



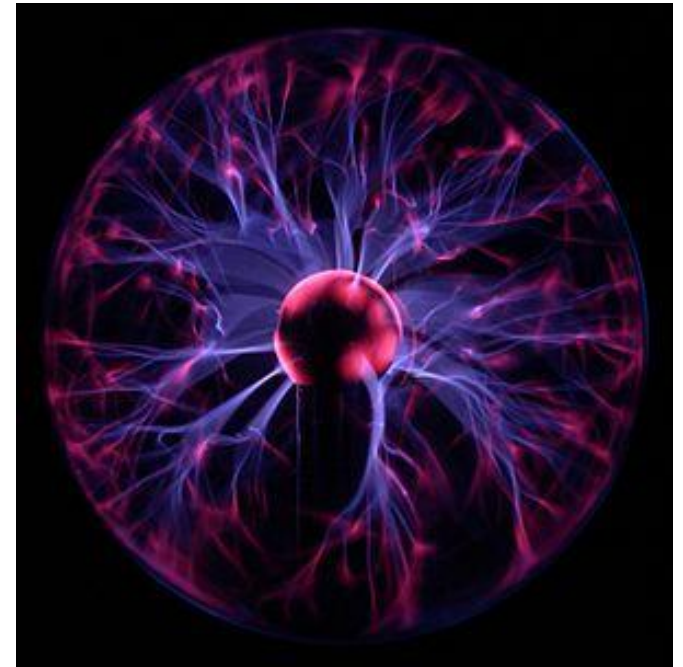
# Дипломная работа

---

тема: «Изучение микроструктуры процессов релаксации в плазме»

Выполнила студентка 6 курса  
Переславцева МГ

- 
- Исследование процессов релаксации в плазме является одной из наиболее актуальных задач современной физики.



# Я рассмотрела одну из моделей, описываемую уравнением

$$LU(t, \bar{r}) = f(\bar{r}, t), \quad \bar{r} = \{x, y, z\} \in R^3, \quad t > 0 \quad (1)$$

где

:

$$L \equiv \left( a_3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_0 \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + b_3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - b_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_0 \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$a_k, b_k \geq 0; \quad a_3 + b_3 > 0$$

$$\bar{\nabla}U(\bar{r},t) = \rho(\bar{r},t) \cdot \bar{v}(\bar{r},t) \quad (3)$$

---

где

$\bar{v}(\bar{r},t)$  - поле скоростей электронов,

$\rho(\bar{r},t)$  - так называемая суммарная плотность заряженных частиц:

$$\rho(\bar{r},t) = \rho_+(\bar{r},t) - \rho_-(\bar{r},t),$$

где

$\rho_+(\bar{r},t)$  - локальная концентрация положительно заряженных частиц (с учетом кратности заряда),

$\rho_-(\bar{r},t)$  - локальная концентрация электронов в точке  $\bar{r} = \{x, y, z\}$  в момент времени  $t$ .

$a=\{0,0,0,1\}$  и  $b=\{0,0,1,0\}$  уравнения (1)  
с оператором:

---

$$L \equiv \frac{\partial^4}{\partial t \partial x^3} - \frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

# Задача Коши, для которой построено Засориным Ю.В. ФРК:

---

$$\left\{ \begin{array}{l} LE(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad t > 0; \\ \frac{\partial^3 E}{\partial x^3} \Big|_{t=+0} = \delta(\vec{r}), \quad \vec{r} \in R^3; \\ E(t, \vec{r}) = o(1), \quad \vec{r} \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (5)$$

$\delta(r)$  – трехмерная дельта-функция Дирака, для которой выполняется:

$$\int_{R^3} f(\vec{r}) \delta(\vec{r}) d\vec{r} = f(\vec{0}), \quad \forall f \in C(R^3),$$

# Фундаментальное решение:

---

$$E(t, \vec{r}) = \frac{c}{r^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}} \exp(\omega_1) Ai(\omega_2),$$

$$\omega_1 = \frac{4}{27} \frac{(8t^3 + 9r^2 x)t^2}{r^4}, \quad (6)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{9} \frac{(3r^2 x + 4t^3) 3^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{2}{3}}}{r^2 \left(\frac{r^2}{t}\right)^{\frac{1}{3}}},$$

$$r^2 = y^2 + z^2,$$

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

---

где  $Ai(\cdot)$  – Функция Эйри первого рода

$$Ai(\omega) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \cos(3^{-1} \xi^3 + \xi \omega) d\xi$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \text{ - Функция Хевисайда}$$



# Расчет параметров W1 и W2

*restart;*

*a0 := [0, 0, 0, 1];*

[0, 0, 0, 1]

*b0 := [0, 0, 1, 0];*

[0, 0, 1, 0]

*a := table([0 = a0[1], 1 = a0[2], 2 = a0[3], 3 = a0[4]]);*

*table([0 = 0, 1 = 0, 2 = 0, 3 = 1])*

*b := table([0 = b0[1], 1 = b0[2], 2 = b0[3], 3 = b0[4]]);*

*table([0 = 0, 1 = 0, 2 = 1, 3 = 0])*

*u0 := seq( $\left(\frac{a[k] \cdot r^2 + 4 \cdot b[k] \cdot t^2}{4 \cdot t}\right), k=0..3);$*

$0, 0, t, \frac{1}{4} \frac{r^2}{t}$

*u := table([0 = u0[1], 1 = u0[2], 2 = u0[3], 3 = u0[4]]):*

*w1 := simplify( $\left(\frac{1}{27} \cdot \frac{(2 \cdot (u[2])^3 - 9 \cdot u[1] \cdot u[2] \cdot u[3] + 9 \cdot u[2] \cdot u[3] \cdot x)}{(u[3])^2} - u[0]\right);$*

$\frac{1}{27} \frac{36 r^2 t^2 x + 32 t^5}{r^4}$

*w2 := simplify( $\left(\frac{\left(x - u[1] + \frac{1}{3} \cdot \frac{(u[2])^2}{u[3]}\right)}{(3 \cdot u[3])^{\frac{1}{3}}}\right);$*

$\frac{1}{9} \frac{(3 r^2 x + 4 t^3) 3^{2/3} 2^{2/3}}{r^2 \left(\frac{r^2}{t}\right)^{1/3}}$

## Цель работы:

---

- Построение поверхностей уровня

$$\Gamma_c = \{\bar{r} \in R^3 : E(\bar{r}, t) = C\} \quad (7)$$

В различные моменты времени  $t > 0$  при различных значениях  $C$

В рамках данной работы рассмотрены четыре момента времени ( $t=0.1, t=0.3, t=1, t=2$ ), для каждого из них был подобран масштаб, построены линии уровня.

# Построение поверхностей уровня для $E=0$

---

$$E_0(x, r, t) \equiv \frac{C}{r^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}} \exp(\omega_1) Ai(\omega_2) , \text{ отсюда следует}$$

$$x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{3}} (r)^{\frac{2}{3}} z_n - \frac{4t^3}{3r^2}$$

$$z_n = -\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)\pi\left(n + \frac{3}{4}\right) \right\}^{\frac{2}{3}} \quad \text{-нули функции Эйри}$$

# Фрагмент программы для t=0.1

---

**for i from 1 by 1 to 10 do**

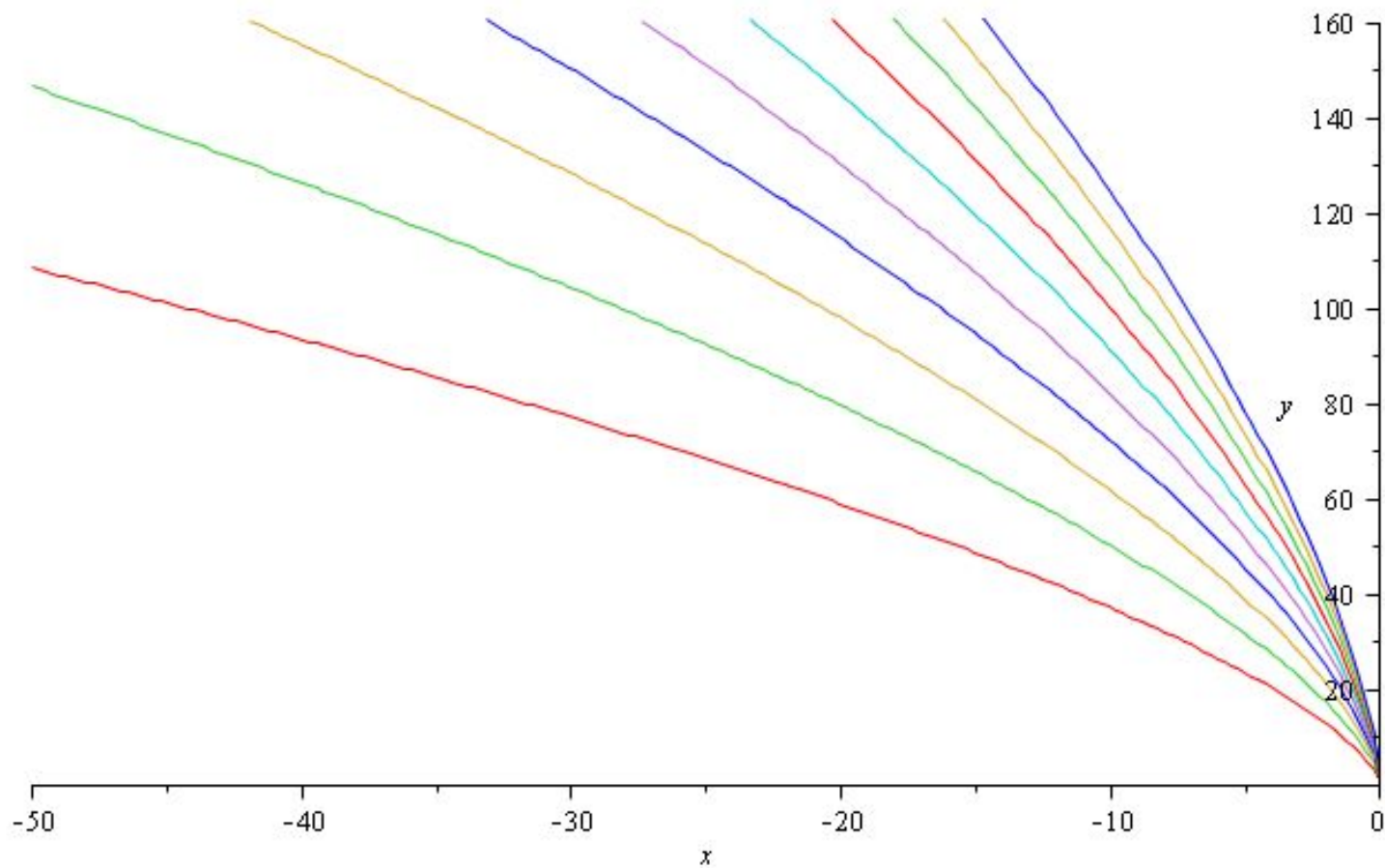
$$a[i] := \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 0.1^{-\frac{1}{3}} \cdot (-x)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \text{Pi} \cdot \left(i + \frac{3}{4}\right)\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{4 \cdot 0.1^3}{3 \cdot x^2}$$

**end do;**

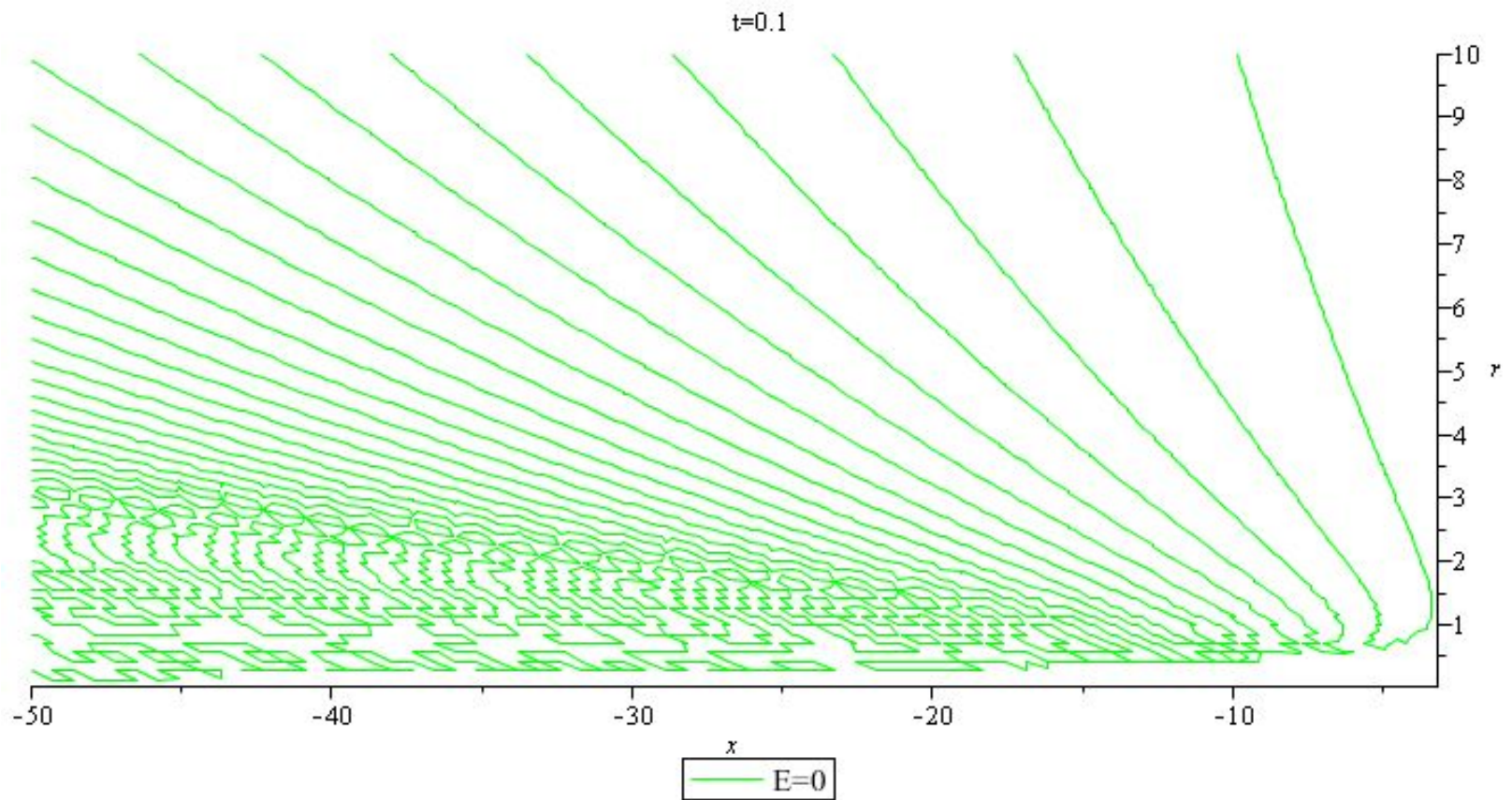
*plot*( [ a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>, a<sub>4</sub>, a<sub>5</sub>, a<sub>6</sub>, a<sub>7</sub>, a<sub>8</sub>, a<sub>9</sub>, a<sub>10</sub> ], x = 0 .. -50, y = 0 .. 160 );

# Результатом стало:

---



# Построение с помощью Maple



# Пример построения графика

```
> #пример построения графика
```

```
> t := 0.1 :
```

```
= #вводим параметры для нашего предельного случая:
```

```
> w1 :=  $\frac{1}{27} \frac{36 r^2 t^2 x + 32 t^5}{r^4}$ ;
```

$$w1 := \frac{1}{27} \frac{0.36 r^2 x + 0.00032}{r^4}$$

```
=  
> w2 :=  $\frac{1}{9} \frac{(3 r^2 x + 4 t^3) 3^{2/3} 2^{2/3}}{r^2 \left(\frac{r^2}{t}\right)^{1/3}}$ ;
```

$$w2 := \frac{0.05157320927 (3 r^2 x + 0.004) 3^{2/3} 2^{2/3}}{r^2 (r^2)^{1/3}}$$

```
=  
> AA := AiryAi(w2) :
```

```
> AA1 := evalf(AA) :
```

```
=  
>
```

```
> Mn :=  $-\frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\text{Pi}} \cdot t^{-\frac{4}{3}}$  ;
```

```
=  
> Zn := evalf(Mn) :
```

```
> Zn1 := exp(w1) :
```

```
> with(plots) :
```

---

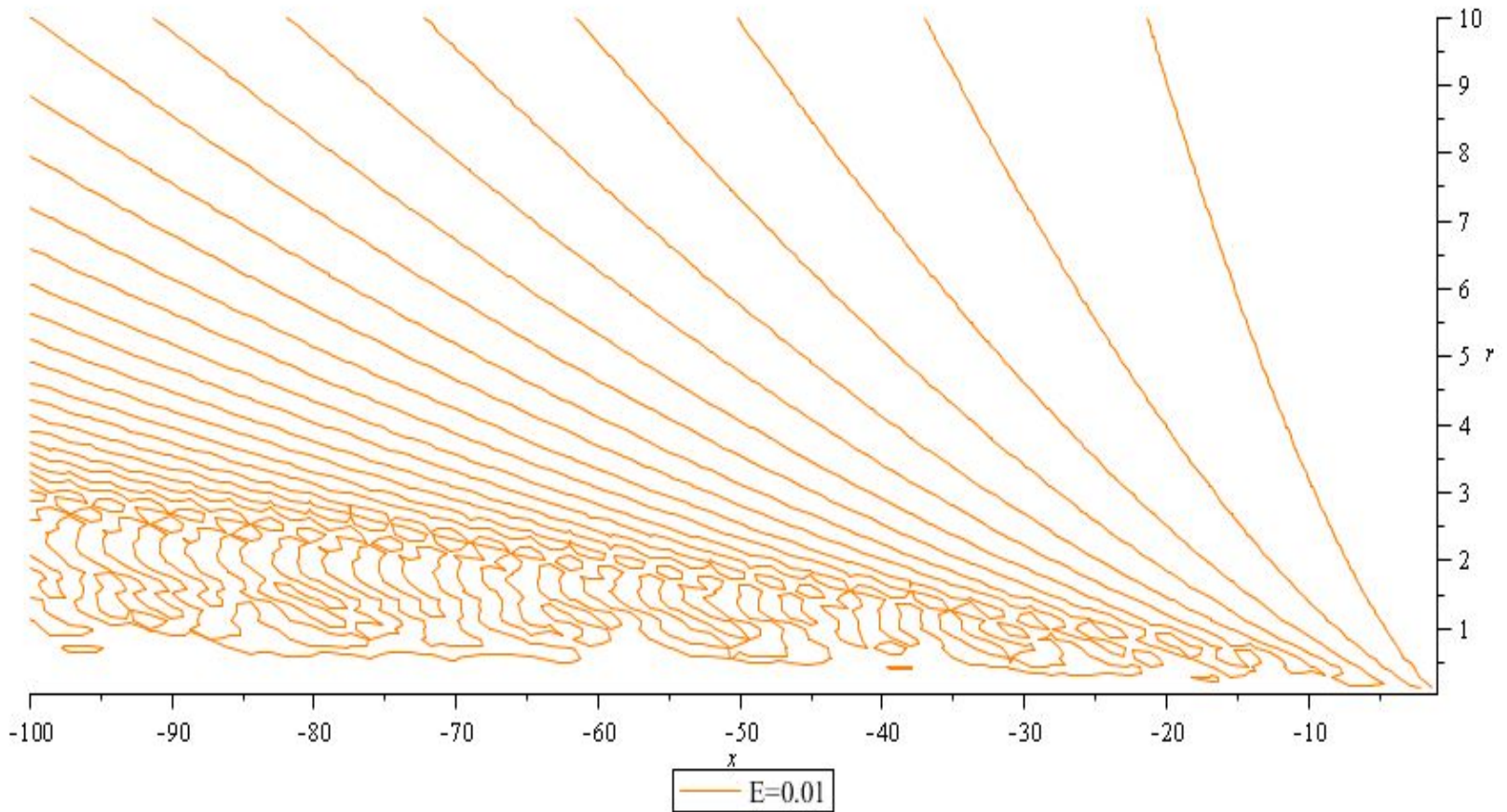
```
> ddd := Zn·Zn1·AA1:
```

```
"  
>  
"  
>  
"  
>  
"  
>
```

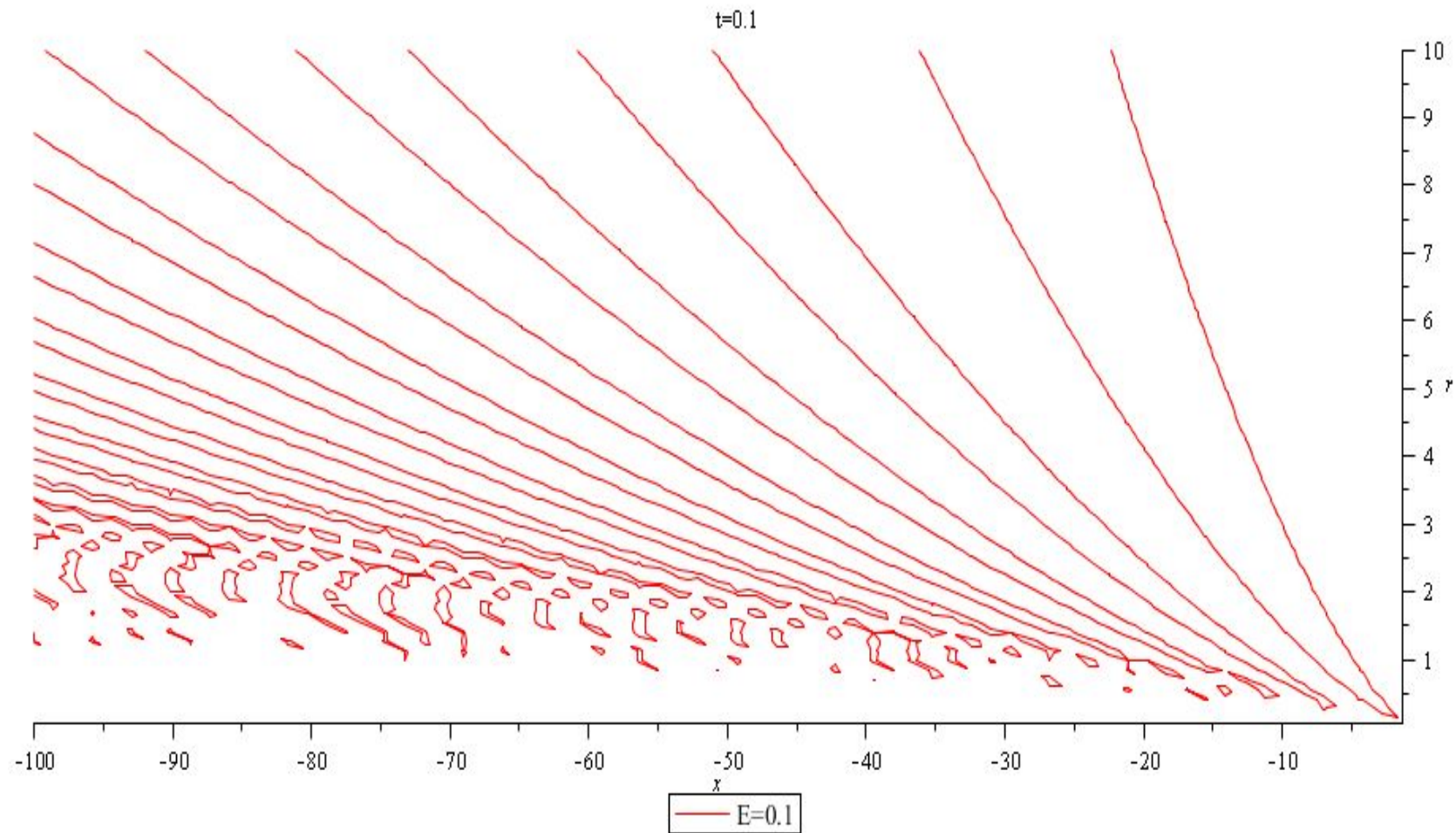
```
implicitplot(ddd = 0.1, x = -100 .. 0, r = 0 .. 10, scaling = UNCONSTRAINED, color = red, numpoints = 5000, title = "t=0.1", legend = "E=0.1");  
implicitplot(ddd = 0.2, x = -100 .. 0, r = 0 .. 10, scaling = UNCONSTRAINED, color = green, numpoints = 5000, legend = "E=0.2");  
implicitplot(ddd = 0.3, x = -100 .. 0, r = 0 .. 10, scaling = UNCONSTRAINED, color = blue, numpoints = 5000, legend = "E=0.3");  
implicitplot(ddd = 0.15, x = -100 .. 0, r = 0 .. 10, scaling = UNCONSTRAINED, color = aquamarine, numpoints = 5000, legend = "E=0.15");  
implicitplot(ddd = 0.01, x = -100 .. 0, r = 0 .. 10, scaling = UNCONSTRAINED, color = coral, numpoints = 5000, legend = "E=0.01");  
implicitplot(ddd = 0, x = -100 .. 0, r = 0 .. 10, scaling = UNCONSTRAINED, color = plum, numpoints = 5000, legend = "E=0");  
implicitplot(ddd = 1, x = -100 .. 0, r = 0 .. 10, scaling = UNCONSTRAINED, color = orange, numpoints = 5000, legend = "E=1");  
;
```



$t=0.1, E=0.01$

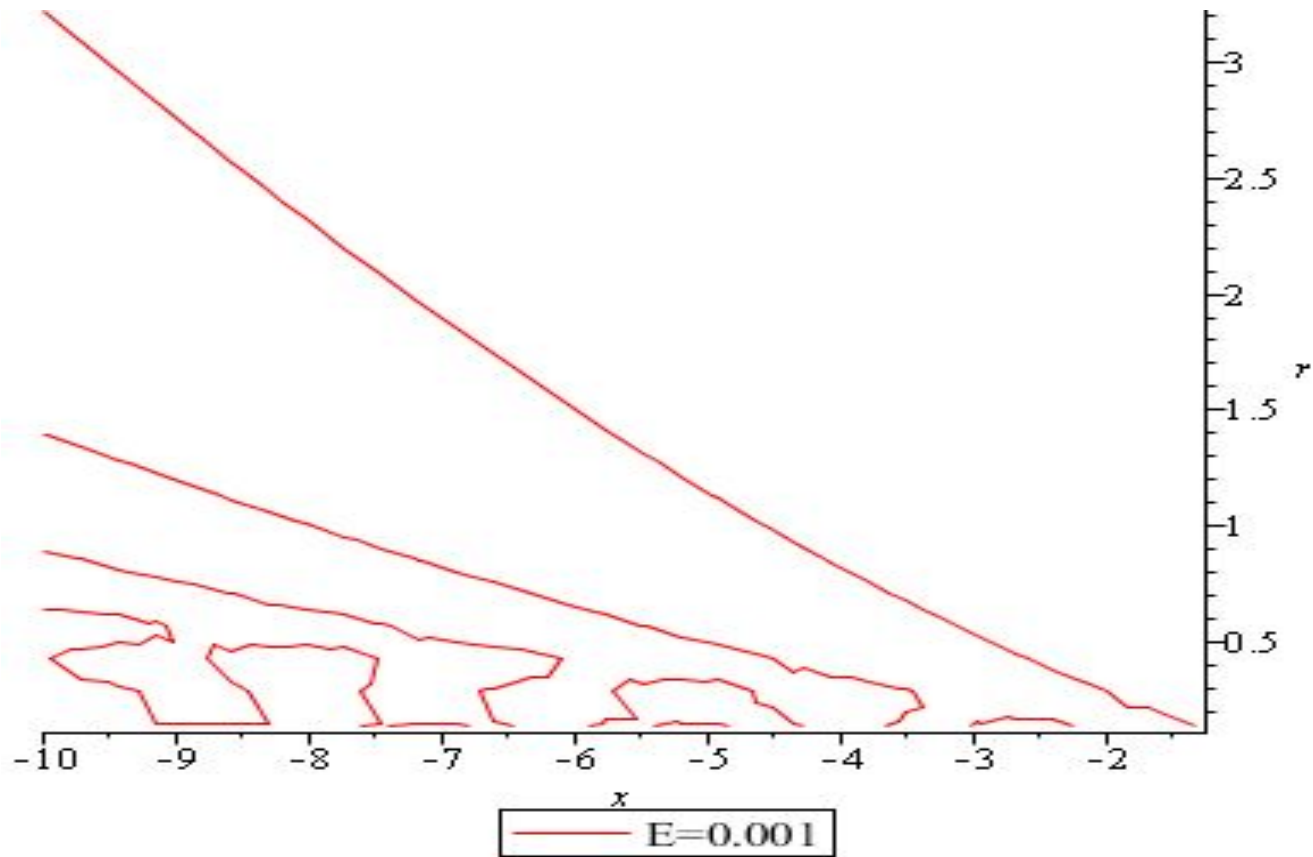


$t=0.1, E=0.1$



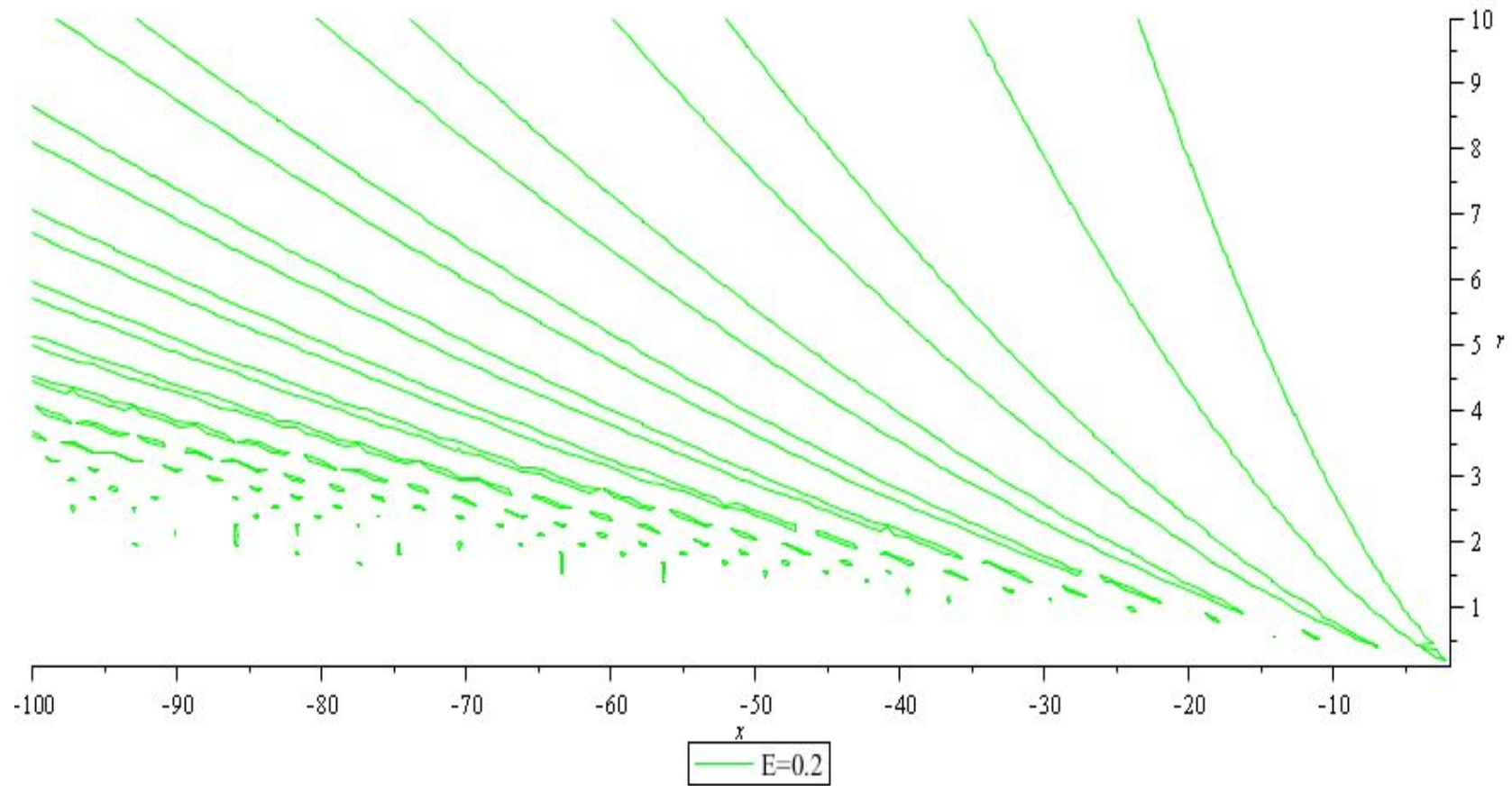
$t=0.1, E=0.001$

---

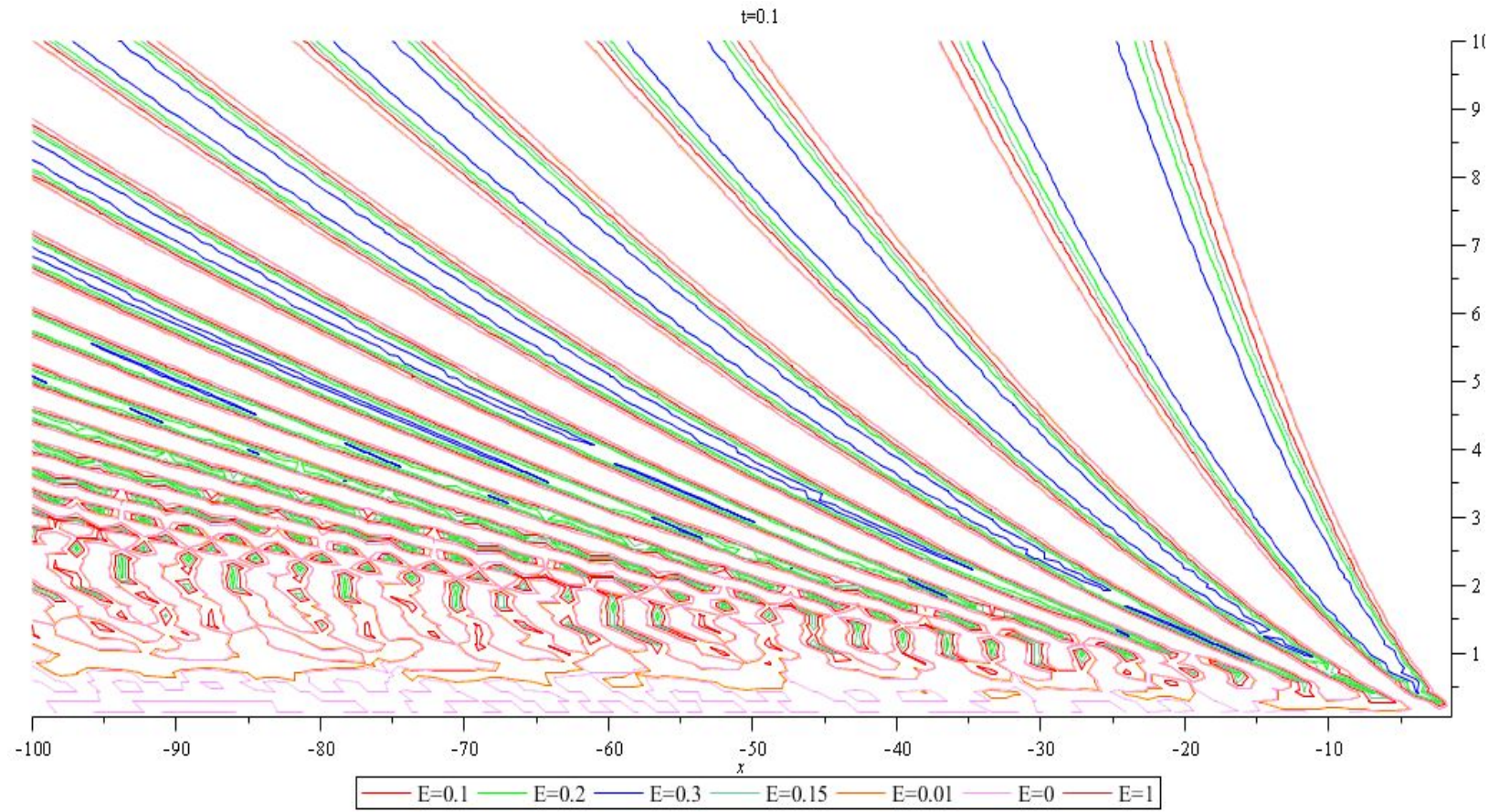


$t=0.1, E=0.2$

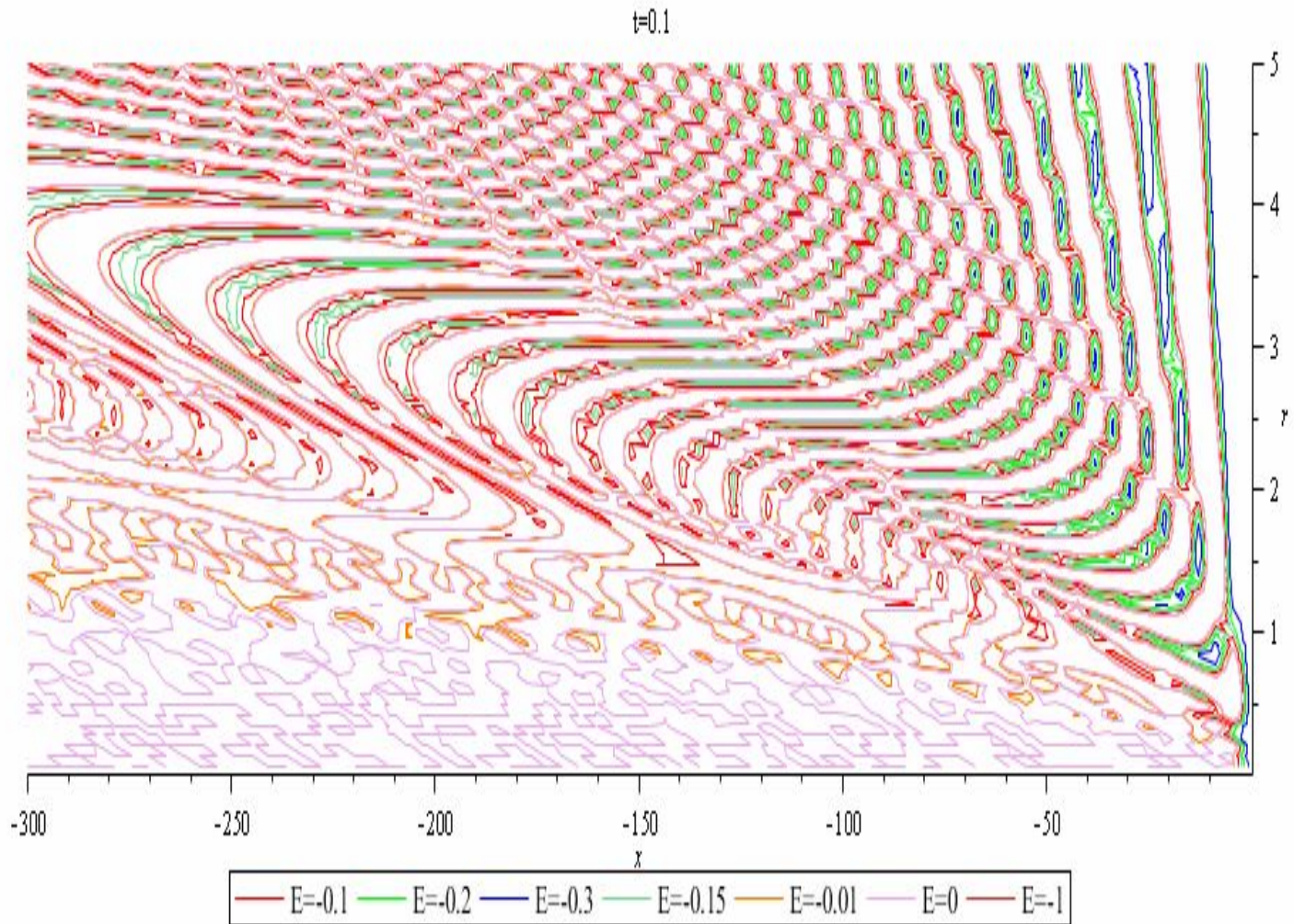
---



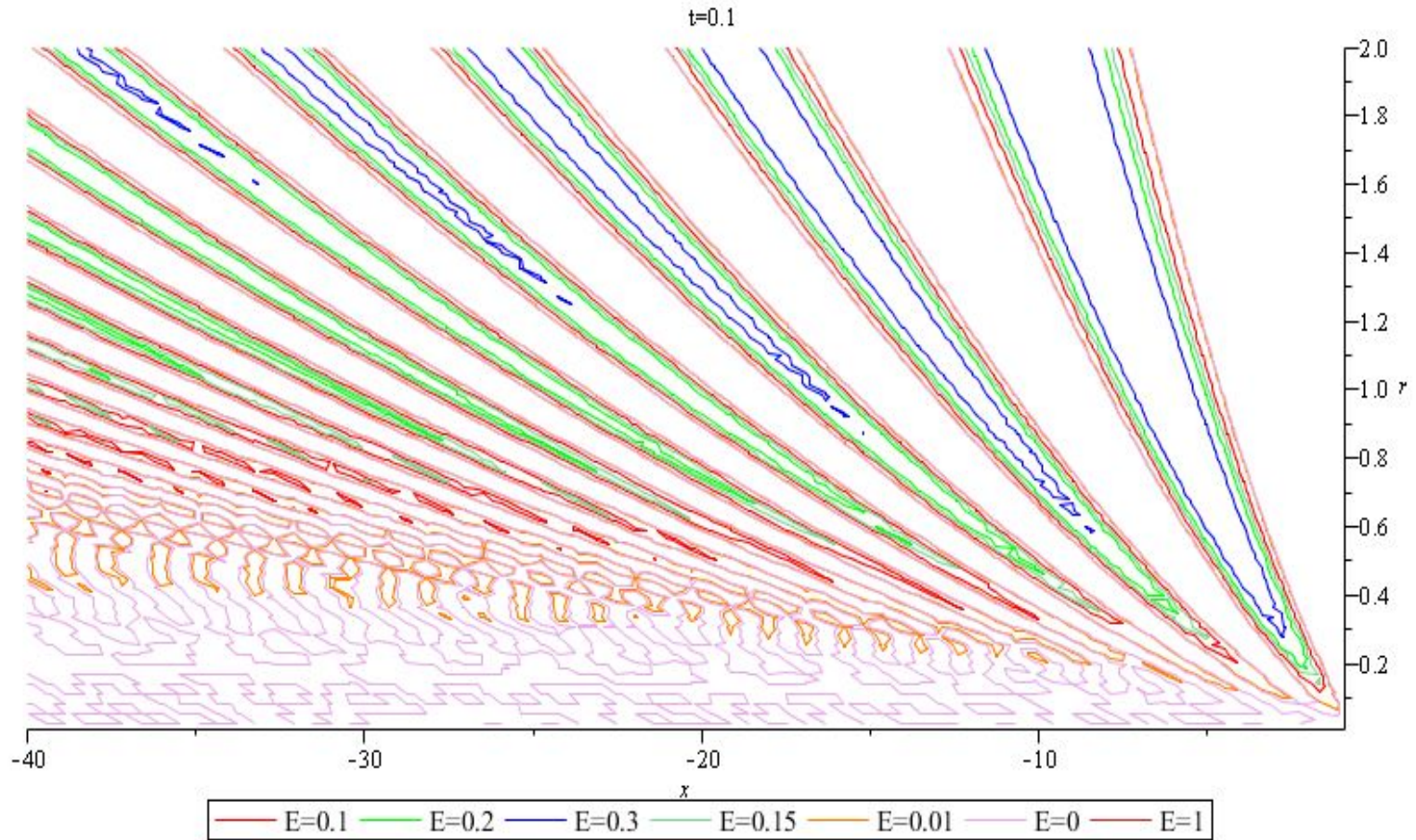
# t=0.1



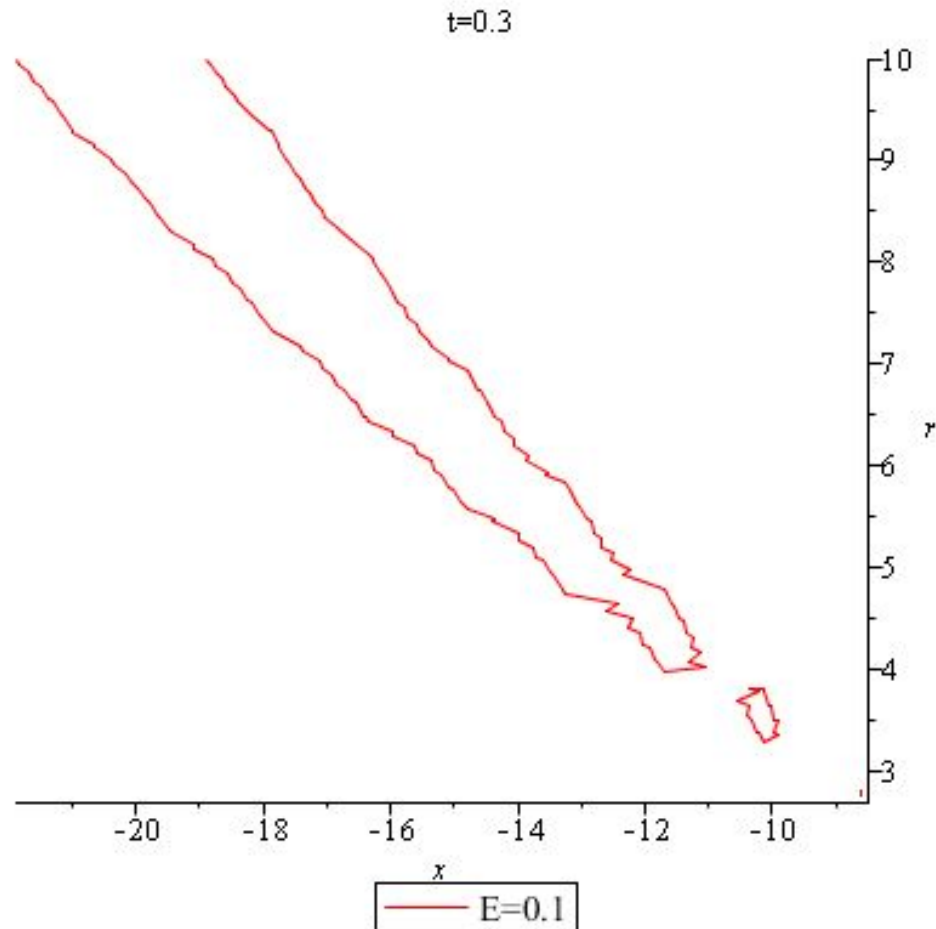
$t=0.1$



# $t=0.1$ в увеличенном масштабе



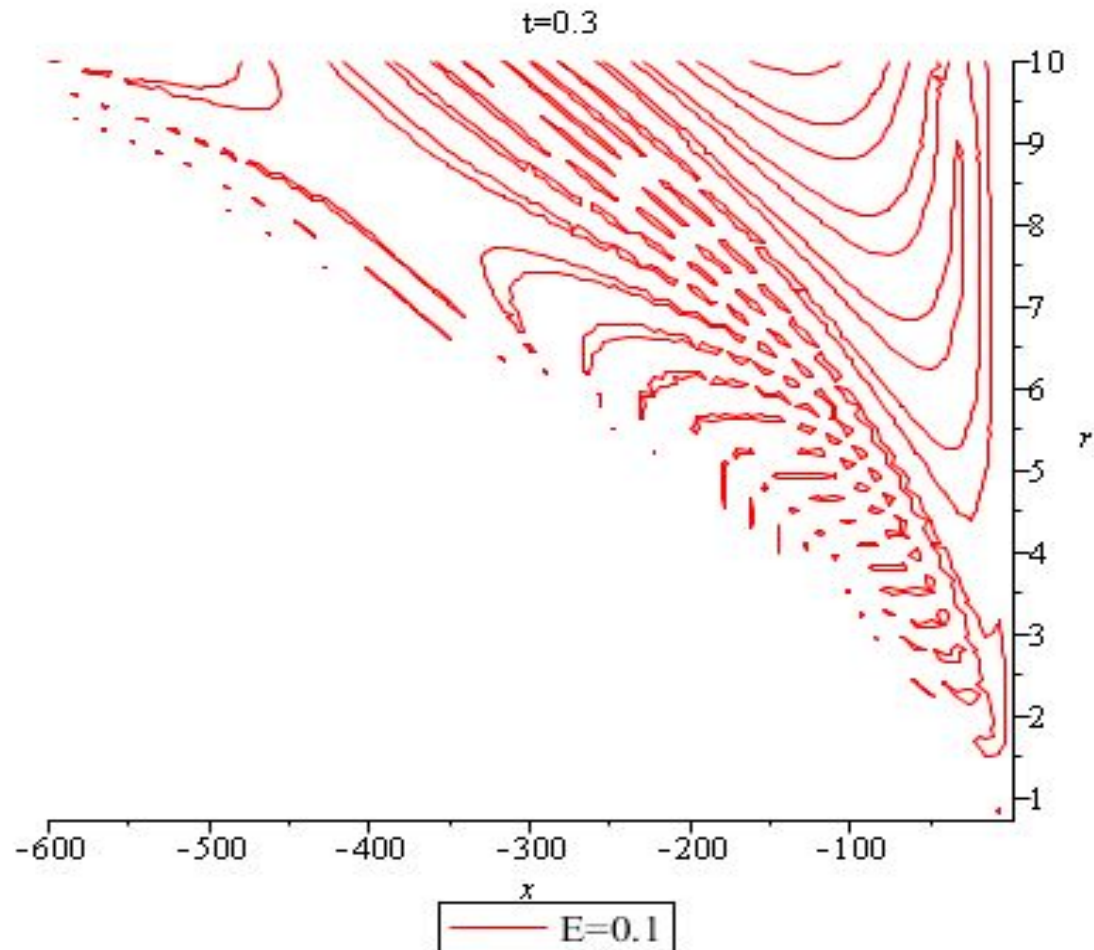
$t=0.3, E=0.1$



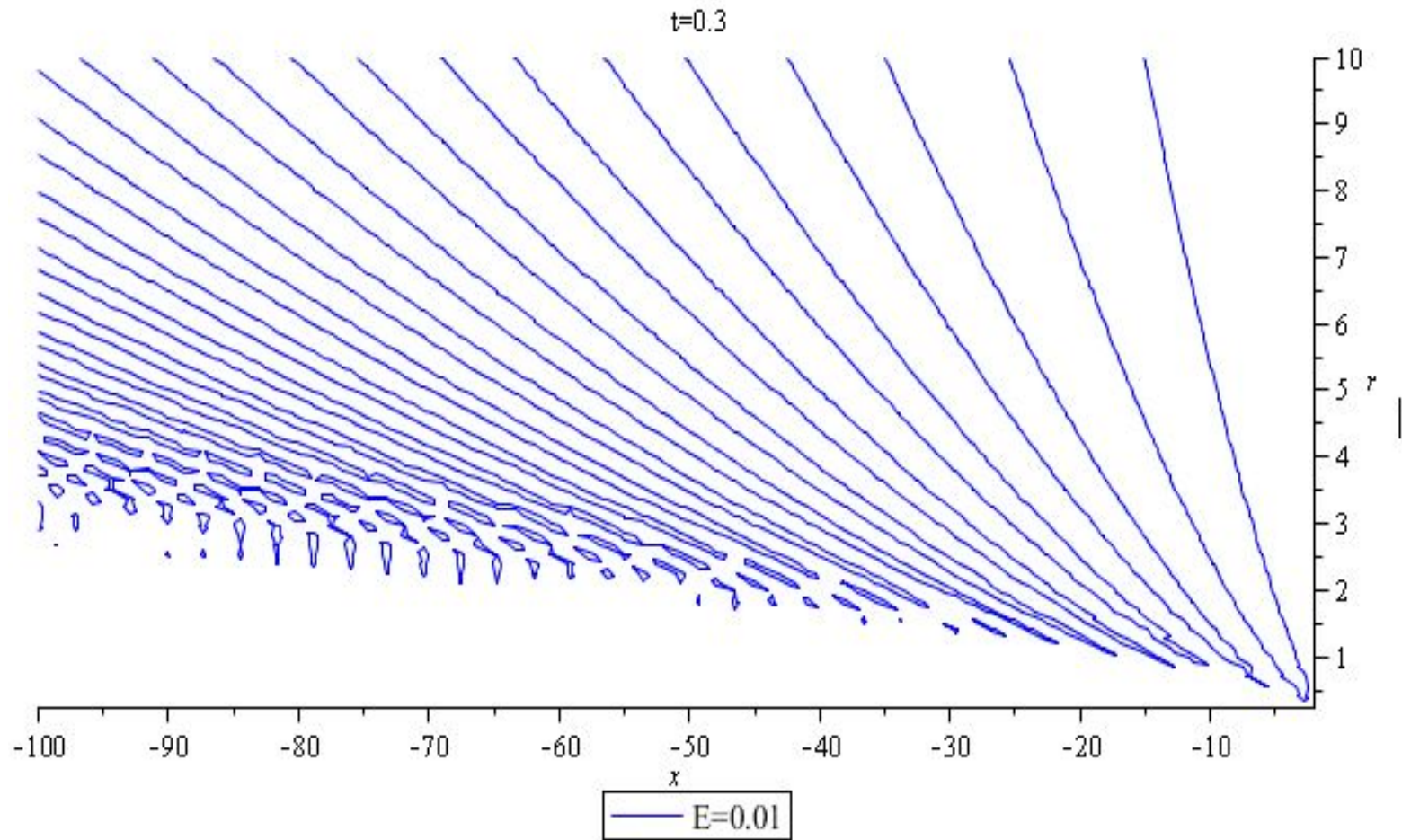


$t=0.3, E=0.1$

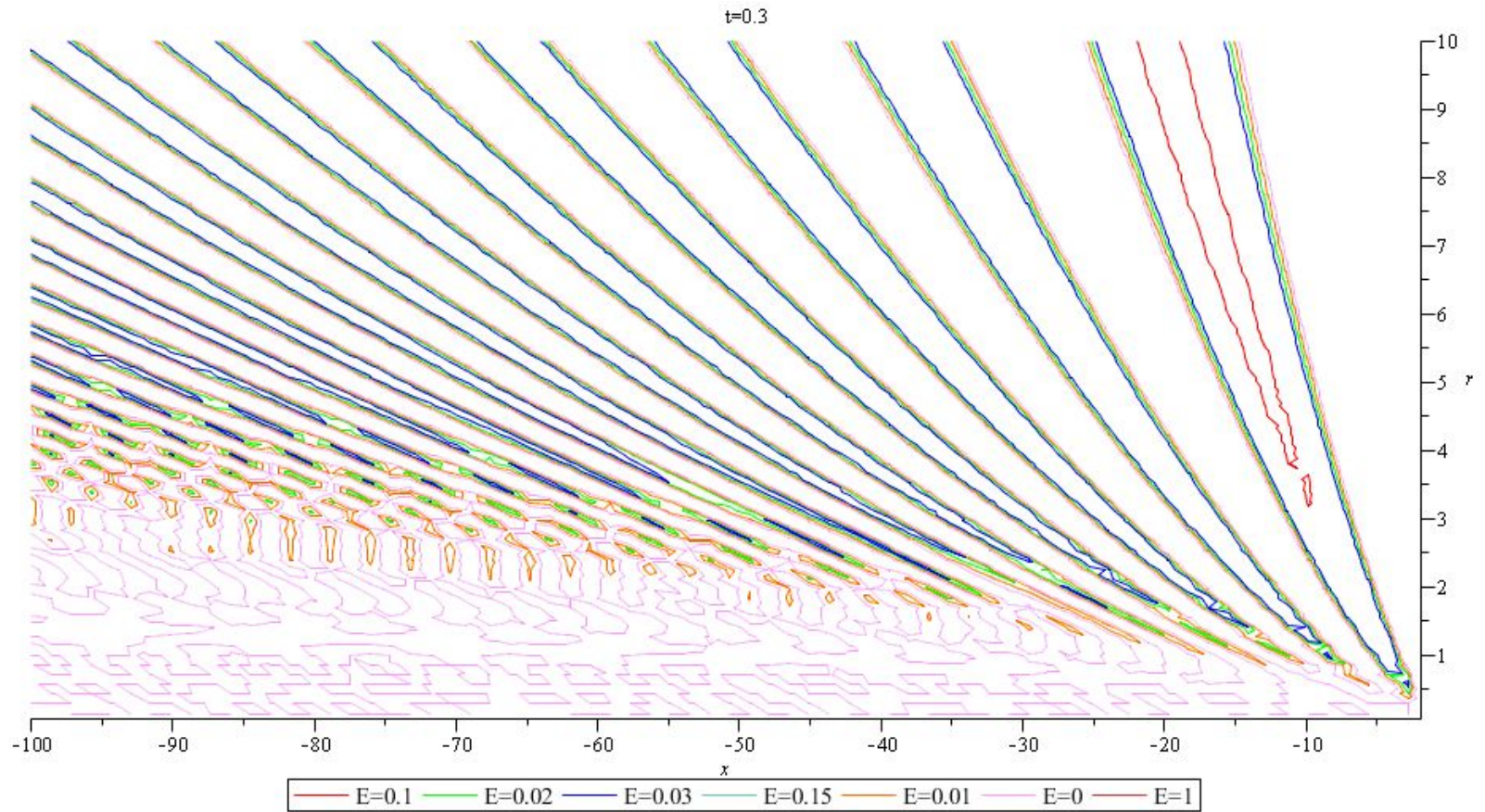
---



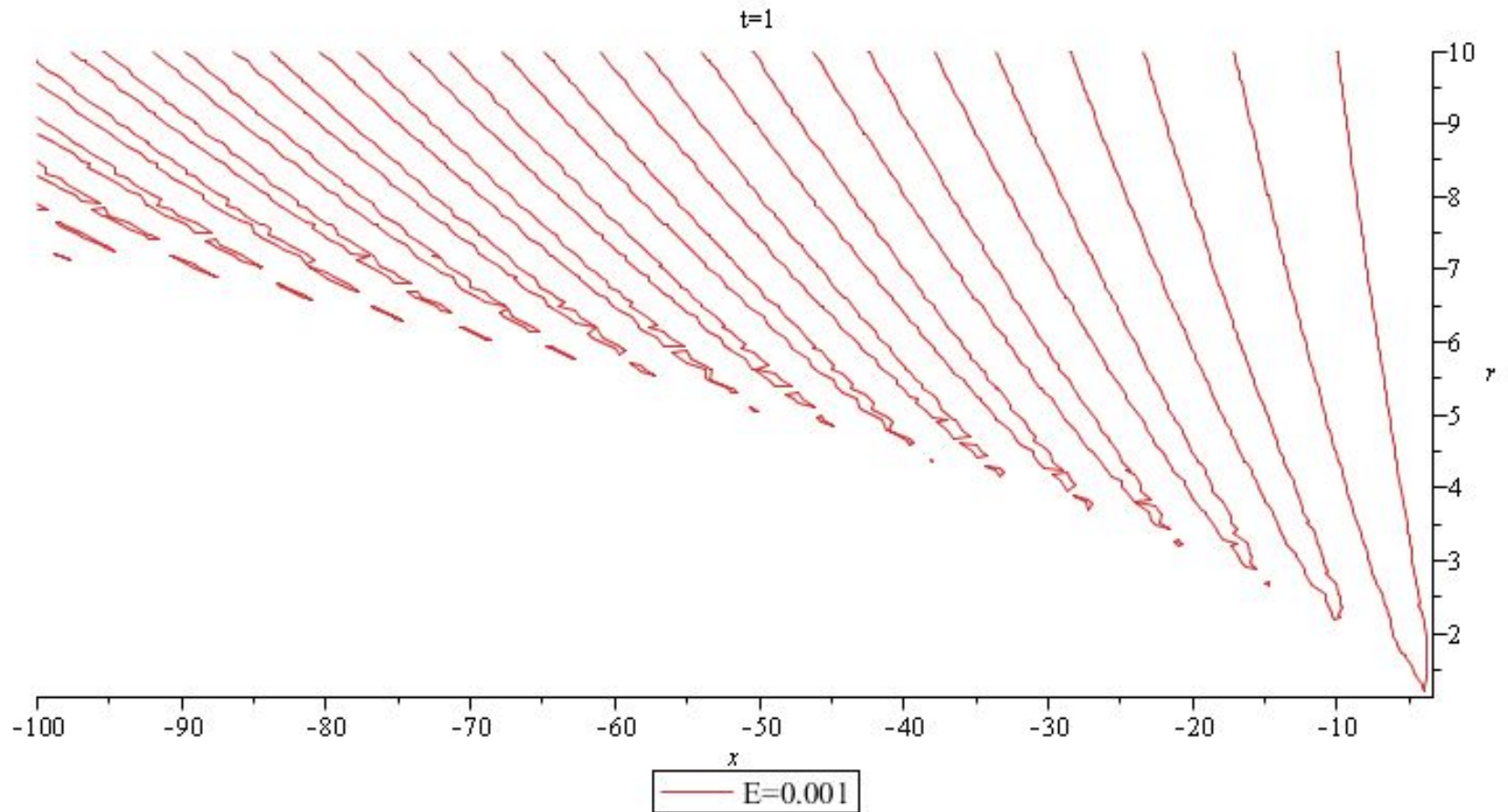
$t=0.3, E=0.01$



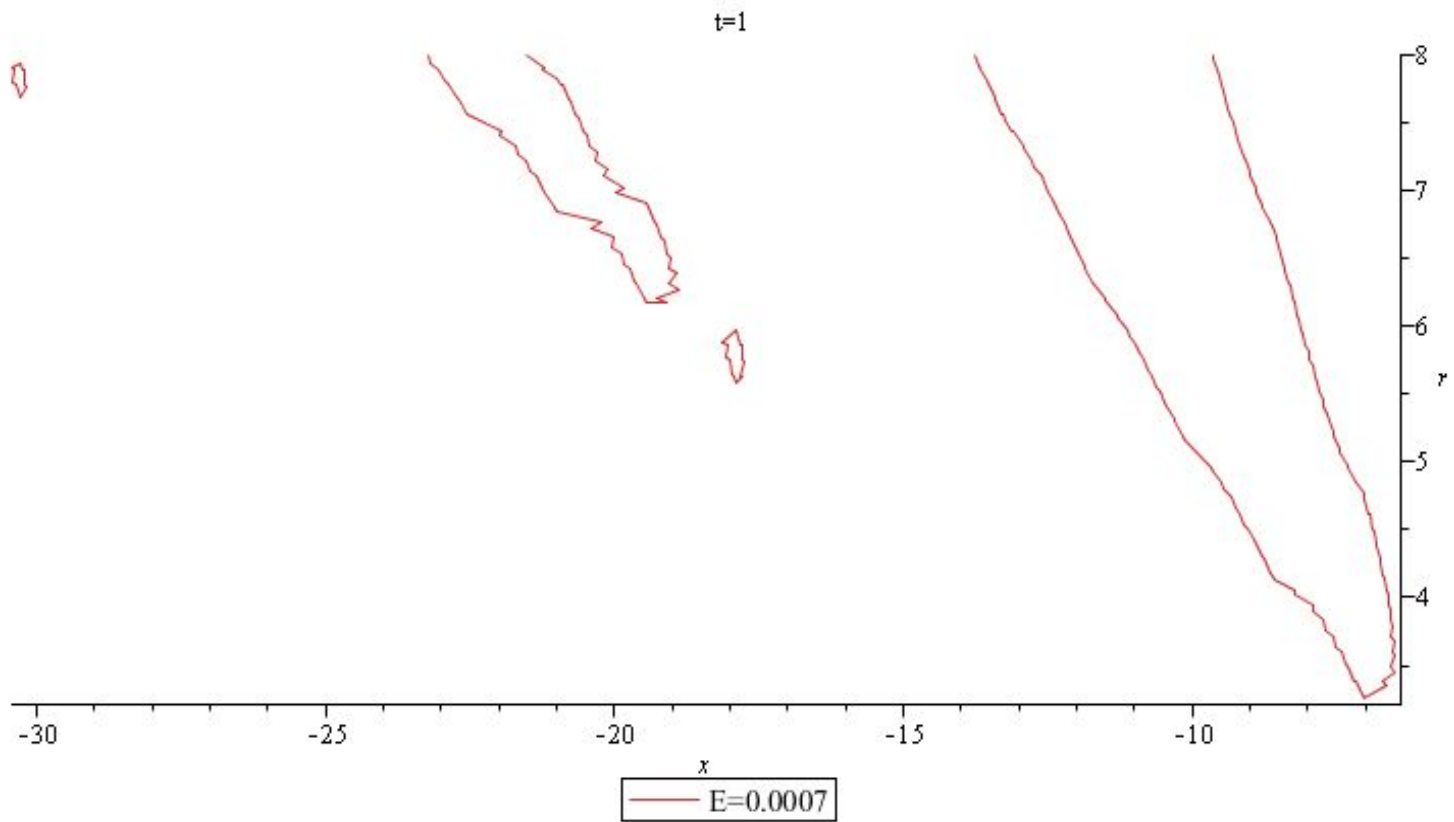
# t=0.3



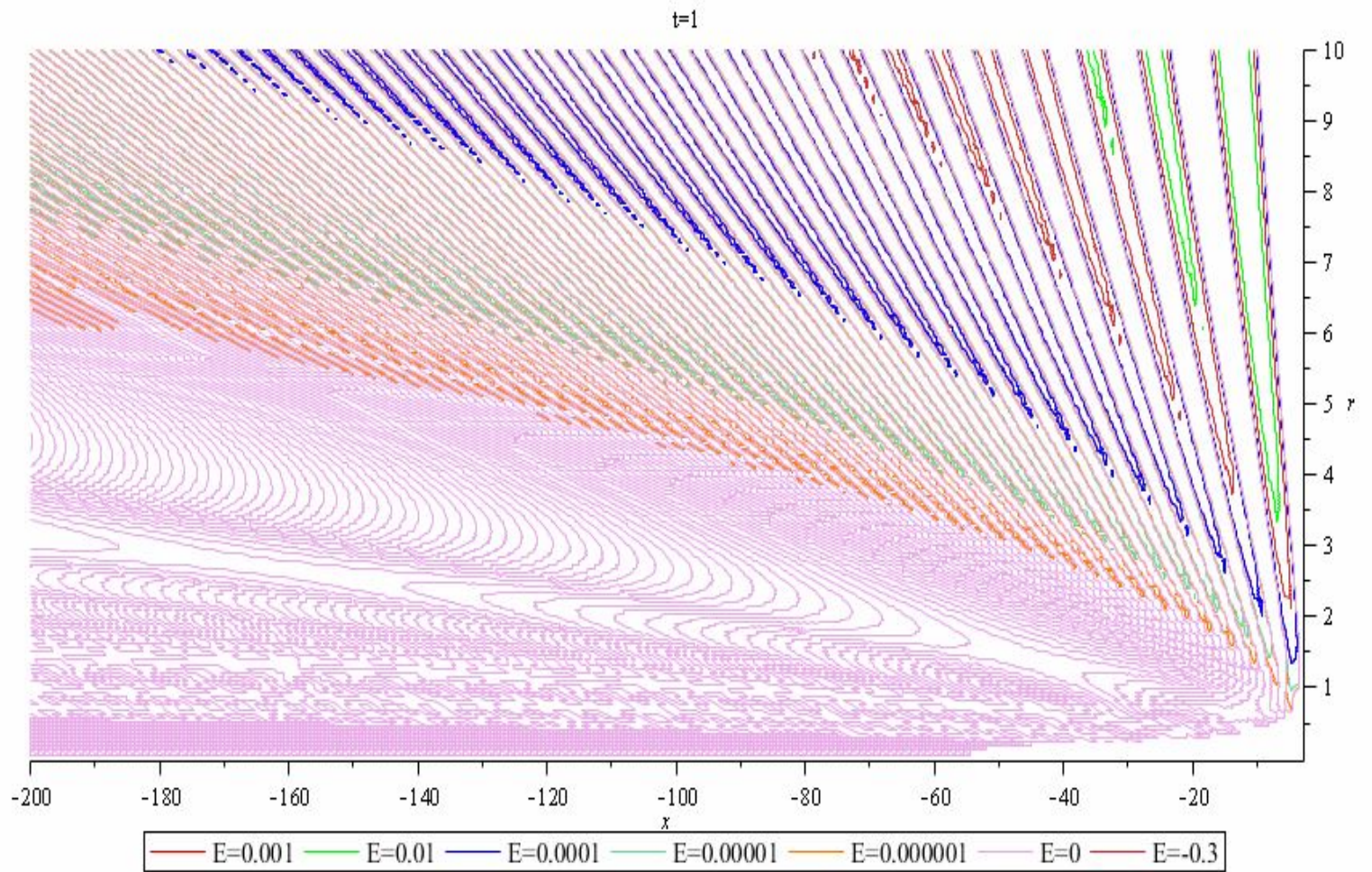
# $t=1, E=0.001$



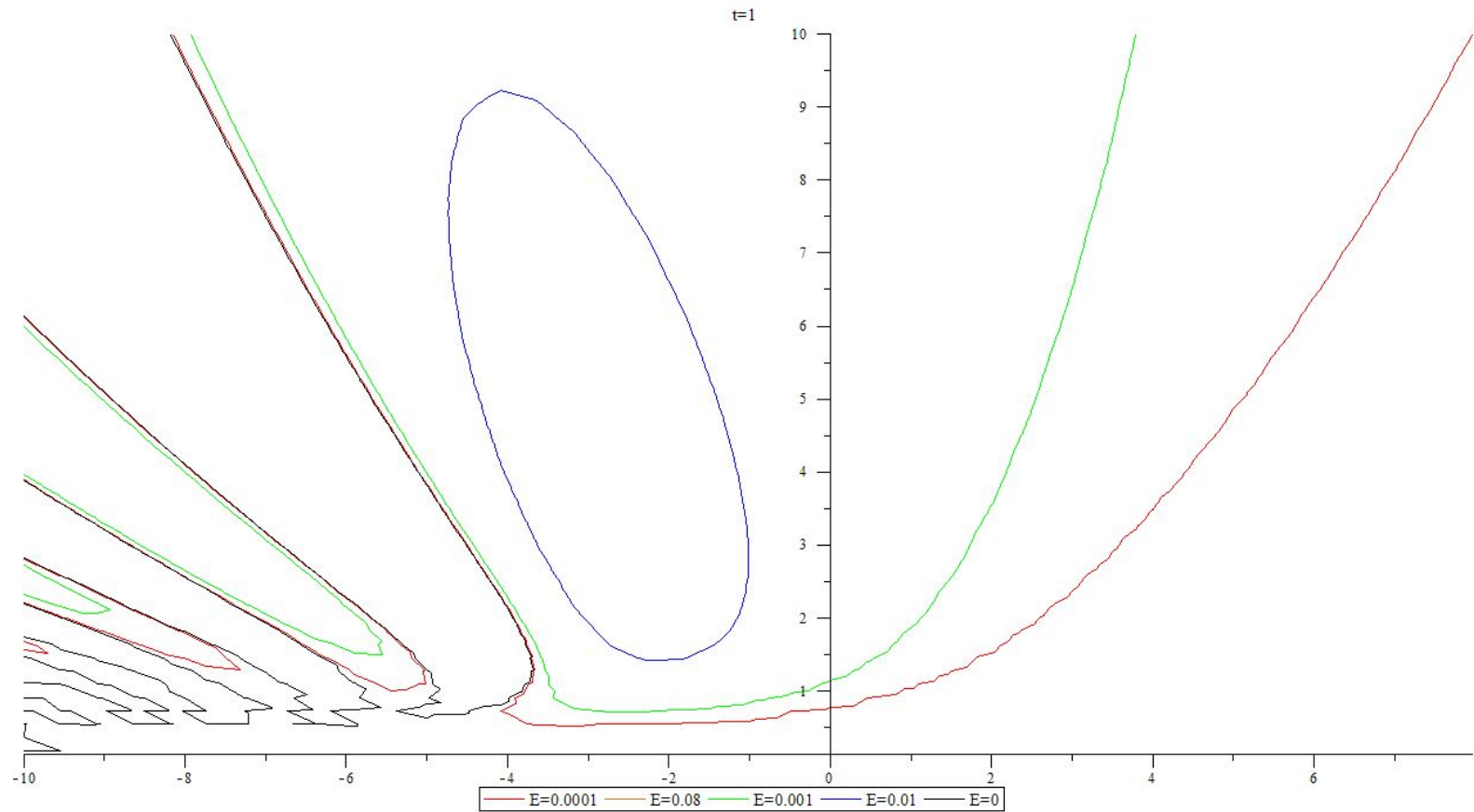
# $t=1, E=0.0007$



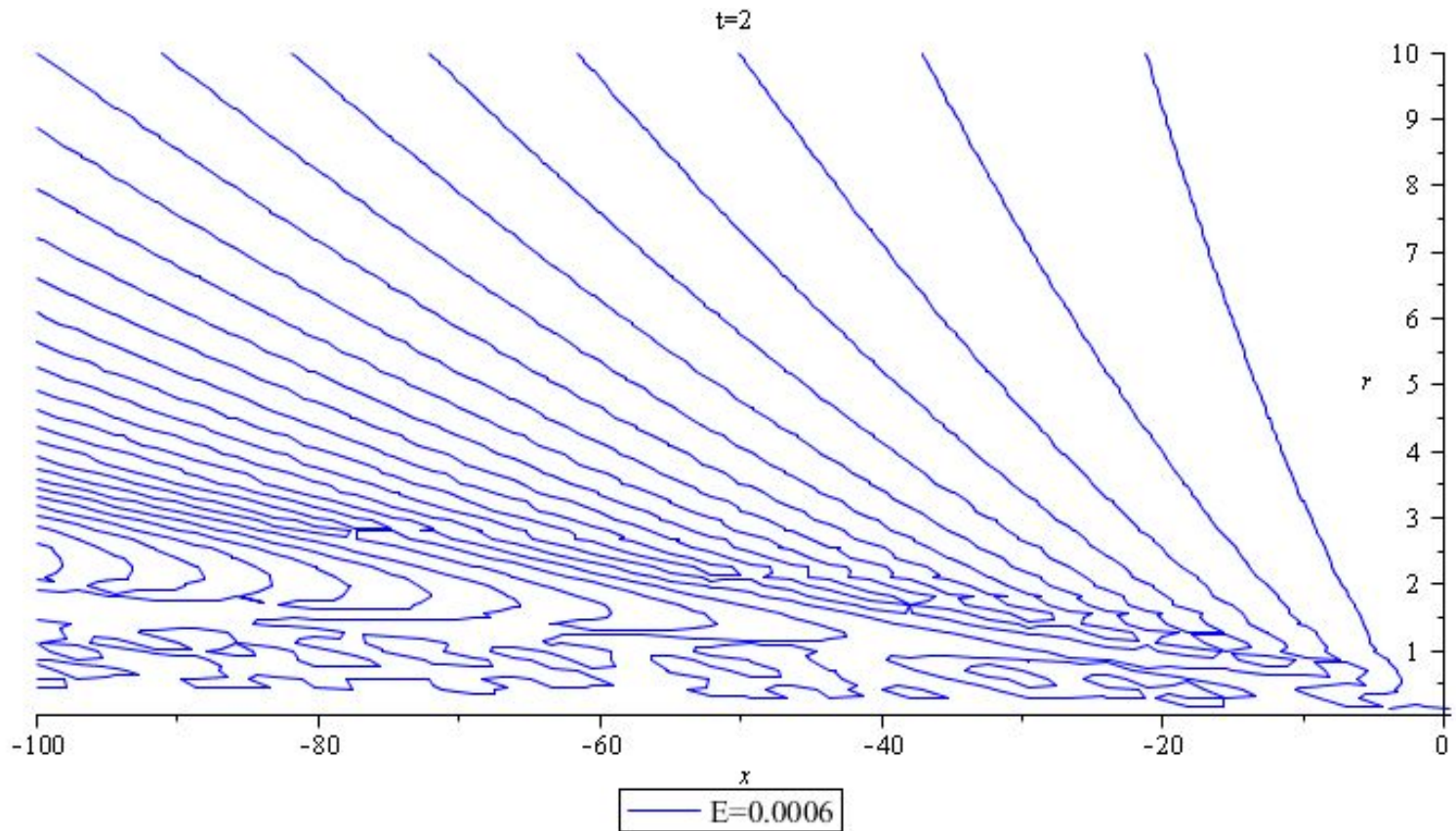
# t=1



# t=1, детализация



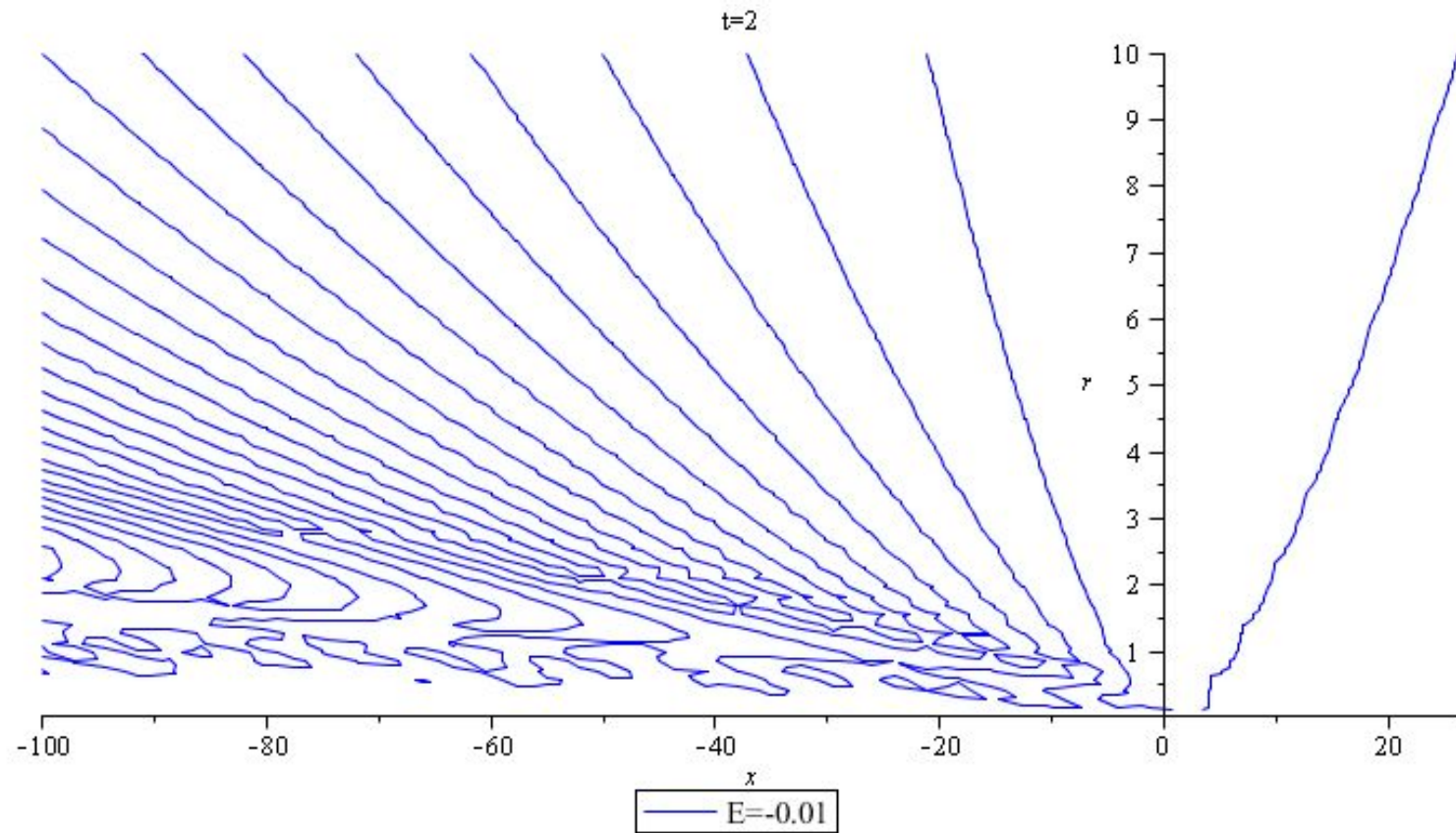
$t=2, E=0.0006$



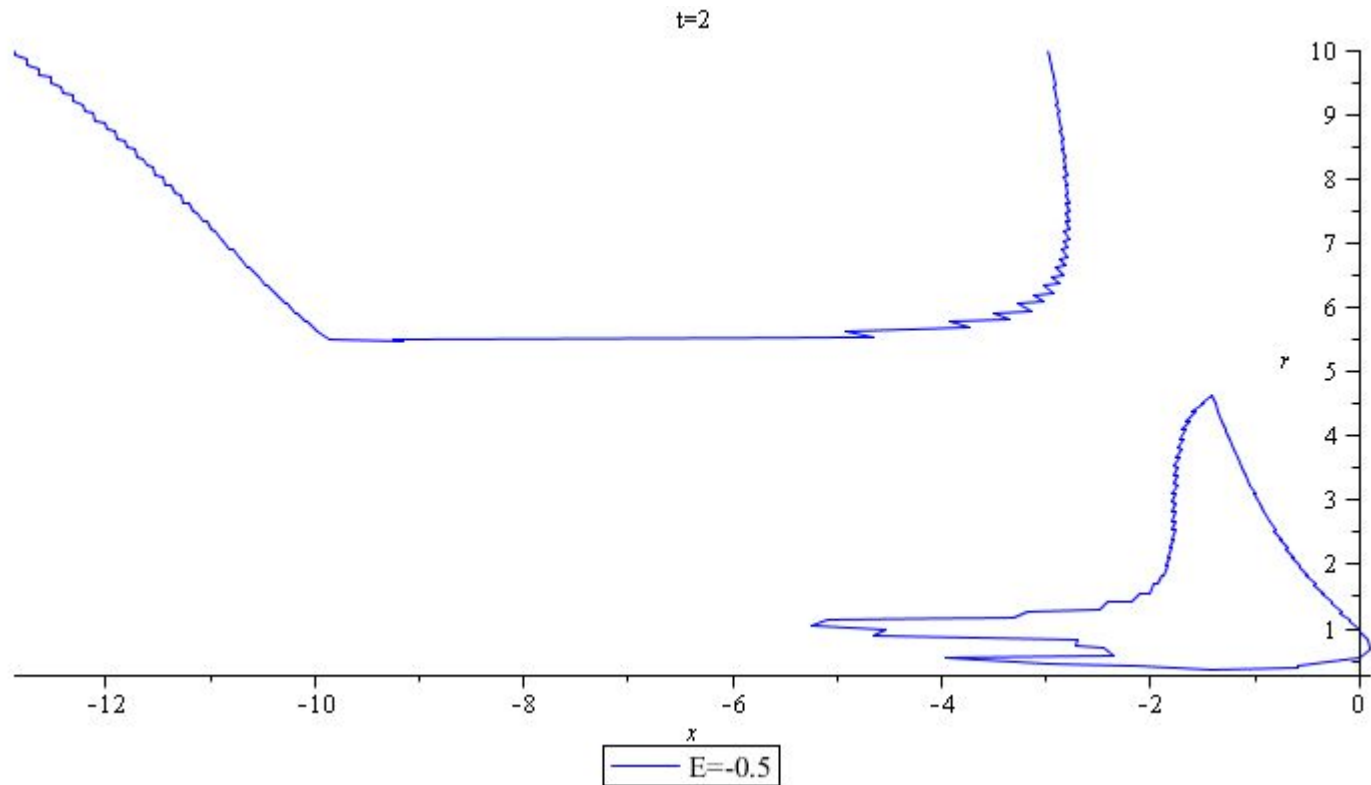


$t=2, E=-0.01$

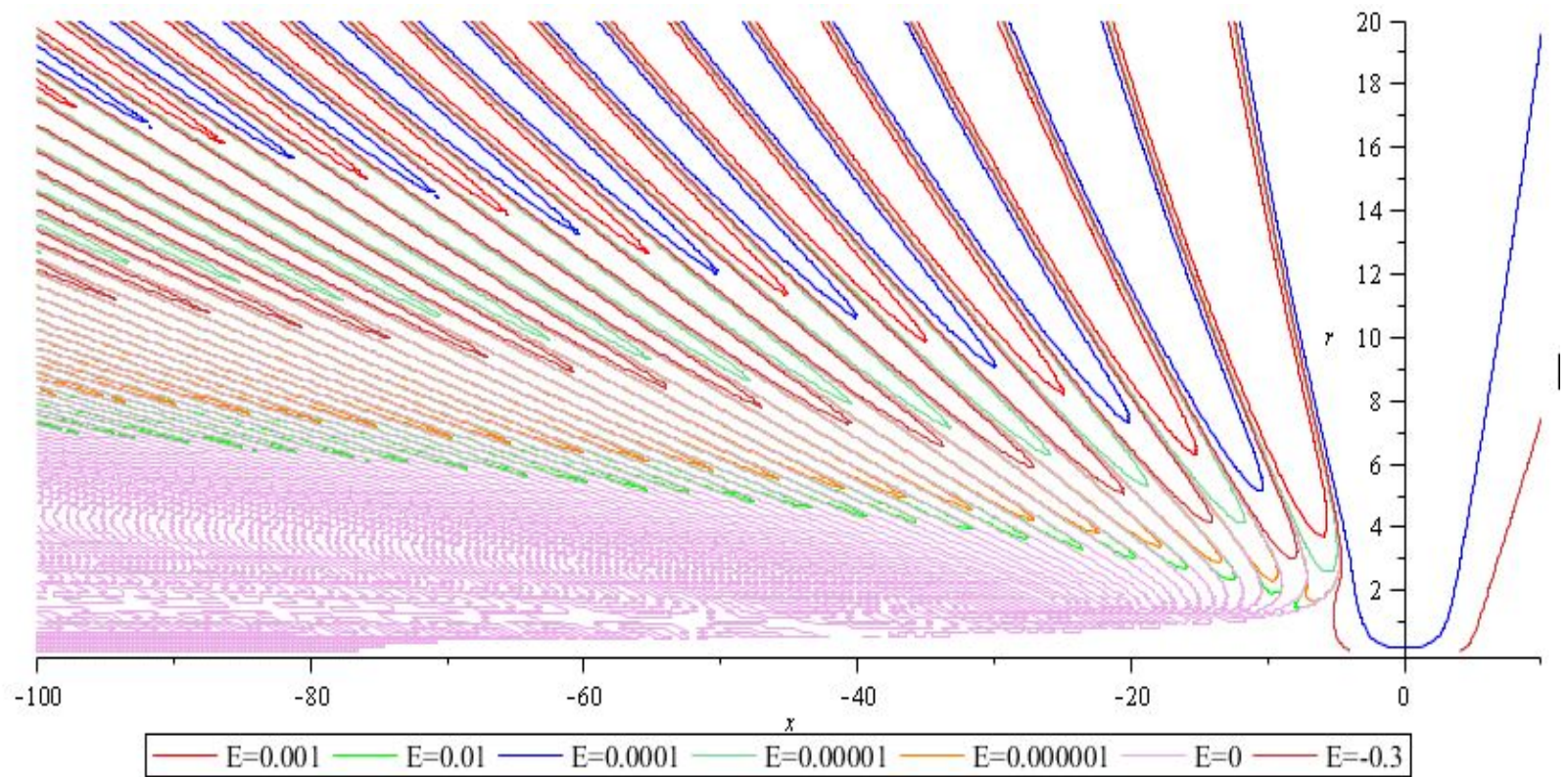
---



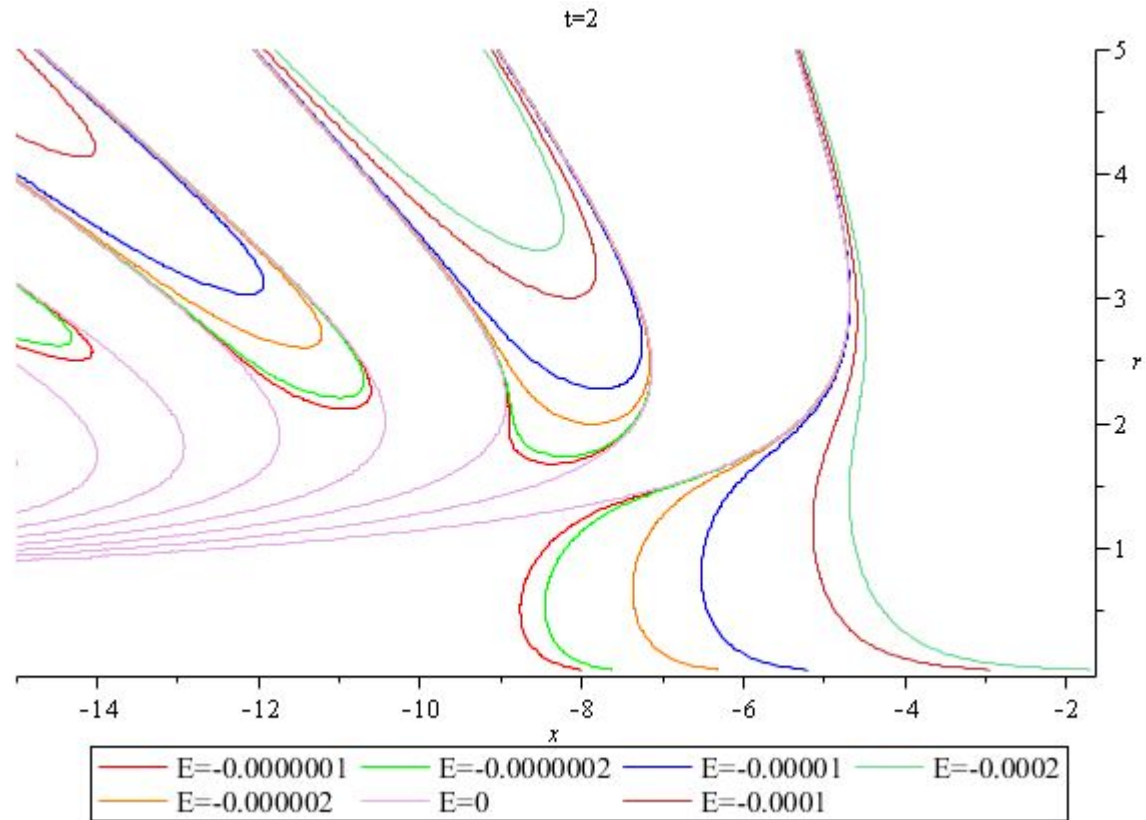
# $t=2, E=-0.5$



t=2



# t=2



## Вывод:

---

Была дана исчерпывающая информация о фундаментальном решении E, прослежена эволюция поверхностей уровня во времени и выявлены интересные физические эффекты (существование торроидальных стратов)



Спасибо за внимание

---