*

Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика

Кузнецов Сергей Иванович
доцент кафедры
ОФ ЕНМФ ТПУ

Сегодня: *

Тема 2 СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

2.1 Способы представления гармонических колебаний

2.2 Сложение гармонических колебаний. Биения

2.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

2.4 Фигуры Лиссажу (частные случаи)

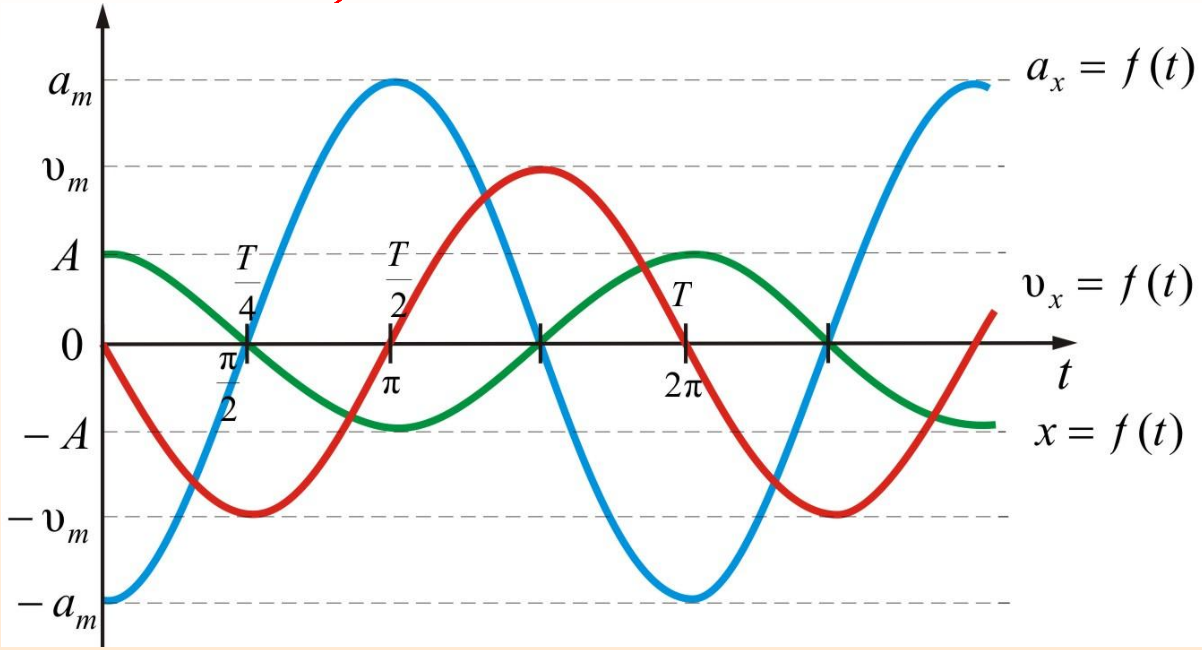
2.1 Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

•***аналитический:*** $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

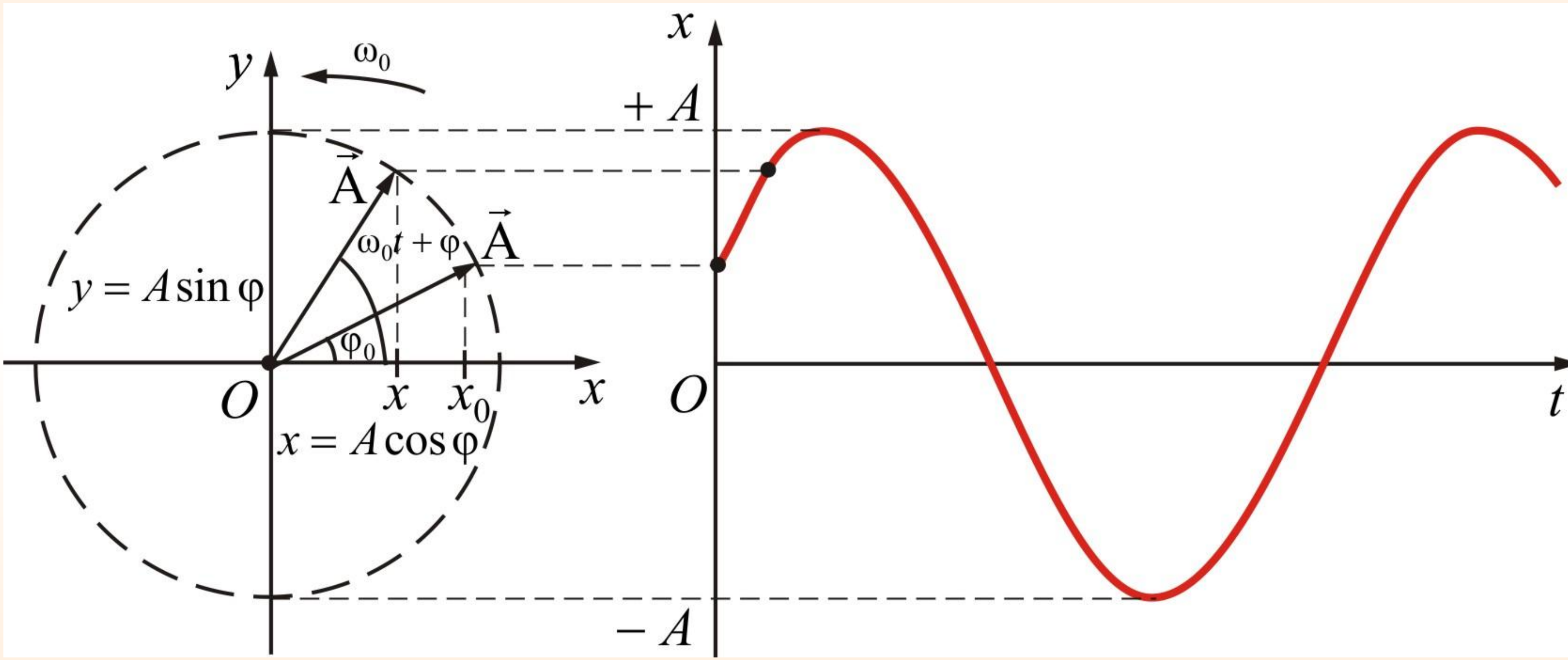
$\upsilon_x = \upsilon_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $a_x = -a_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

•***графический;***



•***геометрический,*** с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм).

Рассмотрим подробнее ***геометрический*** способ, с помощью вектора амплитуды ***(метод векторных диаграмм).***



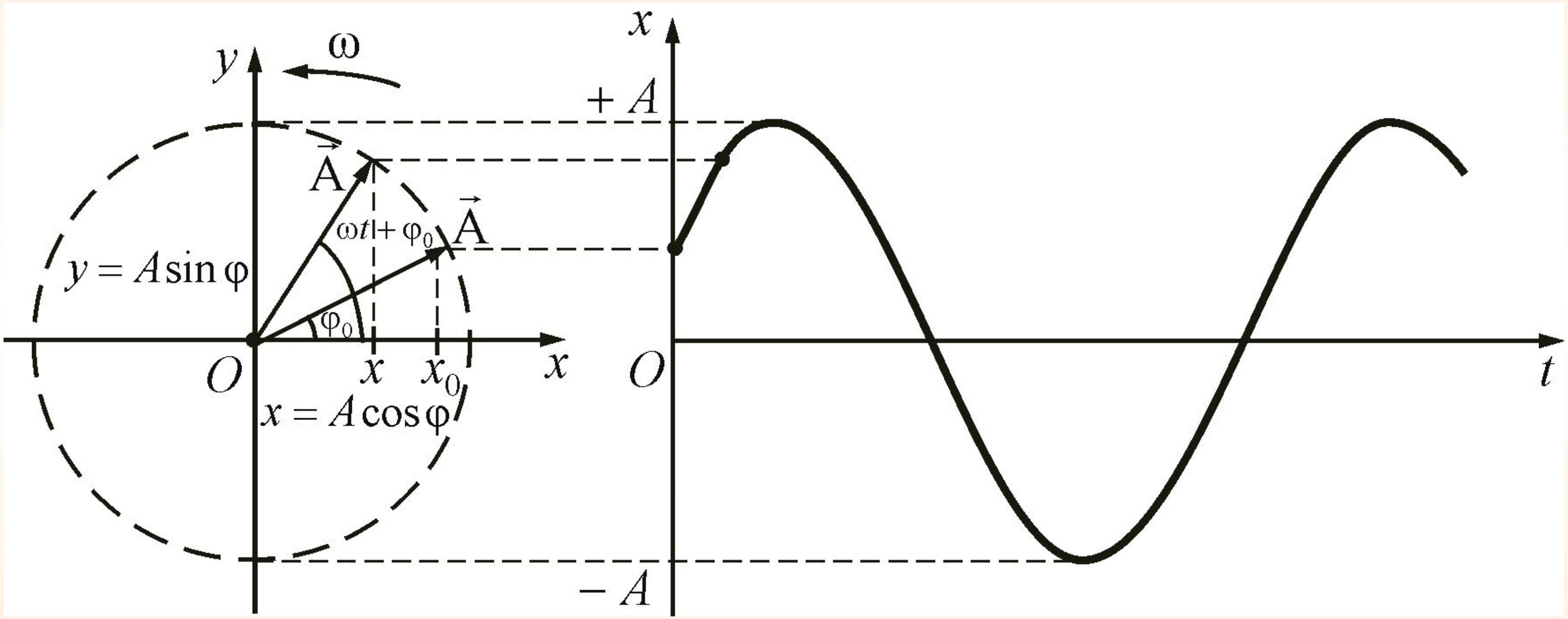
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$

Ox – опорная прямая

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ $x_0 = A\cos\varphi_0$

Вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.

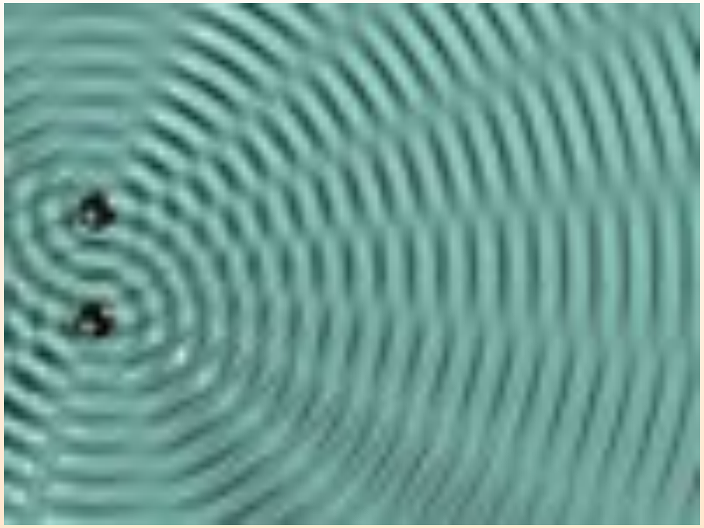


Проекция кругового движения на ось y, также совершает гармоническое колебание

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

2.2 Сложение гармонических колебаний. Биения

Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая гармонически колеблющимся шариком.

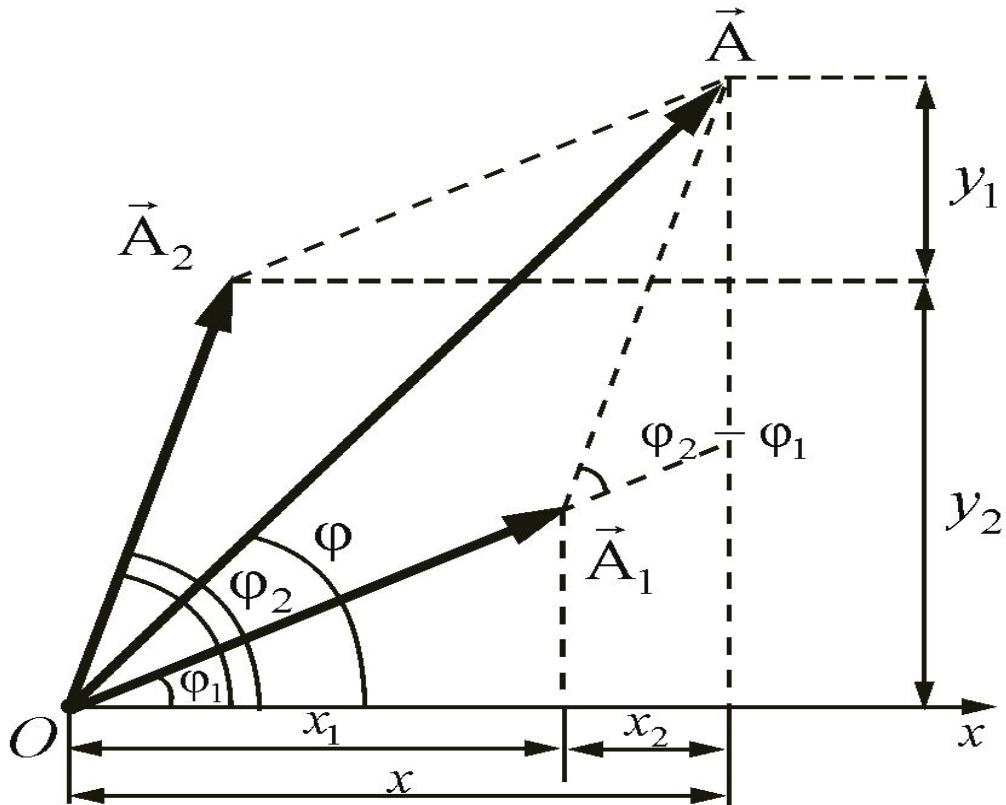


Интерференция между двумя круговыми волнами от точечных источников, колеблющихся в фазе друг с другом. На поверхности жидкости образуются узловые линии, в которых колебание max. или отсутствует.

Пусть ***точка*** одновременно участвует ***в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.***

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \qquad (2.2.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



Такие два колебания называются когерентными, их разность фаз не зависит от времени:

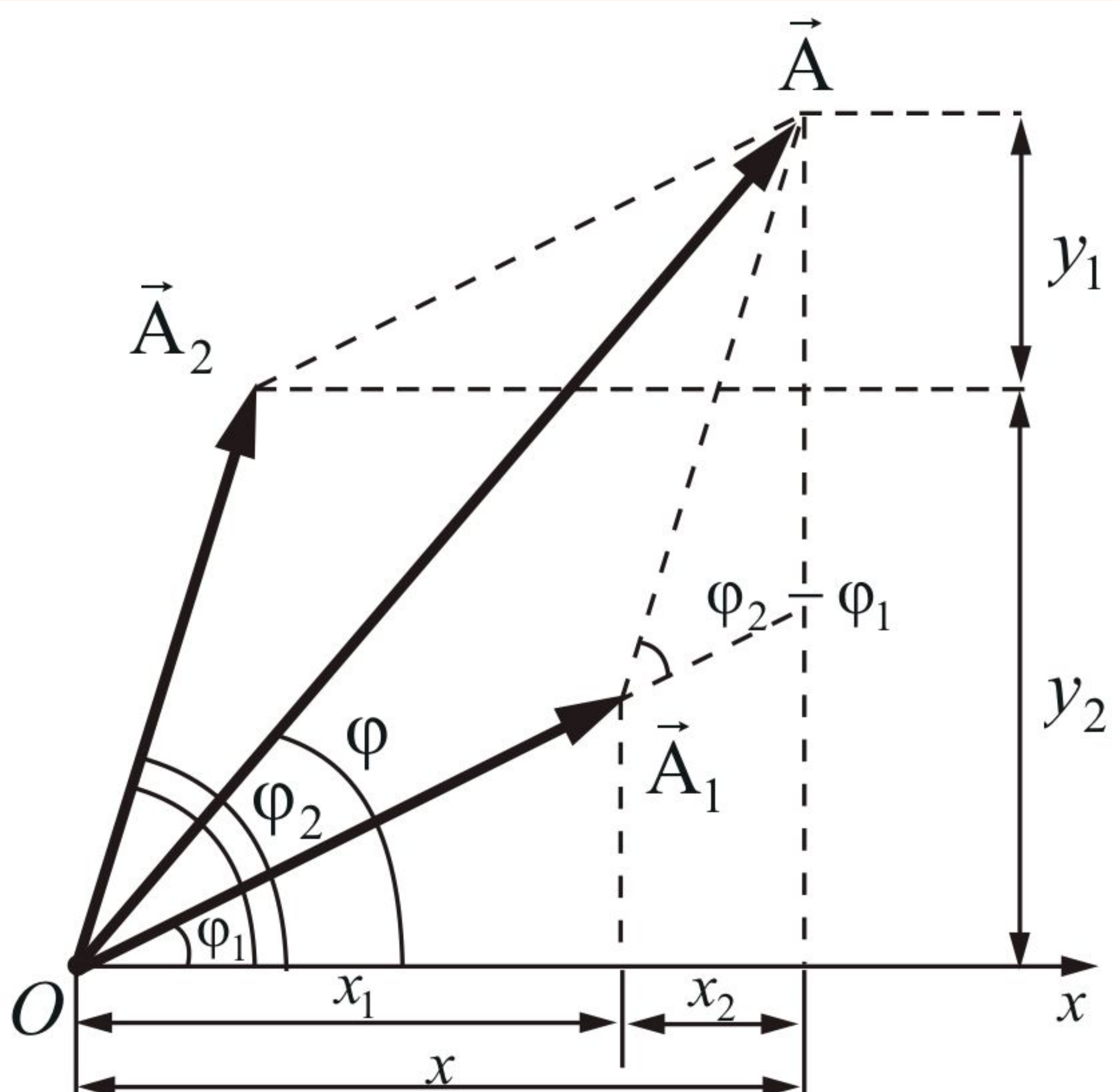
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Ox – опорная прямая

A_1 – амплитуда 1-го колебания

φ_1 – фаза 1-го колебания.



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

- ***результирующее колебание,*** тоже гармоническое, с частотой **ω:**

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду, результирующего колебания:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (2.2.2)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}} \qquad (2.2.3)$$

Амплитуда ***A*** результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$

Рассмотрим несколько простых случаев.

1. Разность фаз равна нулю или четному числу π,

то есть $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ и

$$A = A_1 + A_2 \tag{2.2.4}$$

колебания синфазны

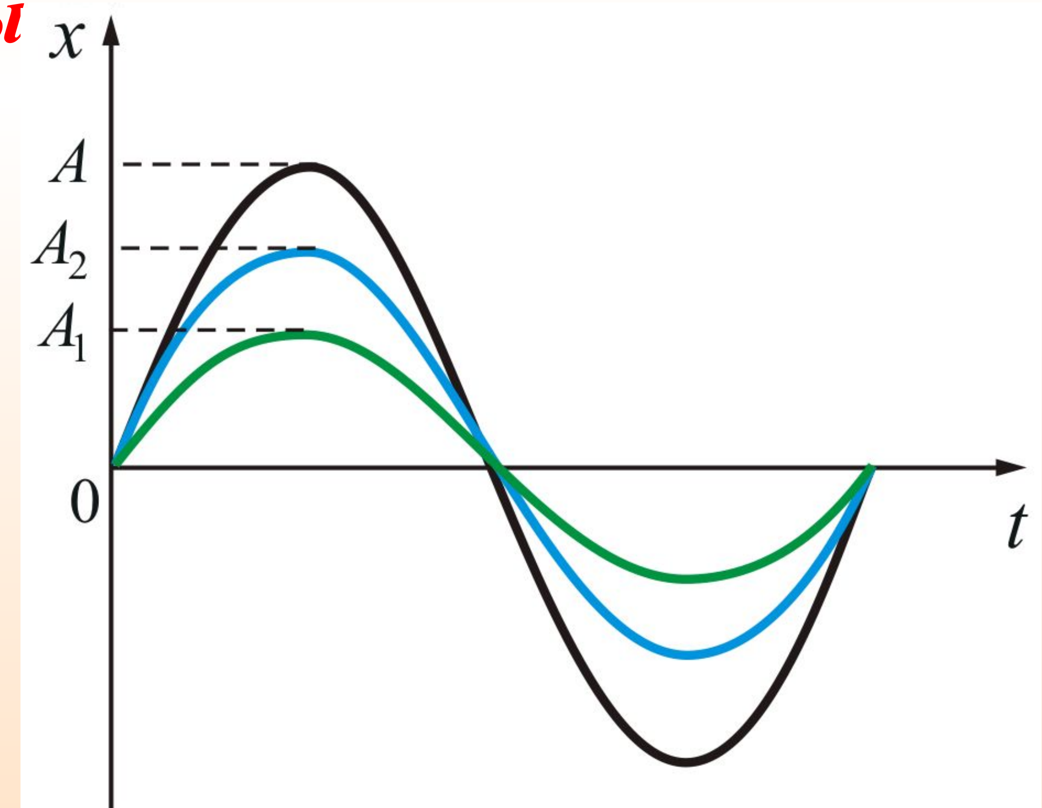


Рисунок 3

2. Разность фаз равна нечетному числу π, то есть $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$. Отсюда

$$A = |A_2 - A_1| \qquad (2.2.5)$$

колебания ***в противофазе***

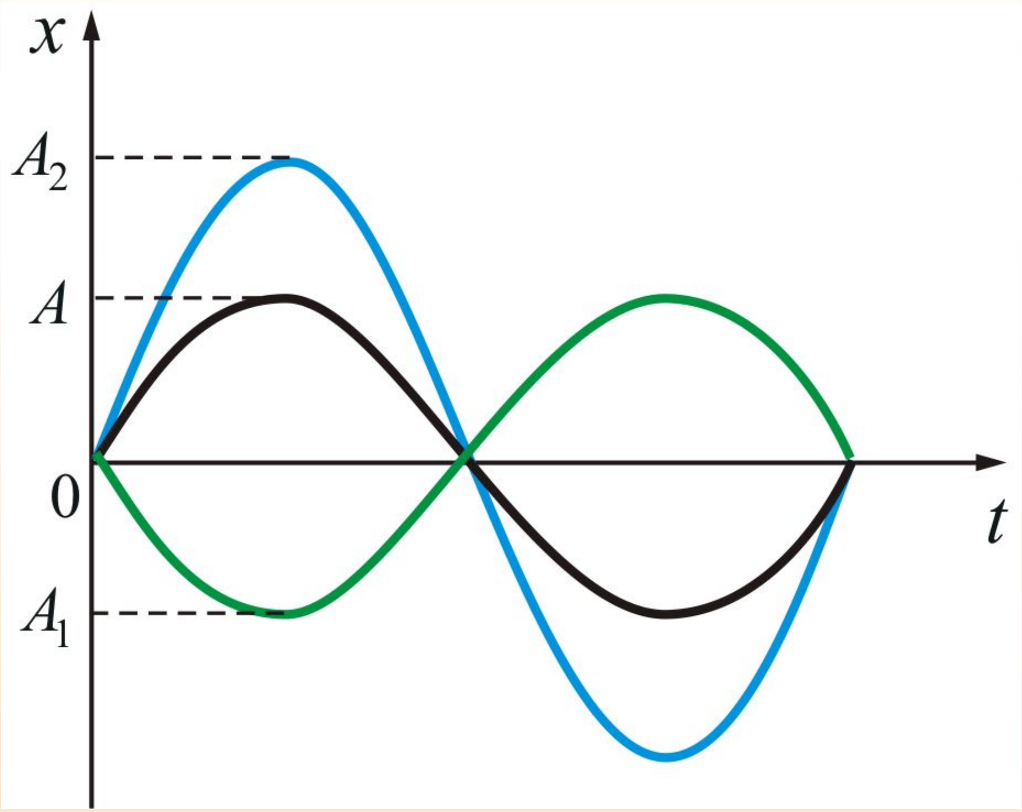


Рисунок 4

3. Разность фаз изменяется во времени произвольным образом

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)] \\ x_2 = A_2 \cos[\omega_2 t + \varphi_2(t)] \end{cases} \quad (2.2.6)$$

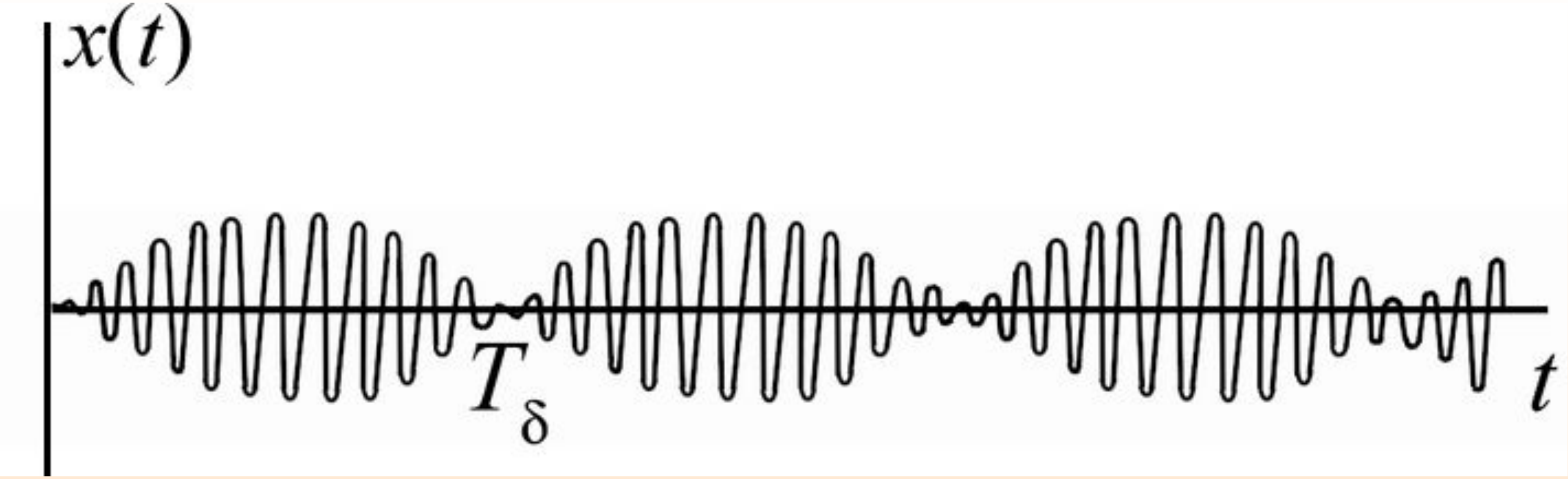
Это ***некогерентные колебания***

Здесь интересен случай, называемый биениями, когда частоты близки

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$, называются биениями.

$$x = A_б \cos \omega_0 t$$



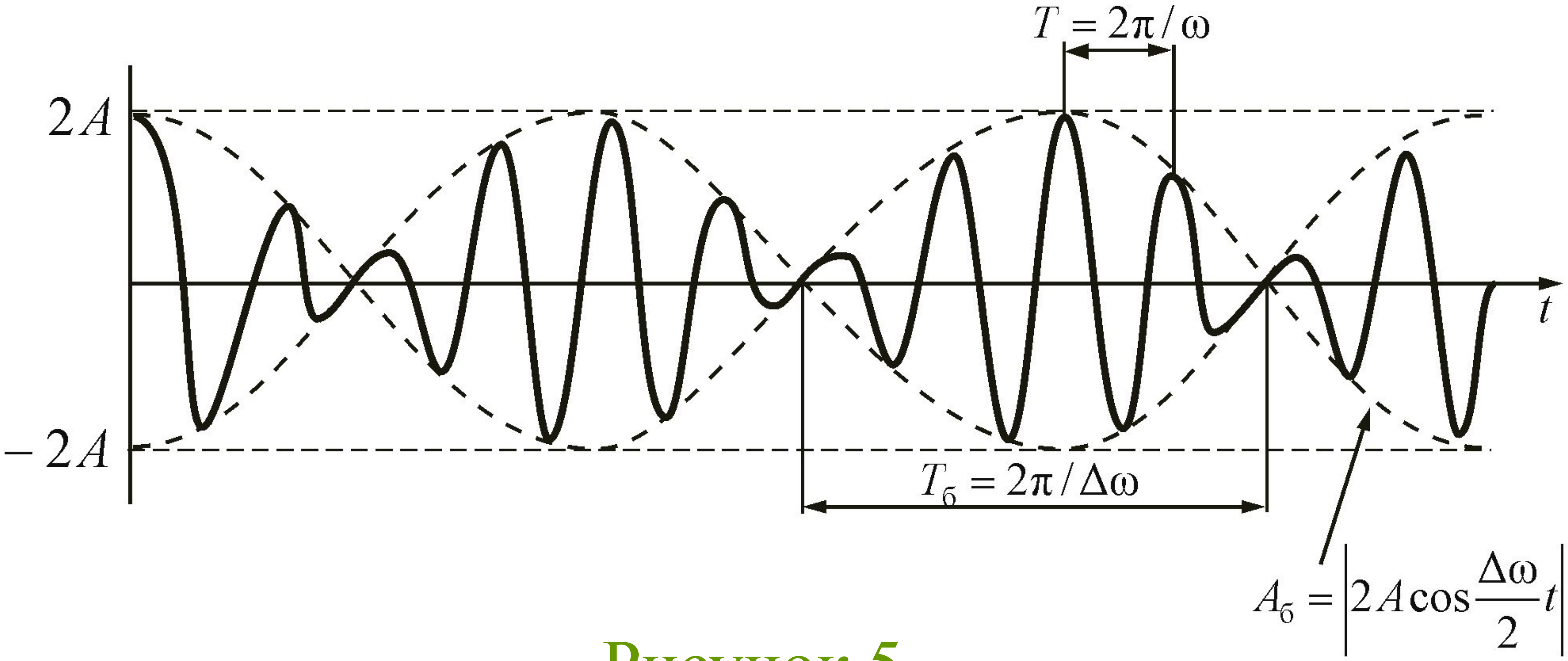


Рисунок 5

Колебания вида $x = A(t)\cos[\omega t + \varphi(t)]$ называются ***модулированными.***

Метод ***биений*** используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

Любые сложные периодические колебания можно представить в виде ***суперпозиции*** одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами кратными циклической частоте ω:

$$S(t) = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega + \varphi_1) +$$

$$+ A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots + A_n \cos(m\omega t + \varphi_n)$$

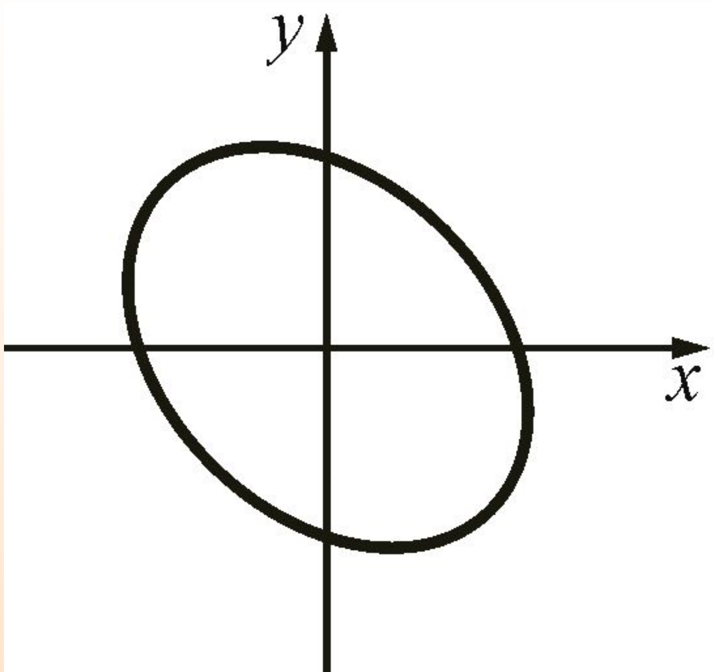
Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами ω, 2ω, 3ω, ..., называются *первой (или основной)*, *второй*, *третьей* и т.д. *гармониками* сложного периодического колебания.

2.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1); \qquad y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.3.1)$$



В результате получили уравнение ***эллипса*** с произвольно расположенными осями

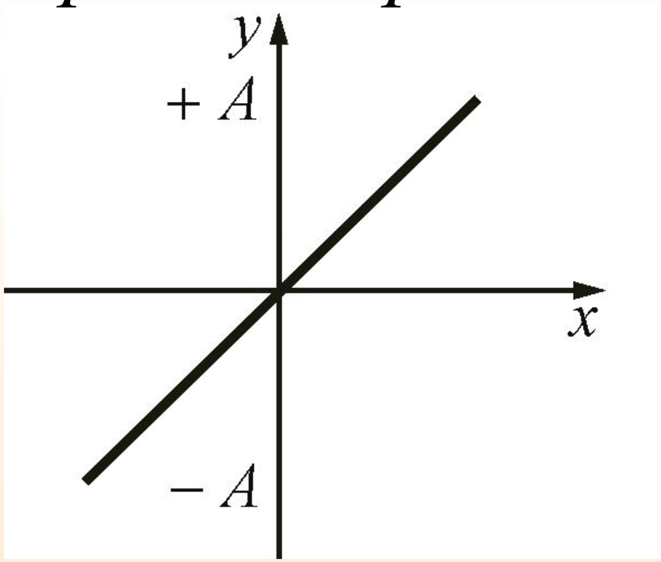
Рисунок 6

2.4 Фигуры Лиссажу (частные случаи)

1. Начальные фазы колебаний одинаковы $\varphi_1 = \varphi_2$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \qquad (2.4.1)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат

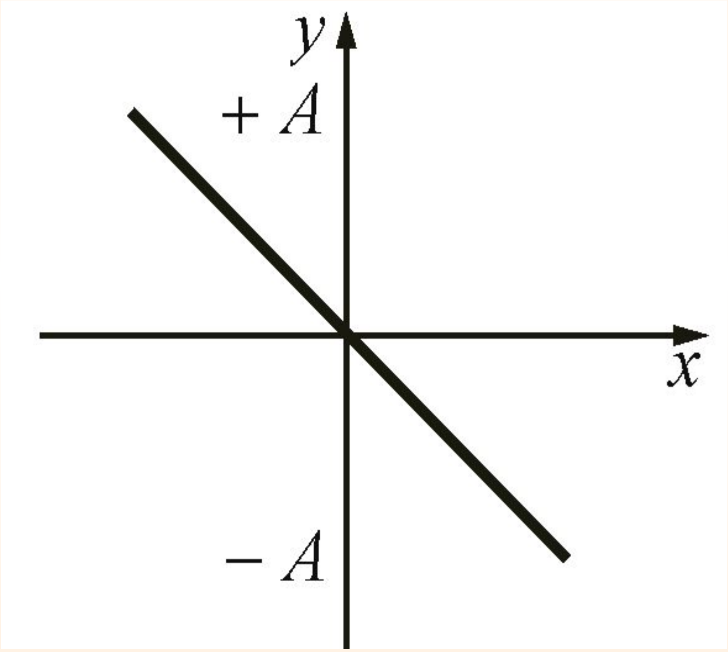


$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Такие колебания называются ***линейно поляризованными.***

2. Начальная разность фаз равна π. $\cos\pi = -1$

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x \qquad (2.4.2)$$



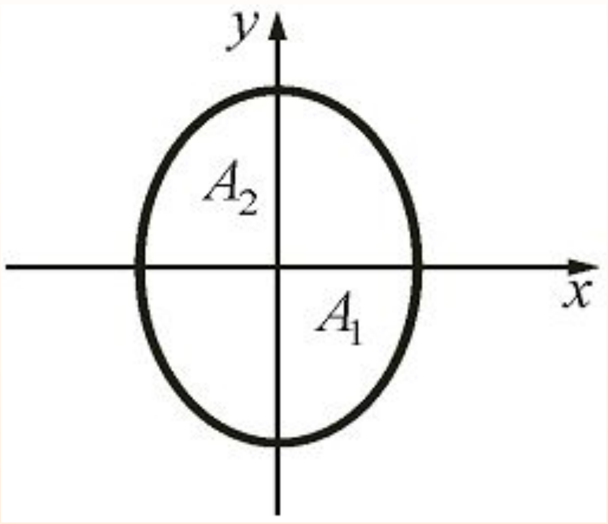
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

(2.4.3)

3. Начальная разность фаз равна π/2. $\cos \pi / 2 = 0$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \qquad (2.4.4)$$

– это уравнение эллипса с полуосями A_1 и A_2 (***Эллиптически поляризованные колебания***)



При $A_1 = A_2$ – получим уравнение окружности (***циркулярно-поляризованные колебания***).

4. Все остальные разности фаз дают эллипсы *с различным углом наклона относительно осей координат.*

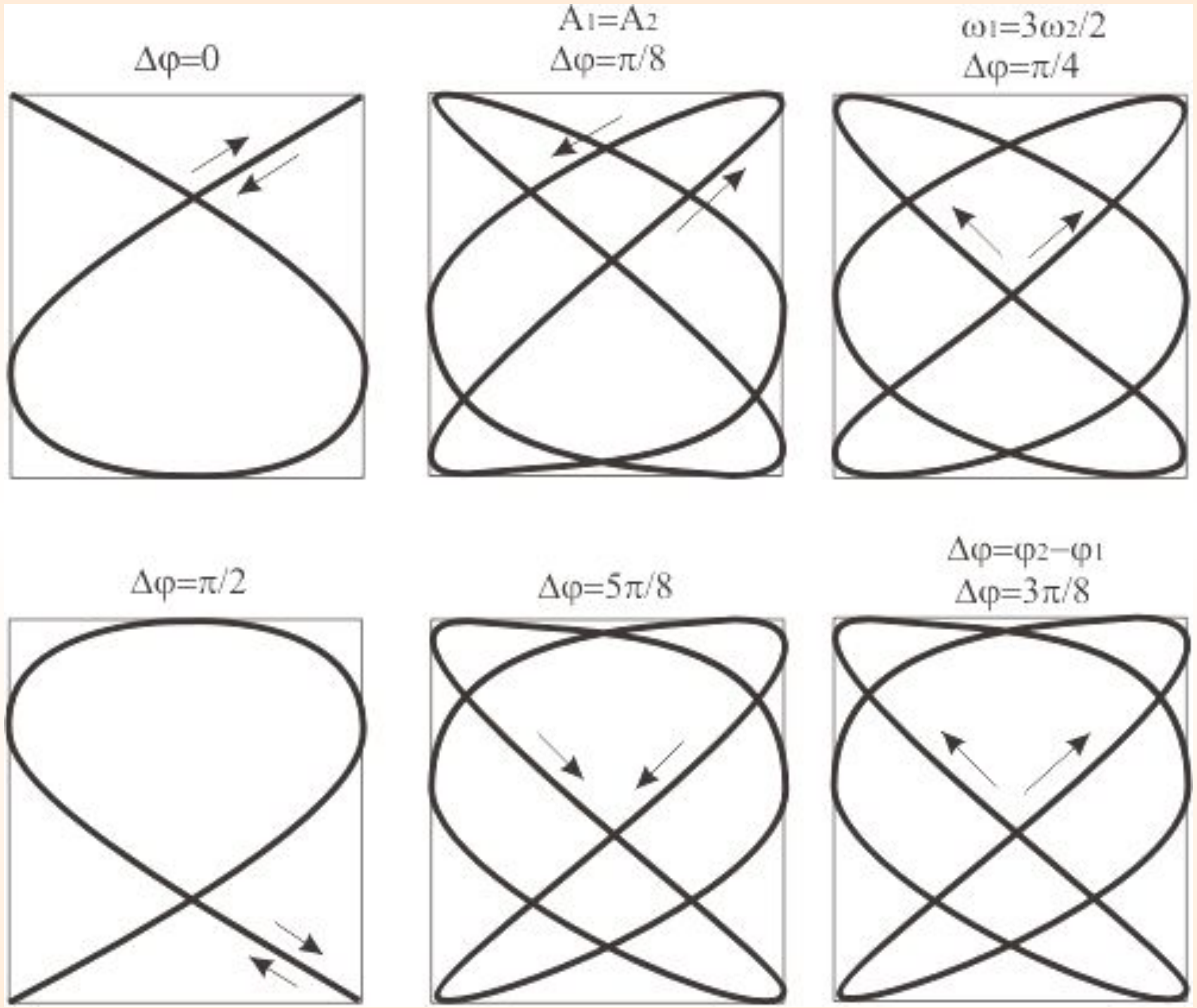
Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются фигурами Лиссажу.

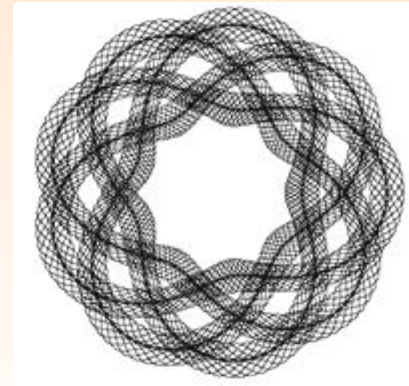
Здесь рассматривались простейшие случаи, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Если $\omega_1 \neq \omega_2$ тогда в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу (рисунок 8)

Фигуры Лиссажу при $\omega_1 \neq \omega_2$





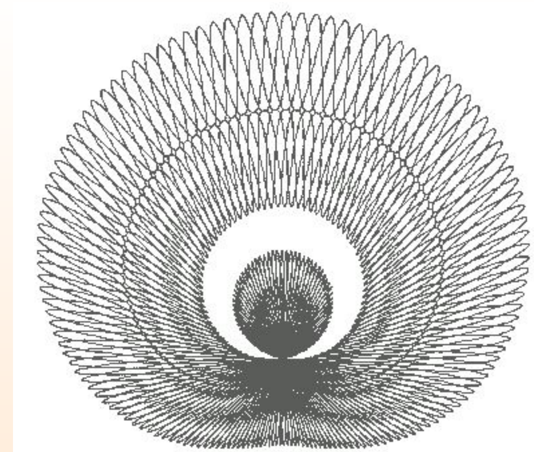


Рисунок 8

Лекция окончена!