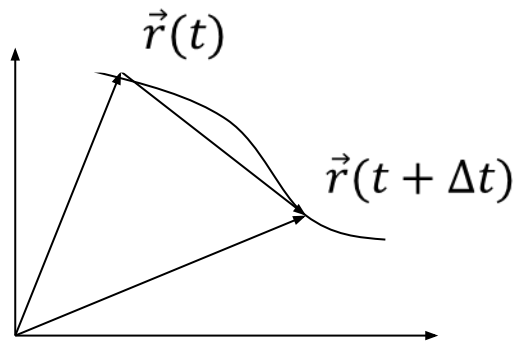


# Механика.

- Лектор:
- Парахин А.С., к. ф.-м. наук, доцент.

## 2.3. Кинематические характеристики движения.

- Пусть в некоторый момент времени  $t$  положение материальной точки характеризовалось радиусом вектором  $\vec{r}(t)$ , а в момент времени  $t + \Delta t$ , радиусом вектором  $\vec{r}(t + \Delta t)$ .



# Перемещение

- Определение. Вектор, соединяющий начальное и конечное положение материальной точки в течение промежутка времени  $\Delta t$ , называется её перемещением за этот промежуток времени.
- $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$
- Как видно из определения, перемещение есть векторная величина, а длина перемещения измеряется в метрах. Этот факт записывают таким образом:  $[|\Delta \vec{r}|] = \text{м}$

# Перемещение в координатном виде.

- Так как любой вектор можно разложить по осям координат, перемещение также можно выразить через координаты радиуса вектора
- $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

# Перемещение при малом промежутке времени.

- Обозначим начальную точку  $A$ , а конечную  $B$ . Если промежуток времени устремить к нулю, точка  $B$  будет стремиться к точке  $A$ . В этом случае перемещение будет по направлению стремиться к единичному вектору касательной  $\vec{t}$ .
- [Progr D:](#) [Progr E:](#) [Progr F:](#) [Progr G:](#)

# Элемент.

- Progr E:

# Элемент

- В физике элементом какой либо физической величины называется такое достаточно малое изменение этой величины, которое по условиям задачи можно считать бесконечно малым по отношению к другим значениям этой величины. Элементы физических величин обозначают обозначениями самой этой величины с добавлением латинской буквы  $d$  слева от обозначения величины. Таким образом,  $dt$  есть обозначение бесконечно малого промежутка времени, т.е. элементарного промежутка или элемента времени.

# Элементарное перемещение.

- Если в качестве промежутка времени выбран элементарный, то перемещение за такой промежуток времени также будет элементарным. Его обозначают  $d\vec{r}$ .  
Используя это понятие можно сказать, что элементарное перемещение параллельно вектору касательной, т.е.
- $d\vec{r} \parallel \vec{v}$



# Проекция элементарного перемещения на вектор касательной.

- Если обозначить  $dr_\tau$ - проекцию элементарного перемещения на направление касательной, то для элементарного перемещения можно записать
- $d\vec{r} = dr_\tau \vec{t}$ .

# Элементарный путь.

- Так как за достаточно малый промежуток времени точка движется в одну сторону, то элементарное изменение естественной координаты, модуль элементарного перемещения и модуль пути будут равны. Точнее говоря, они будут отличаться друг от друга на величины более высокого порядка малости, чем сами эти величины.
- $|d\vec{r}| = |d\lambda| = |ds| = |dr_\tau|$

## 2.4. Скорость.

- Для описания быстроты движения тела нужно знать мгновенную скорость.
- Определение. Мгновенной скоростью или просто скоростью движения материальной точки называется векторная величина, равная производной от радиуса вектора материальной точки по времени.
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

# Элемент функции.

- Пусть задана функция  $y = f(x)$ .
- Определение.
- Элементом функции или элементарным изменением функции называется разность между значениями функции в точке  $x + dx$  и в точке  $x$ . Обозначается  $df$  и по определению
- $df = f(x + dx) - f(x)$

# Производная функции.

- Определение.
- Производной некоторой функции называется отношение элемента функции к соответствующему элементу аргумента, т.е.  
$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$
- Для определения скорости нужно элементарное изменение радиуса вектора разделить на соответствующее элементарное изменение времени.

# Направление мгновенной скорости.

- Таким образом, скорость материальной точки есть векторная величина. Она направлена по направлению элементарного перемещения, а элементарное перемещение – по касательной, значит, скорость направлена по касательной к траектории.
- $\vec{v} \parallel \vec{\tau}$

# Координаты скорости.

- Таким образом, скорость материальной точки есть векторная величина. Как и любая другая векторная величина, скорость материальной точки соответствует трём скалярным величинам, а именно, её проекциям на оси координат

- $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$

- $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

# Единицы измерения скорости.

- Из определения мгновенной скорости следует,  $[|\vec{v}|] = \text{м/с}$ . Кроме этой системной единицы измерения скорости на практике часто используют несистемные единицы, самой распространённой из которых является км/час. Чтобы перевести скорость из м/с в км/ч, нужно умножить значение скорости на 3.6, при обратном переводе – разделить.



## 2.6. Ускорение в криволинейном движении. Нормальное и тангенциальное ускорение.

- Предположим, что точка движется по окружности. Обозначим  $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной, указывающий положительное направление на окружности. С его помощью вектор скорости можно выразить следующим образом:
  - $\vec{v} = v_{\tau} \vec{\tau}$ .
  - Чтобы найти ускорение, нужно продифференцировать это выражение, как произведение двух функций.
  - $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau} + v_{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

# Ускорение при криволинейном движении.

- Чтобы найти ускорение, нужно продифференцировать это выражение, как произведение двух функций.

- $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

# Тангенциальное ускорение.

- Отсюда видно, что ускорение в общем случае состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое называется тангенциальным ускорением. Оно направлено по касательной, о чём говорит направление единичного вектора касательной. Если модуль скорости убывает, производная от касательной проекции скорости по времени отрицательна, и тангенциальное ускорение направлено против скорости, в противном случае - по вектору скорости.

# Направление тангенциального ускорения.

- По величине это слагаемое показывает, как быстро меняется касательная проекция скорости. Тангенциальное ускорение обозначают  $\vec{a}_\tau$ .
- Таким образом:
- $$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau}$$

# Нормальное ускорение.

- Второе слагаемое называют нормальным ускорением. Оно направлено к центру окружности и равно по величине  $\frac{v^2}{R}$

# Полное ускорение.

- Полное ускорение представляется в виде суммы двух слагаемых

- $$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

- Так как тангенциальное и нормальное ускорение перпендикулярны, то полное ускорение по модулю можно найти с помощью теоремы Пифагора

- $$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

# Типы переменного движения.

- Если ускорение есть нуль, движение равномерное, если ускорение константа – движение равнопеременное, если тангенциальное ускорение нуль, движение равномерно по траектории, если константа – движение равнопеременное по траектории.

# Замедленные и ускоренные движения.

- При этом если скорость и тангенциальное ускорение совпадают по направлению, скорость растёт, и движение называется ускоренным. Если скорость и тангенциальное ускорение противоположны, скорость убывает, и движение называется замедленным.



## 2.7. Перемещение в различных движениях, законы различных движений.

- Если скорость материальной точки задана, как функция времени, то пользуясь определением скорости можно найти радиус-вектор, как функцию времени. А именно:

- $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \implies d\vec{r} = \vec{v} dt$$

- Чтоб найти радиус вектор, нужно проинтегрировать.
- $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt$
- В частном случае  $\vec{v} = \text{const}$
- $\vec{r}(t) = \vec{v}t + \text{const}$

# Закон равномерного движения.

- Постоянная величина находится из так называемых начальных условий  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ . Подставив это условие в закон движения, найдём постоянное слагаемое  $const = \vec{r}_0 - \vec{v}t_0$ . Теперь эту константу подставим в закон равномерного движения и получим один из самых распространённых законов движения материальной точки.
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$
- Закон равномерного движения.

# Закон равномерного движения в координатном виде.

- Закон равномерного движения можно записать и в координатной форме
- $x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$
- $y(t) = y_0 + v_y(t - t_0)$
- $z(t) = z_0 + v_z(t - t_0)$

# Скорость через ускорение.

- Если ускорение материальной точки задано, как функция времени, её скорость можно найти с помощью определения ускорения, а именно
- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \implies \vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt.$

# Скорость при постоянном ускорении.

- Если ускорение материальной точки есть величина постоянная, т.е. движение равнопеременное, интеграл в формуле скорости находится достаточно просто.
- $\vec{v}(t) = \vec{a}t + const$
- Эта формула называется законом изменения скорости при равнопеременном движении.

# Равноускоренное и равнозамедленное движение.

- Если скорость сонаправлена с ускорением, движение называется равноускоренным, в противном случае – равнозамедленным.

# Начальные условия для скорости.

- Константа вновь находится из начальных условий уже для скорости:
- $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$
- Подставляя эти начальные условия в формулу скорости и определив константу, найдём закон изменения скорости
- $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$



# Закон изменения скорости в координатном виде.

- Закон изменения скорости можно записать в координатном виде:
  - $v_x(t) = v_{x0} + a_x(t - t_0)$
  - $v_y(t) = v_{y0} + a_y(t - t_0)$
  - $v_z(t) = v_{z0} + a_z(t - t_0)$

# Закон равнопеременного движения.

- Зная закон изменения скорости для равнопеременного движения, можно найти и закон этого движения, т.е. найти  $\vec{r}(t)$
- $\vec{r}(t) = \int [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)] dt$
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}(t - t_0)^2}{2}$

# Закон равнопеременного движения в координатном виде.

- Этот закон можно записать и в координатном виде

- $x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \frac{a_x(t-t_0)^2}{2}$

- $y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{a_y(t-t_0)^2}{2}$

- $z(t) = z_0 + v_{z0}(t - t_0) + \frac{a_z(t-t_0)^2}{2}$

## 2.8. Свободное падение тел.

- Одним из самых распространённых примеров равнопеременного движения является движение тела, брошенного под углом к горизонту, в частности, свободное падение тел. Если ось  $oy$  направить вдоль вертикали вверх, а ось  $ox$  по горизонтали (ось  $oz$  не понадобится), то в этом случае
- $a_x = 0, a_y = -g$

# Закон свободного падения тел.

- Определение. Движение тела вблизи поверхности Земли только под действием силы тяжести называется свободным падением тел.
- $x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0)$
- $y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}$
- $v_x = v_{x0}, v_y = v_{y0} - g(t - t_0)$

# Падение тела с высоты.

- В частности, если тело падает с некоторой высоты  $h$ , то  $y_0 = h$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $v_{y0} = 0$ .
- Выразив скорость падения,
- $0 = h - \frac{g(t)^2}{2} \quad v_y = -g(t)$
- найдём  $v = |v_y| = \sqrt{2gh}$

# Движение тела, брошенного под углом к горизонту. [Progr](#)

- Эти формулы справедливы для любого случая движения тела вблизи поверхности земли. Если известен угол бросания тела к горизонту и его начальная скорость, то предыдущие формулы видоизменяются
- $x(t) = x_0 + v_0 \cos(\alpha)(t - t_0)$
- $y(t) = y_0 + v_0 \sin(\alpha)(t - t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}$
- [Progr D](#): [Progr E](#): [Progr F](#): [Progr G](#):

- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G:



## 2.9. Колебательное движение.

- Примером переменного движения могут служить гармонические колебания.
- [Progr D: Progr E: Progr F: Progr G:](#)
- Определение. Периодическими движениями материальной точки называются такие движения, при которых она в каждую точку своей траектории постоянно возвращается через равные промежутки времени.

# Период периодического движения

- Определение. Промежуток времени, через который материальная точка возвращается в одну и ту же точку траектории при периодическом движении, называется периодом движения. Обозначается  $T$  и измеряется в секундах.

# Механические колебания.

- Определение. Механическими колебаниями материальной точки называются такие периодические движения материальной точки между двумя крайними точками пространства, при которых траектория движения материальной точки в одну сторону совпадает с траекторией движения в другую сторону.

# Уравнение гармонических колебаний.

- Определение. Гармоническими колебаниями называются такие колебания, законы которых имеют вид
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$
- или
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

# Гармонические колебания вдоль одной оси.

- Если колебание происходит вдоль оси  $ox$ , закон движения может быть записан в скалярной форме
- $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$
- Определение. Положение колеблющейся материальной точки, при котором  $x = 0$ , называется положением равновесия.
- Величина  $x_0$  называется амплитудой колебания и показывает, каково максимальное отклонение колеблющейся материальной точки от положения равновесия.

# Фазовый множитель

- Величина  $\sin(\omega t + \varphi_0)$  называется фазовым множителем, он показывает, какую часть от максимального значения составляет в данный момент времени координата колеблющейся материальной точки.
- Величина  $\varphi(t) = (\omega t + \varphi_0)$  называется фазой колебания и определяет, в какой стадии колебания находится колеблющееся тело. Измеряется в радианах.

# Круговая частота и период.

- Величина  $\omega$  называется круговой частотой и определяет скорость изменения фазы колебания. Чем больше круговая частота, тем быстрее совершаются колебания.
- Между круговой частотой и периодом существует связь. За один период фаза должна измениться на  $2\pi$ , так что
- $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

# Связь циклической частоты с круговой.

- Определение. Циклической частотой называется величина, численно равная количеству полных циклов колебаний за единицу времени.
- Обозначается  $\nu$  и равна  $\nu = \frac{1}{T}$
- так что  $\omega = 2\pi\nu$