (без затухания)**; ω – **круговая частота свободных затухающих колебаний**.

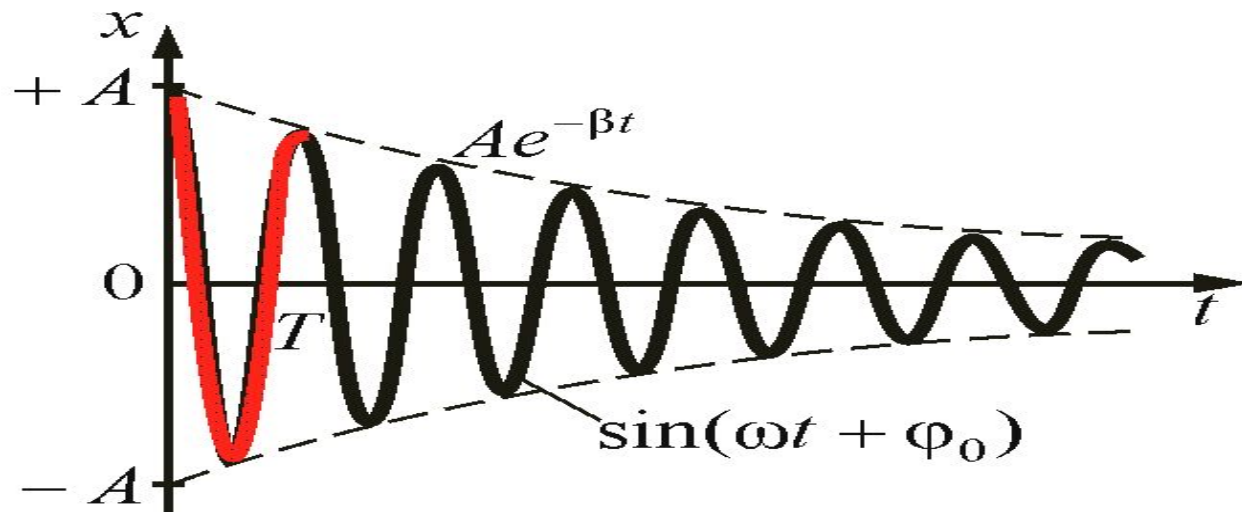
Затухающие колебания

- Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды.
- Поэтому называть ω – *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*.
- По этой же причине и $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, называется *условным периодом* затухающих колебаний.

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени t и $t+T$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$



Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- **Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T , называется логарифмическим декрементом затухания.**

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

- **Выясним физический смысл χ и β .**
- **Обозначим через τ – время, в течение которого амплитуда A уменьшается в e раз.**
- $\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1$, **откуда** $\beta\tau = 1$; $\beta = \frac{1}{\tau}$.

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- Следовательно, коэффициент затухания β – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз, τ – время релаксации.
- Пусть N число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в e – раз.

• Тогда

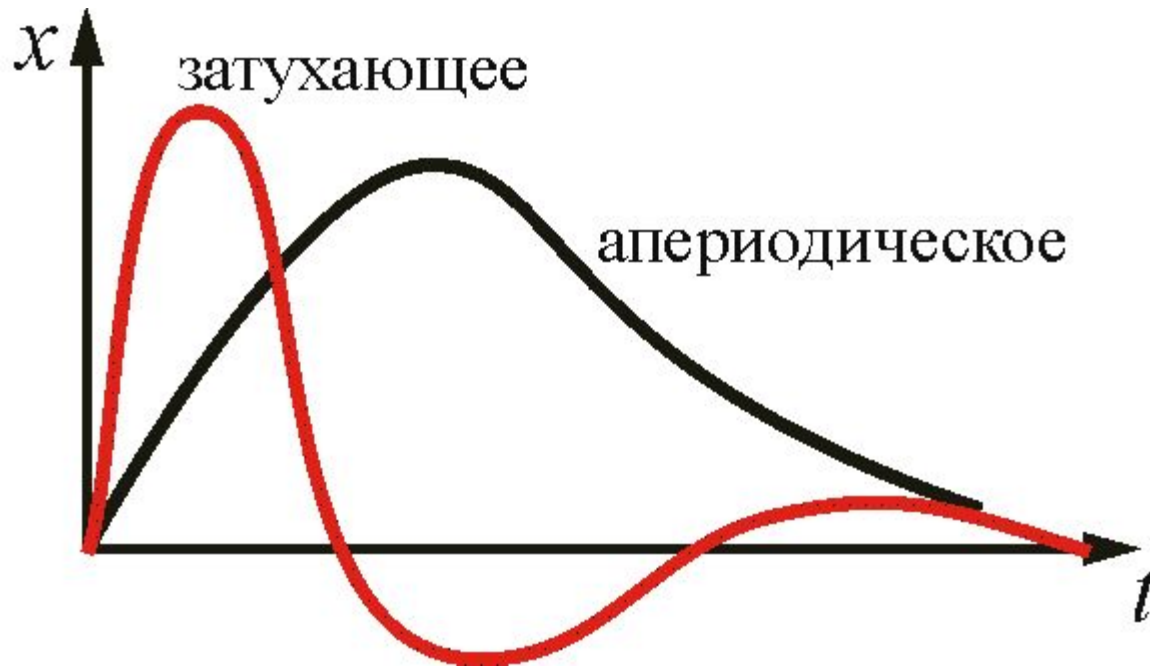
$$\tau = NT; \quad \beta = \frac{1}{\tau}$$

$$\chi = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N}$$

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

- Следовательно, логарифмический декремент затухания χ есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечению которых амплитуда A уменьшается в e раз.
- Если $\chi = 0,01$ то $N = 100$.
- При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний.
- Когда сопротивление становится равным ***критическому*** , то процесс будет ***апериодическим*** .

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания



Вынужденные механические колебания

- Рассмотрим систему, на которую кроме упругой силы ($-kx$) и сил сопротивления ($-rv$) действует добавочная **периодическая сила F – вынуждающая сила**. Для колебаний вдоль оси x запишем **основное уравнение колебательного процесса**,
- $ma_x = -kx - rv_x + F_x$ или $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x$
- где $f_x = F_x/m$ – вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$f_x = F_0 \cos \omega t.$$

Вынужденные механические колебания

- Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы, ω .
- Уравнение установившихся вынужденных колебаний $x = A \sin(\omega t + \varphi)$
- Наша задача найти амплитуду A и разность фаз φ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Вынужденные механические колебания

- Обратим внимание на то, что скорость на $\pi/2$ опережает смещение, а ускорение на $\pi/2$ опережает скорость.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

- Преобразуем и $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ через косинус:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2),$$

Вынужденные механические колебания

- Обозначим $\alpha = \varphi - \pi/2$ – угол между смещением и вынуждающей силой.
- Подставим все эти выражения в дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний и получаем в итоге:

$$\omega^2 A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega A \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

- **или**

$$\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA} \cos \omega t$$

Вынужденные механические колебания

- Каждое слагаемое последнего уравнения можно представить в виде соответствующего вращающегося вектора амплитуды:
амплитуда ускорения, амплитуда скорости, амплитуда смещения, амплитуда вынуждающей силы, причем $|A_3| > |A_1|$.

$$A_1 = \omega^2$$

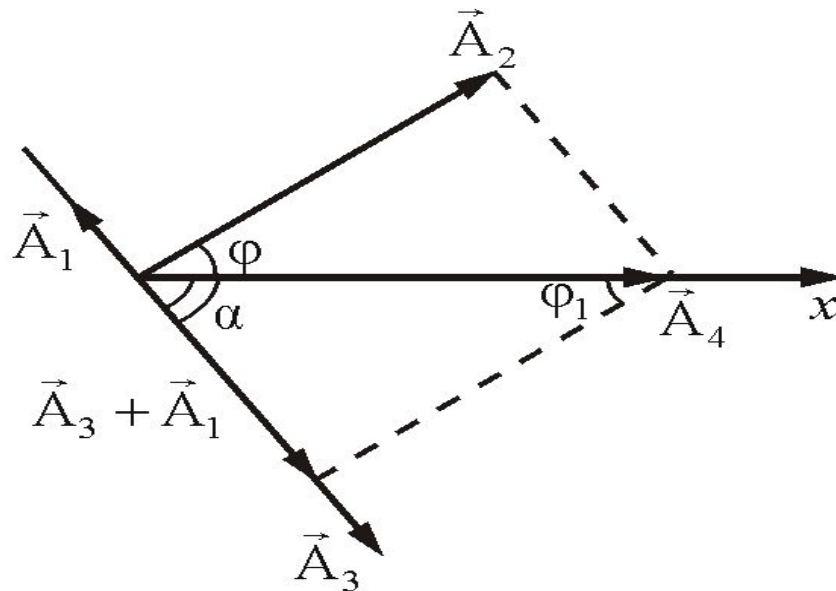
$$A_2 = 2\beta\omega$$

$$A_3 = \omega_0^2$$

$$A_4 = F_0 / mA$$

Вынужденные механические колебания

- Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов: $\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$



Вынужденные механические колебания

- Из рисунка видно, что $A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$
- Найдем амплитуду A :

$$A = \frac{F_0}{m A_4} = \frac{F_0}{m \sqrt{(A_3 - A_1)^2 + A_2^2}},$$

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

- Таким образом, $A \sim F_0/m$ и $\sim 1/\beta$.

Вынужденные механические колебания

- При постоянных F_0 , m и β – амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы ω и свободных незатухающих колебаний системы ω_0 .
- Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}$$

Вынужденные механические колебания

- Из рисунка видно, что сила опережает смещение на угол, который определяется из выражения:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_3 - A_1} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Проанализируем выражение для амплитуды.
- (частота вынуждающей силы $\omega = 0$ равна нулю), тогда $x = F_0/m\omega_0^2$
- Статическая амплитуда, колебания не совершаются.

Вынужденные механические колебания

- 2. Затухания нет $\beta = 0$
- С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растёт и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \rightarrow \infty$).
- Это явление называется – **резонанс**.
- При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается.

Вынужденные механические колебания

- Если $\beta \neq 0$, амплитуда будет максимальна при минимальном значении знаменателя.
- Для нахождения точки перегиба возьмем первую производную по ω от подкоренного выражения и приравняем ее к нулю.
- Тогда резонансная частота будет определяться выражением:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 1. Квазистационарные токи
- 2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления
- 3. Свободные затухающие электрические колебания
- 4. Вынужденные электрические колебания
- 5. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Квазистационарные токи

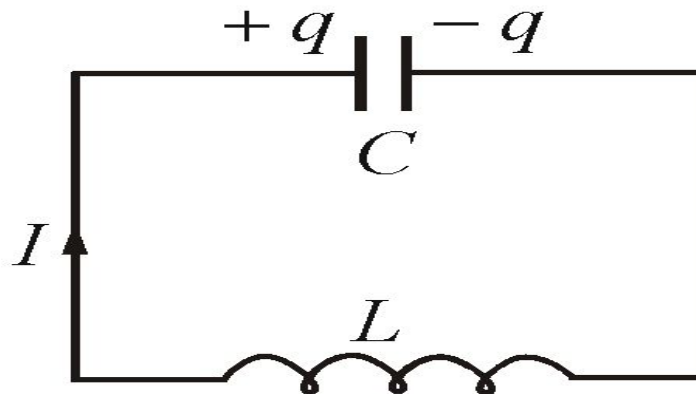
- При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени.
- Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа, были установлены для постоянного тока.
- Однако, они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющихся тока и напряжения, если их изменения происходят не слишком быстро.
- Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света c .

Квазистационарные токи

- Пусть l – длина электрической цепи.
- Тогда время распространения сигнала в данной цепи $t = l/c$.
- Если $t \ll T$ (T – период колебаний электрического тока), то такие токи называются **квазистационарными**.
- При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным.
- Для частоты условие квазистационарности выполняется при длине цепи ~ 100 км.

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

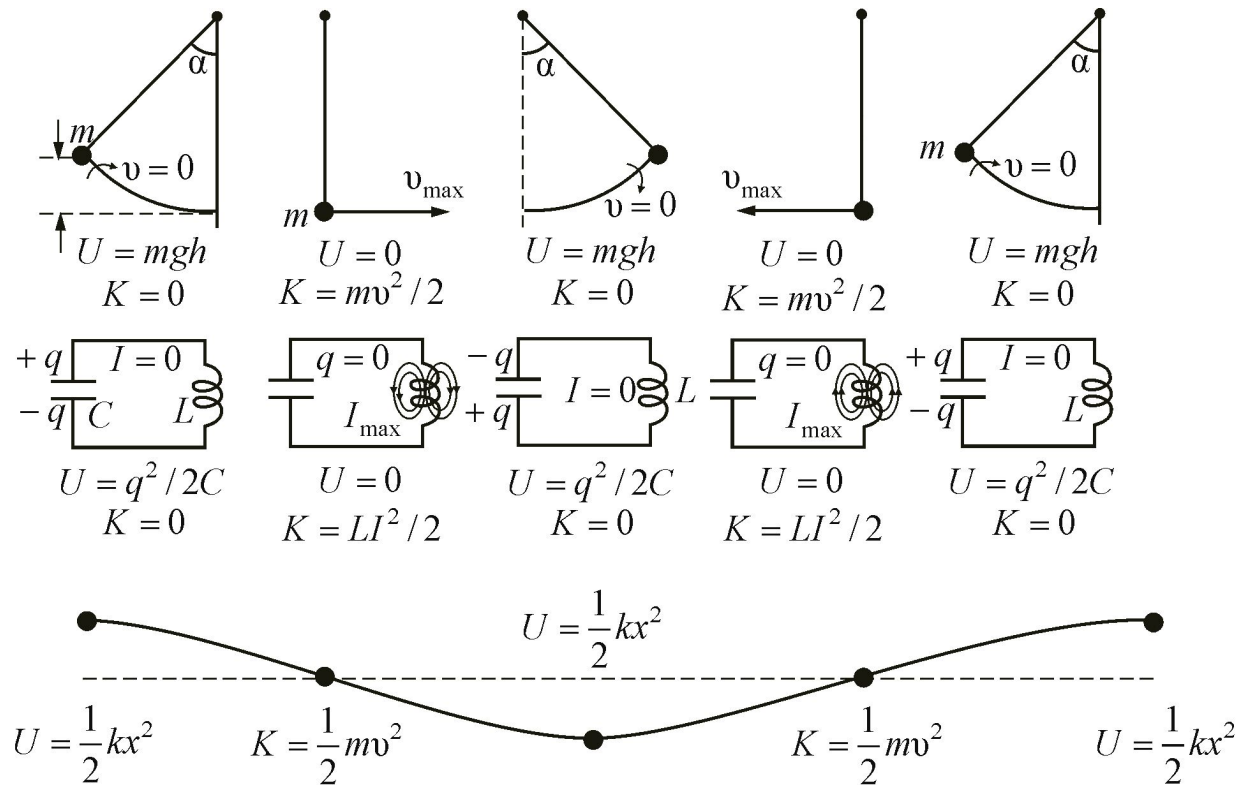
- В цепи, содержащей индуктивность L и ёмкость C могут возникать электрические колебания.
- Такая цепь называется **колебательным контуром**



Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Поскольку активное сопротивление контура , полная энергия остаётся постоянной.
- Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна и наоборот.
- Рассмотрим процессы, происходящие в колебательном контуре в сравнении с колебаниями маятника .

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления



Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что, энергия электрического поля аналогична потенциальной энергии, а энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии; L играет роль массы m , а $1/C$ – роль коэффициента жесткости k .
- Наконеч заряду q соответствует смещение маятника из положения равновесия x , силе тока I – скорость v , а напряжению U – ускорение a .

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Эта аналогия сохраняется и в математических уравнениях.
- В соответствии с законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии), можно записать

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{dq}{dt'}$$

$$\varepsilon_i = -L \frac{di}{dt'}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Введем обозначение: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – *собственная частота контура*, отсюда получим *основное уравнение колебаний в контуре*:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

- Решением этого уравнения является выражение вида:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с собственной частотой контура – ω_0 .
- Для периода колебаний справедлива, так называемая **формула Томсона**:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Продифференцируем по времени выражение для заряда и получим выражение для тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем $1/C$:

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

- Максимальные значения

$$U_m = \frac{q_m}{C};$$

$$I_m = \omega_0 q_m;$$

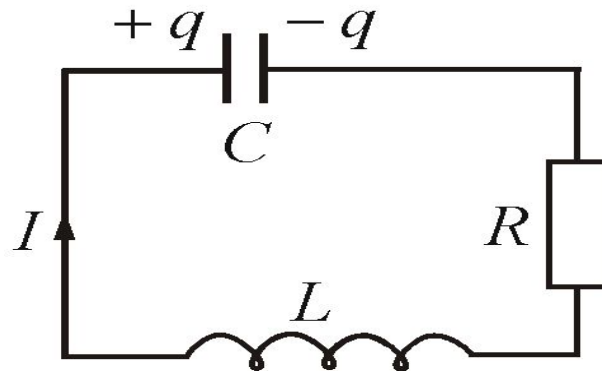
$$U_m C = \frac{I_m}{\omega_0};$$

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{вол}}$$

Свободные затухающие электрические колебания

- Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением.
- Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.



Свободные затухающие электрические колебания

- По второму закону Кирхгофа

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

- Обозначив $\beta = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания;

-

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- получим уравнение затухающих колебаний в контуре с R , L и C :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Свободные затухающие электрические колебания

- При $\beta \leq \omega_0$ т.е. $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

- Затухание принято характеризовать *логарифмическим декрементом затухания*

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}$$

Свободные затухающие электрические колебания

- Колебательный контур часто характеризуют **добротностью Q** , которая определяется как величина, обратно пропорциональная χ :

$$Q = \frac{\pi}{\chi} \quad \chi = \frac{1}{N} \quad Q = \pi N$$

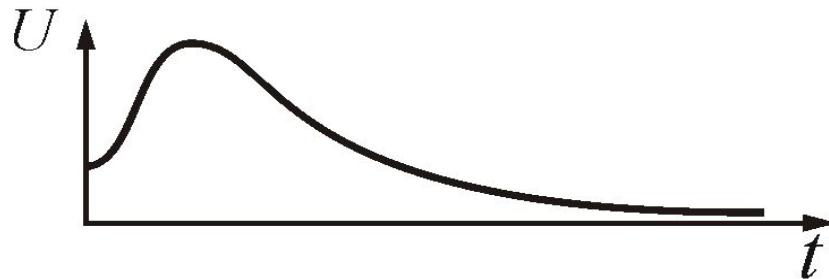
- Добротность определяется и по другому:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

- где W – энергия контура в данный момент, ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом.

Свободные затухающие электрические колебания

- При $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т.е. при $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ происходит апериодический разряд

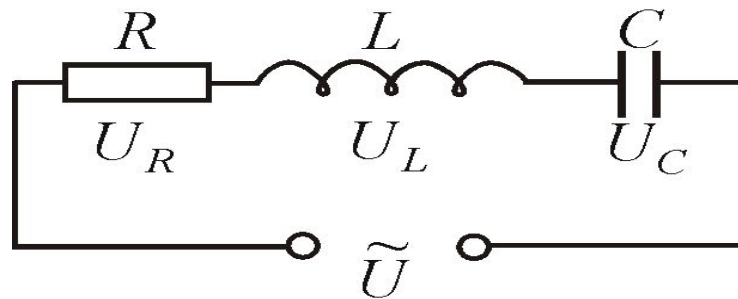


- Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется **критическим сопротивлением**.

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

- К контуру, изображенному на рисунке подадим переменное напряжение U

$$U = U_m \cos \omega t$$



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

- Это уравнение *вынужденных электрических колебаний*, которое совпадает с аналогичным уравнением механических колебаний.
- Его решение имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

- Величина $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ называется полным сопротивлением контура

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

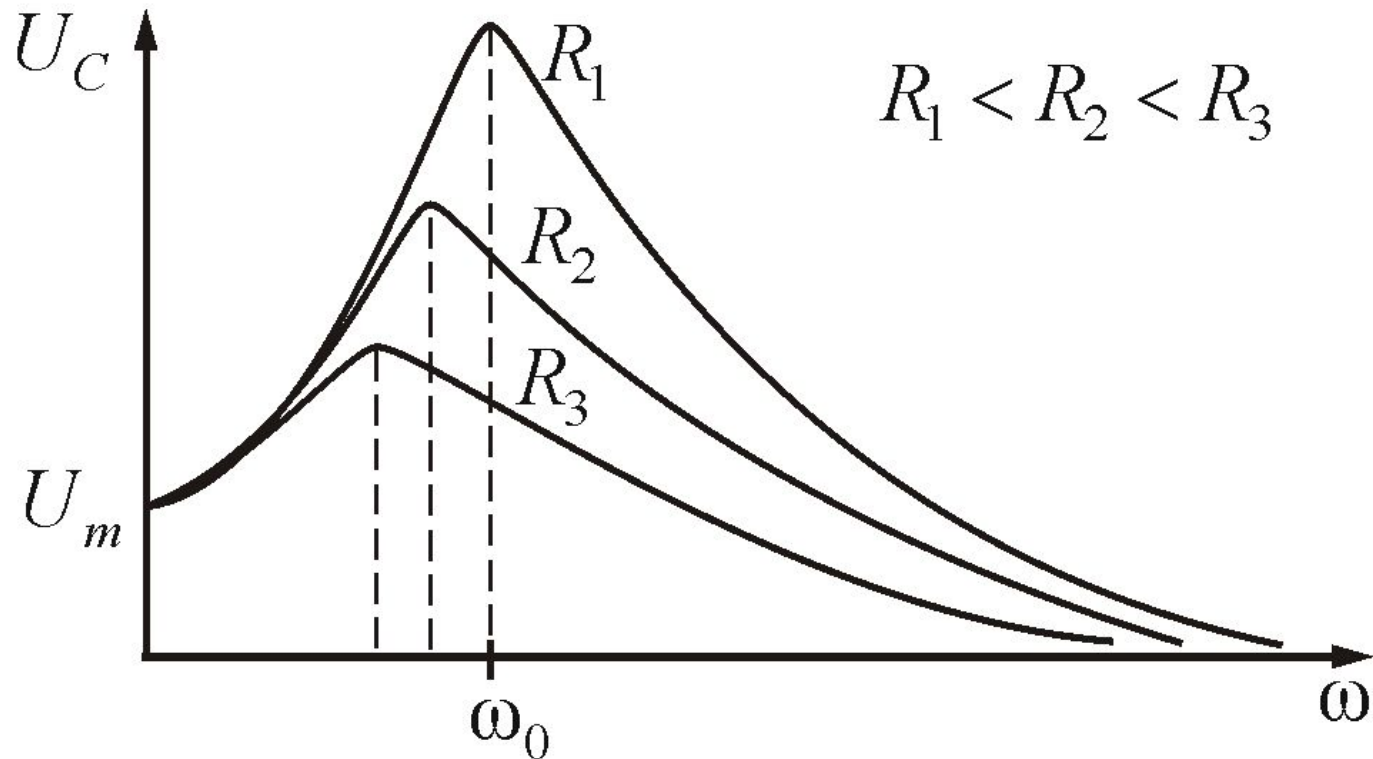
- При последовательном соединении R, L, C , в контуре когда $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ – наблюдается *резонанс*.
- При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ($\varphi = 0$).
- *Резонансная частота* при напряжении на конденсаторе U_c равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Вынужденные электрические колебания. Резонанс

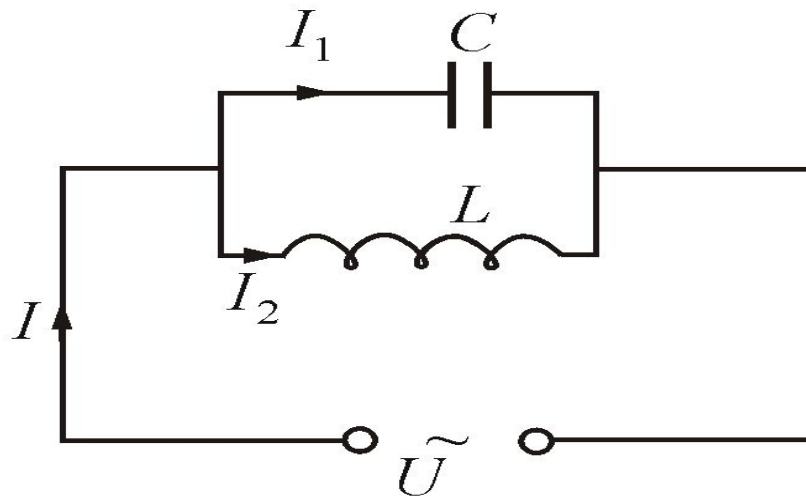
- Тогда $U = U_R$, а U_C и U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе.
- Такой вид резонанса называется *резонансом напряжения или последовательным резонансом*.
- Резонансные кривые для напряжения U изображены на рисунке.
- Они сходны с резонансными кривыми для ускорения a при механических колебаниях.

Вынужденные электрические колебания. Резонанс



Вынужденные электрические колебания. Резонанс

- В цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность, наблюдается другой тип резонанса.



Вынужденные электрические колебания. Резонанс



Вынужденные электрические колебания. Резонанс

