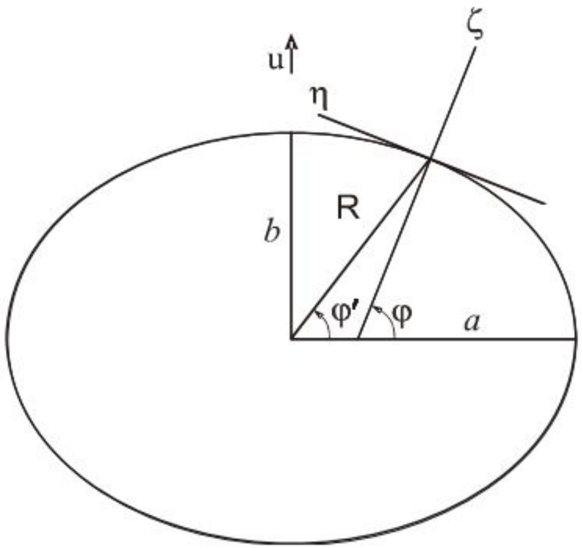
# Инерциальные навигационные системы

Доц. каф. РТС Белокуров Владимир Александрович (л. 416 к.2)

## Список литературы

# Фигура Земли

Наиболее простая модель фигуры (формы) Земли – **сфера** радиусом R=6371,3 км. Объем именно такой сферы наиболее близок к объему реальной Земли. Для такой модели введены геоцентрические координаты: геоцентрическая широта $\varphi'$ - угол между плоскостью экватора и геоцентрической вертикалью места, изменяется в пределах $\pm 90^\circ$, положительные значения соответствуют северной широте, отрицательные - южной ; долгота $\lambda$ - угол между нулевым (гринвичским) меридианом и меридианом места, изменяется в пределах от $0^\circ ... 360^\circ$ или $\pm 180^\circ$, положительные значения соответствуют восточной долготе, отрицательные - западной.




Более точно фигура Земли описывается двухосным эллипсоидом, сплюснутым у полюсов.

a – большая полуось эллипсоида, b – малая полуось. Основные характеристики эллипсоида

$\alpha = \dfrac{a-b}{a}$ - сжатие, $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ - эксцентриситет, $e^2 \approx 2\alpha = 6{,}72e^{-3}$

Радиус кривизны в плоскости, перпендикулярной плоскости меридиана:

$$R_1 \equiv R_E = \frac{a+h}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Радиус кривизны в плоскости меридиана:

$$R_2 \equiv R_N = \frac{R_E(1-e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a(1-e^2)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)^{3/2}}$$

Индексы *E* и *N* означают восточную и северную составляющие соответственно.

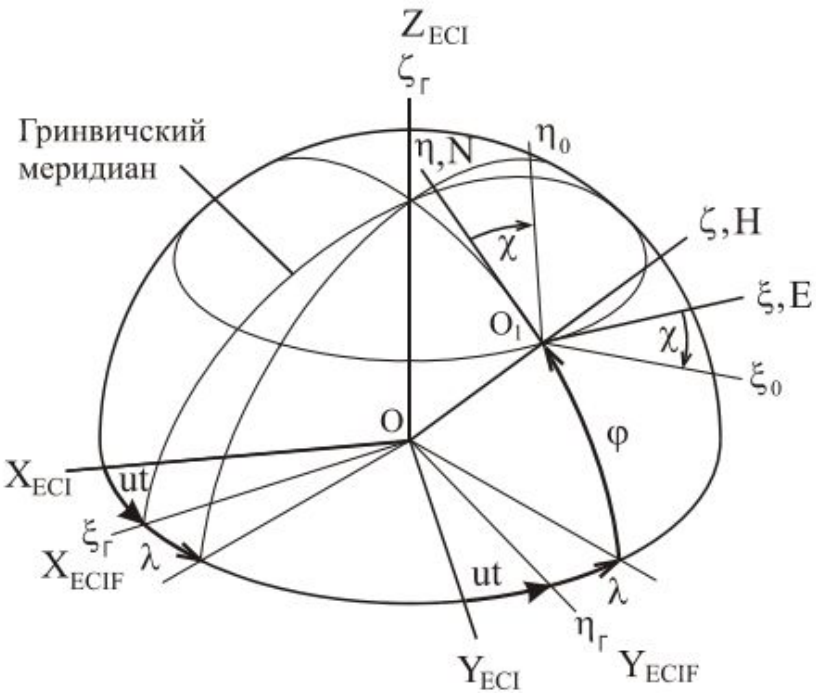
**$\phi$ -** географическая (геодезическая) широта, равная углу между плоскостью экватора и нормалью к поверхности эллипсоида.

Между геоцентрической и географической широтой существует соотношение

$$\varphi - \varphi' = \alpha \sin 2\varphi' \qquad \alpha \approx 11{,}5 \quad \textit{угл.мин.}$$

## Системы координат

Определения координат объектов, их навигация могут проводиться в различных системах координат.




Инерциальная геоцентрическая система координат OXYZ имеет ось OX, направленную по линии равноденствия в точку весеннего равноденствия, ось OZ направлена по оси вращения Земли, ось OY образует с осями OX и OZ правый координатный трехгранник. ECI (Earth-centered inertial).


Относительно этой системы координат вместе с Землей вращается геоцентрическая земная система координат $O\,\xi_Г\eta_Г\zeta_Г$

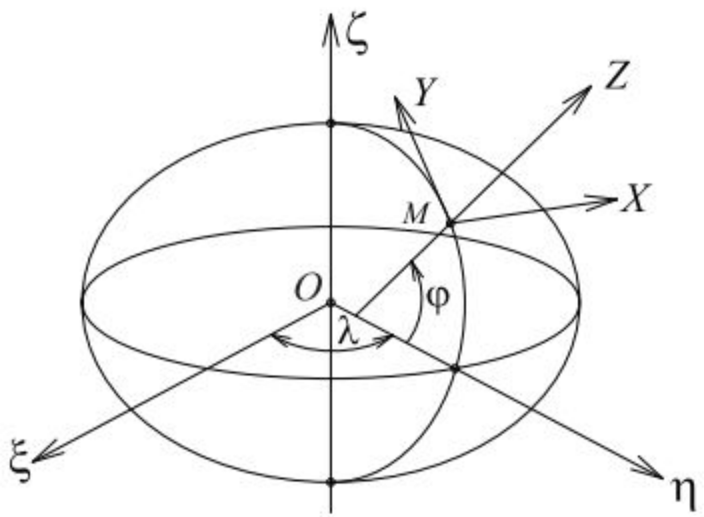
Ее обозначают ECEF (Earth-centered earth-fixed), кратко обозначают e

Угол поворота ее соответствует величине $ut$ , где $u$ - угловая скорость вращения Земли, $t$ – время.

Сопровождающая система координат (сопровождающий трехгранник) имеет начало в точке на поверхности Земли, положение которой задано широтой $\phi$ и долготой $\lambda$ .

$O_1\xi\eta\zeta$ (или $O_1ENH$) - сопровождающей географический трехгранник

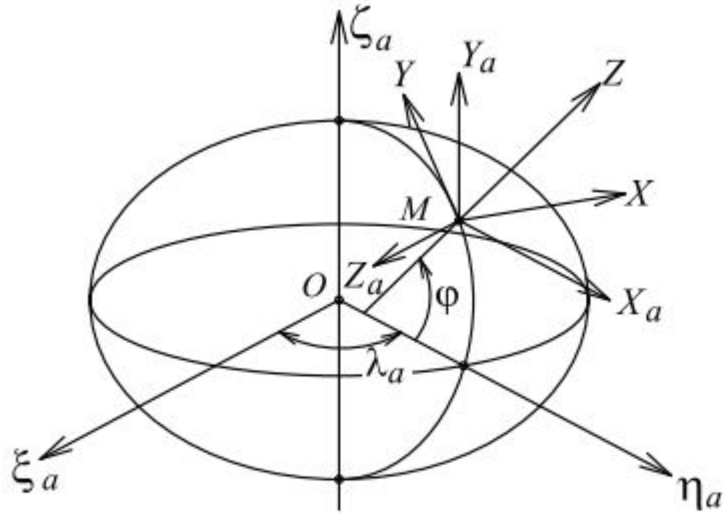
## Географический сопровождающий трехгранник




В системе координат MXYZ ось MZ направим вдоль географической вертикали вверх, ось MY — вдоль касательной к меридиану на север, ось MX — вдоль касательной к параллели на восток

Формулы счисления географических координат:

$$\dot{\lambda} = \frac{V_x}{R_\lambda \cos\varphi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{V_y}{R_\varphi}$$

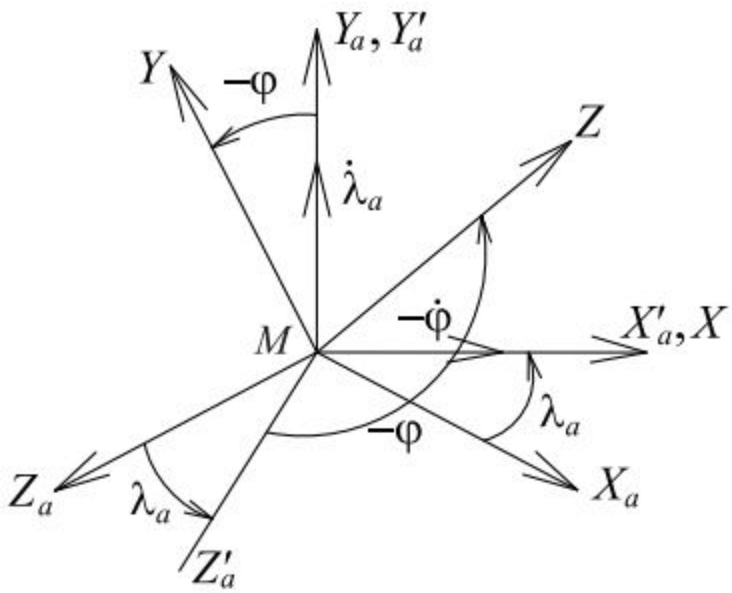



Поскольку географическая сопровождающая система координат связана с центром масс объекта, при его движении система координат OXYZ будет изменять свою ориентацию. Введем в рассмотрение не вращающуюся в абсолютном пространстве систему координат MXaYaZa с вершиной в точке M.

ось MZa параллельна оси $O\xi_a$;

ось MXa параллельна оси $O\eta_a$

ось MYa — параллельна оси $O\zeta_a$




Систему координат MXYZ a можно совместить с географической сопровождающей системой координат MXYZ двумя последовательными поворотами: сначала вокруг оси MYa на угол λa , равный абсолютной долготе точки M, а затем вокруг нового положения оси MXa на угол –ϕ

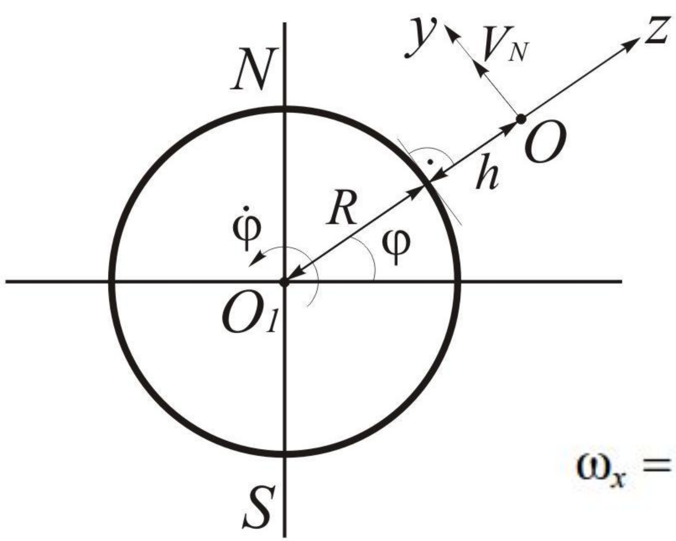
Проекции абсолютной угловой скорости географической системы координат на собственные оси можно представить в виде

$$\omega_x = -\dot{\varphi}; \quad \omega_y = \dot{\lambda}_a \cos\varphi = \left(U + \dot{\lambda}\right)\cos\varphi;$$

$$\omega_z = \dot{\lambda}_a \sin\varphi = \left(U + \dot{\lambda}\right)\sin\varphi.$$

Если бы Земля была сферой, то:

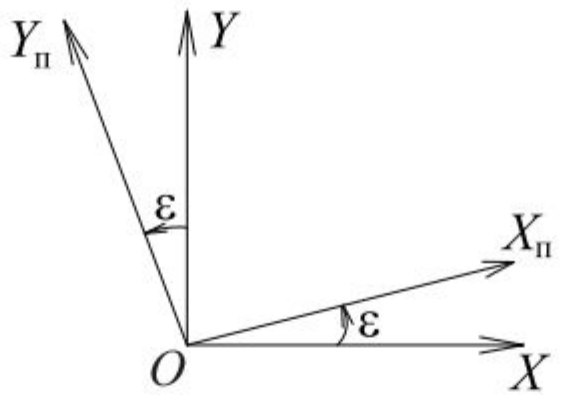
$$V_N = \left(R + h\right)\cdot \dot{\varphi}$$



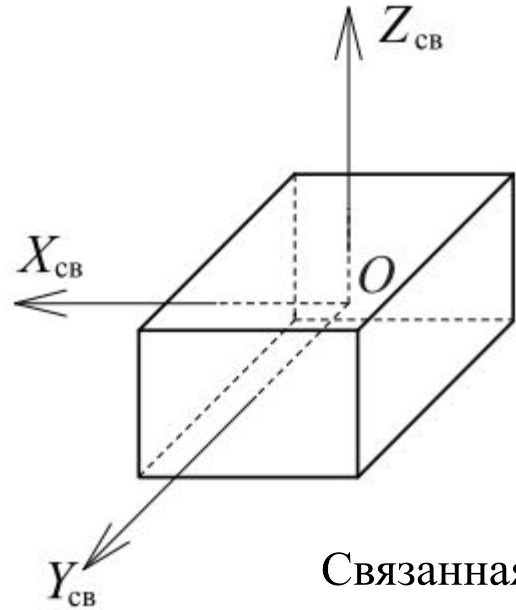

$$\omega_x = -\frac{V_y}{R_\varphi};\quad \omega_y = U\cos\varphi + \frac{V_x}{R_\lambda};\quad \omega_z = U\sin\varphi + \frac{V_x}{R_\lambda}\operatorname{tg}\varphi.$$

При широте близкой к 90° в качестве навигационной системы координат используют полусвободную в азимуте или свободную в азимуте систему координат.

Особенностью полусвободной в азимуте и свободной в азимуте систем координат является то, что выражение для проекции угловой скорости вокруг вертикальной оси OZ либо будет содержать только составляющую суточной скорости вращения Земли sin U ϕ (для полусвободной в азимуте системы координат), либо будет равняться нулю (для свободной в азимуте системы координат).




Взаимная ориентация осей географической и полусвободной в азимуте систем координат




Связанная система координат

Полусвободная в азимуте система координат OXпYпZп:

$$\omega_{x\text{п}} = -\frac{V_y}{R_\varphi}\cos\varepsilon + \left(\frac{V_x}{R_\lambda} + U\cos\varphi\right)\sin\varepsilon;$$

$$\omega_{y\text{п}} = -\frac{V_y}{R_\varphi}\sin\varepsilon + \left(\frac{V_x}{R_\lambda} + U\cos\varphi\right)\cos\varepsilon; \quad \omega_{z\text{п}} = U\sin\varphi.$$

Свободная в азимуте система координат OXmYmZm.

$$\omega_{xm} = -\frac{V_y}{R_\varphi}\cos\varepsilon + \left(\frac{V_x}{R_\lambda} + U\cos\varphi\right)\sin\varepsilon;$$

$$\omega_{ym} = -\frac{V_y}{R_\varphi}\sin\varepsilon + \left(\frac{V_x}{R_\lambda} + U\cos\varphi\right)\cos\varepsilon; \quad \omega_{zm} = 0,$$

$\varepsilon$ — азимутальный угол

Связанная система координат OXсвYсвZсв. Предполагается связанной с осями чувствительности гироскопов и акселерометров, при этом блок чувствительных элементов располагается на транспортном средстве таким образом, что ось OYсв совпадает с продольной осью объекта, а ось OXсв — с поперечной.

# КЛАССИФИКАЦИЯ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Инерциальные навигационные системы принято подразделять следующим образом:
- системы разомкнутого типа (с малым периодом работы);
- системы замкнутого типа (шулеровские системы).

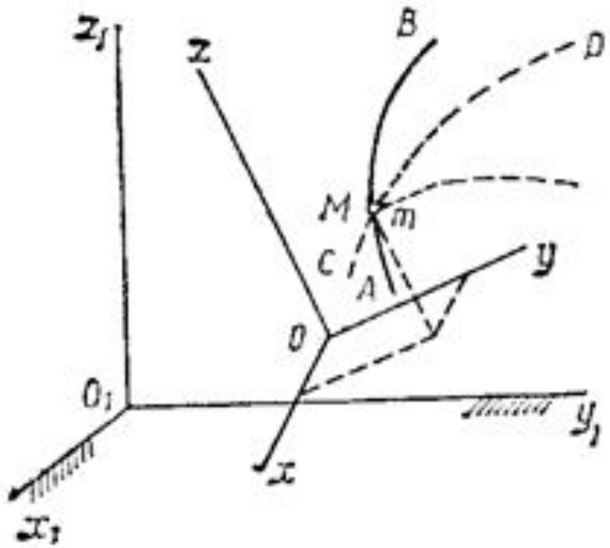
Системы обоих типов бывают:
- платформенными;
- бесплатформенными.

Платформенные ИНС, в свою очередь, подразделяются на системы следующих видов:
- полуаналитические (оси чувствительности акселерометров и гироскопов ориентированы по осям какой-либо горизонтальной сопровождающей системы координат);
- аналитические (оси чувствительности акселерометров и гироскопов ориентированы по осям геоцентрической инерциальной системы координат);
- геометрические (оси чувствительности акселерометров ориентированы по осям какой-либо горизонтальной сопровождающей системы координат, а оси чувствительности гироскопов — по осям геоцентрической инерциальной системы координат).

Любая ИНС в основном служит устройством счисления пути, пройденного объектом от точки своего отправления до точки назначения. Измеряя с помощью акселерометров ускорения, с которыми движется объект, и интегрируя измеренные величины, можно определить скорость движения объекта относительно Земли (путевую скорость). Интегрируя полученные значения скоростей второй раз, можно найти пройденный объектом путь относительно Земли, а следовательно, и его координаты.

## Сложное движение точки.
## Относительное, переносное и абсолютное движения.

Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют ***составным*** или ***сложным***.




Рассмотрим точку *M*, движущуюся по отношению к подвижно системе отсчета *Oxyz*, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета *O*1*x*1*y*1*z*1, которую называем основной или условно неподвижной. Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным.

1) Движение, совершаемое точкой *M* по отношению к подвижной системе отсчета (к осям *Oxyz*), называется ***относительным движением*** (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними). Траектория *AB*, описываемая точкой в относительном движении, называется относи тельной траекторией.

Скорость точки *M* по отношению к осям *Oxyz* называется относительной скоростью $\vec{v}_r$

Ускорение точки *M* по отношению к осям *Oxyz* называется относительным ускорением $\vec{a}_r$

Можно движение осей *Oxyz* во внимание не принимать (рассматривать их как неподвижные).

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета *Oxyz* (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе *O*1*x*1*y*1*z*1, является для точки *M* ***переносным движением.***

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями *Oxyz* точки *m*, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка *M*, называется переносной скоростью точки *M* в этот момент.

$$\vec{v}_{\text{ïåð}} = \vec{v}_{\text{m}}$$

$$\vec{a}_{\text{ïåð}} = \vec{a}_{\text{m}}$$

Если представить себе, что относительное движение точки происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси *Oxyz*, то переносной скоростью (или ускорением) точки *M* в данный момент времени будет скорость (или ускорение) той точки т тела, с которой в этот момент совпадает точка *M*.

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O1x1y1z1$, называется ***абсолютным*** или сложным. Траектория $CD$ этого движения называется абсолютной траекторией, скорость - абсолютной скоростью

$$\vec{v}_{\text{àáñ}} \qquad \vec{a}_{\text{àáñ}}$$

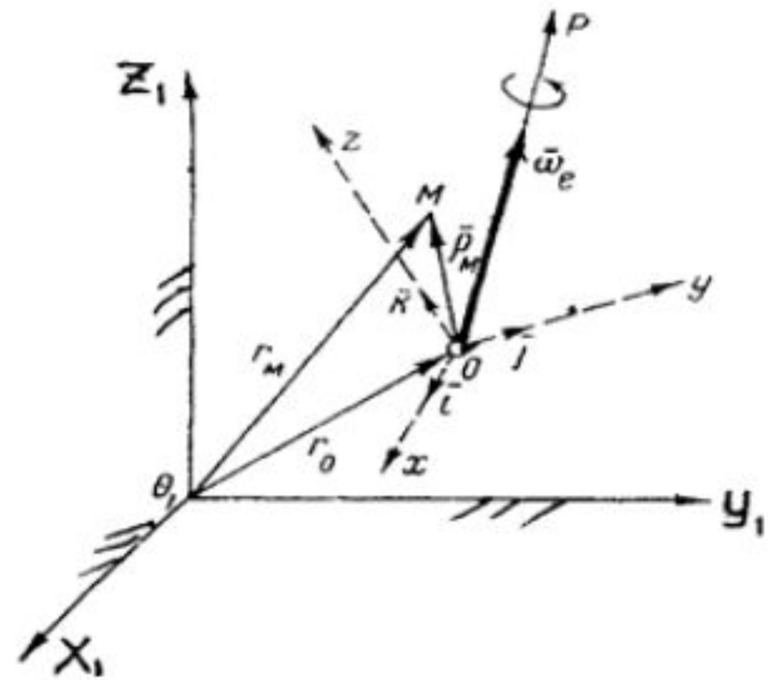
При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того, чтобы неподвижный наблюдатель увидел относительное движение точки, надо остановить переносное движение.

Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае, при определении переносного движения точки, обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того в какой момент будет остановлено относительное движение, от того, где точка находится на среде в этот момент. Так как, вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять ***переносное движение точки как абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.***

**Теорема сложения скоростей**

Пусть некоторая точка $M$ совершает движение по отношению к системе отсчета $Oxyz$, которая сама движется произвольным образом по отношению к неподвижной системе отсчета $O1x1y1z1$.




Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще. Так как, по определению, переносное движение точки $M$ – это движение относительно неподвижных осей той точки системы $O1x1y1z1$, с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки подвижной системы движутся по-разному.

Положение подвижной системы отсчета может быть также определено, если задать положение точки *O* радиусом-вектором $\vec{r}_0$

и направления единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Произвольное переносное движение подвижной системы отсчета слагается из поступательного движения со скоростью $v_0$

точки *O* и движения вокруг мгновенной оси вращения ОР с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$.

Положение точки *M* по отношению к подвижной системе отсчета можно определить радиусом-вектором:

$$\vec{\rho}_M = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где координаты *x, y, z* точки *M* изменяются с течением времени вследствие движения точки *M* относительно подвижной системы отсчета.

Положение точки М относительно неподвижной системы отсчета $O1x1y1z1$, может быть определено радиусом-вектором:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_M = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Скорость составного движения точки *M*, или абсолютная скорость этой точки, равна:

$$\vec{v}_a = d\vec{r}_M/dt$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Разобьем слагаемые в правой части этого равенства на две группы:

- Зависимые только от относительных координат x,y,z;
- Зависимые от величин, изменяющихся только вследствие переносного движения подвижной системы отсчета.

$$\vec{v}_r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

$$\vec{v}_e = \vec{r}_0 x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e. + \vec{v}_r.$$

Это равенство выражает теорему сложения скоростей в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютная скорость точки *M* равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки.

## Теорема сложения ускорений. Ускорение Кориолиса.

Ускорение составного движения точки *M*, или абсолютное ускорение этой точки, равно, очевидно, производной от абсолютной скорости точки *M* по времени:

$$\vec{a}_a = d\vec{v}_a/dt$$

$$\vec{a}_a = \ddot{\vec{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{\imath}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{\jmath}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \ddot{x}\bar{\imath} + \ddot{y}\bar{\imath} + \ddot{z}\bar{\imath} + 2(\dot{x}\frac{d\bar{\imath}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{\jmath}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}).$$

К первой группе отнесем слагаемые, содержащие только производные от относительных координат *x,y* и *z*

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Ко второй группе отнесем слагаемые, которые содержат только производные от векторов:

$$\vec{a}_e = \ddot{\vec{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{\imath}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{\jmath}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}.$$

Третья группа:

$$\vec{a}_k = 2(\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}).$$

$\vec{a}_r,$ Подвижная система отсчета *Oxyz* как бы покоилась, а точка *M* двигалась

$\vec{a}_e,$ точка *M* покоится по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz* (*x* =const, *y* =const, *z* =const) и перемещается вместе с этой системой отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета *O*1*x*1*y*1*z*1.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}.$$

$$\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times x\vec{i} + \bar{\omega}_e \times x\vec{j} + \bar{\omega}_e \times x\vec{k})$$

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}).$$

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

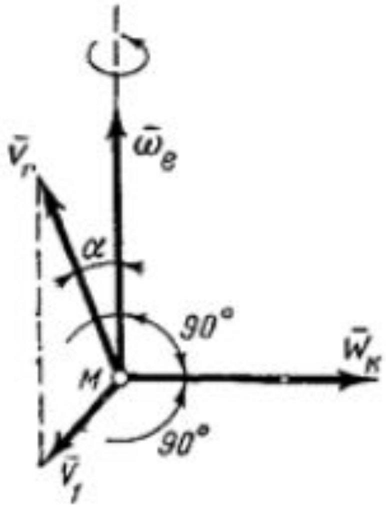
***Ускорение Кориолиса.*** Ввиду того, что ускорение Кориолиса появляется в случае вращения подвижной системы отсчета, его называют еще поворотным ускорением.

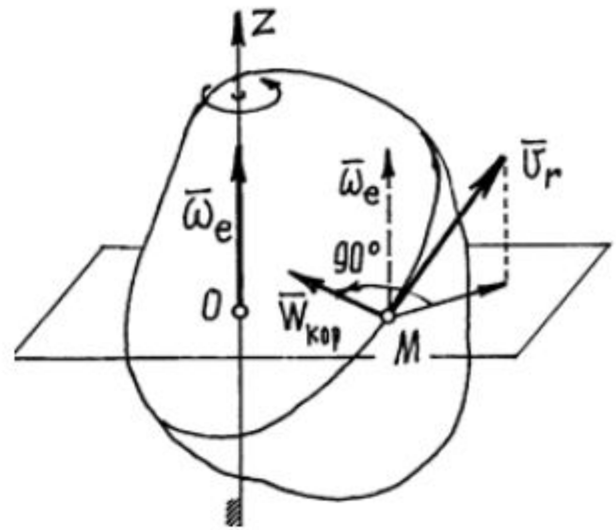
С физической точки зрения появление поворотного ускорения точки объясняется взаимным влиянием переносного и относительного движений.

Итак, ускорение Кориолиса точки равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Из формулы следует, что модуль поворотного ускорения будет

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\alpha$$




Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси *z*. По поверхности его движется точка *M*

Ускорение Кориолиса направлено перпендикулярно этим двум векторам, по правилу направления вектора векторного произведения.