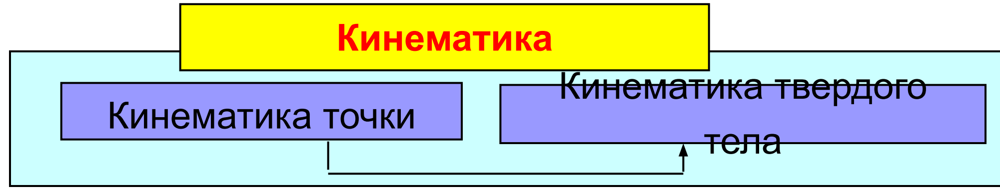
Содержание

- **Лекция 1.**
  Кинематика точки. Способы задания движения. Уравнения движения. Траектория. Закон движения точки. Связь между тремя способами задания движения. Скорость точки. Ускорение точки. Равнопеременное движение точки.

- **Лекция 2.**
  Кинематика твердого тела. Виды движений. Поступательное движение. Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение. Скорость и ускорение точки тела при вращательном движении. Плоскопараллельное движение твердого тела. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Уравнения движения.

- **Лекция 3.**
  Теорема о сложении скоростей. Следствия из теоремы. Мгновенный центр скоростей (МЦС). Примеры использования МЦС для определения скоростей. Теорема о сложении ускорений. Сложное движение точки. Теорема о сложении ускорений точки при сложном движении. Ускорение Кориолиса.

Лекция 1

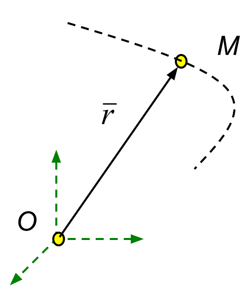


- **Кинематика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение без учета сил, вызывающих это движение, состоит из двух отделов:

- **Кинематика точки –** изучает движение материальной точки, является базой для изучения движения точек твердого тела.
- Задание движения точки – необходимо иметь возможность определения положения точки в пространстве в любой момент времени (уравнения, геометрия механизма и известный закон движения ведущего звена).
- Траектория движения точки – совокупность положений точки в пространстве при ее движении.

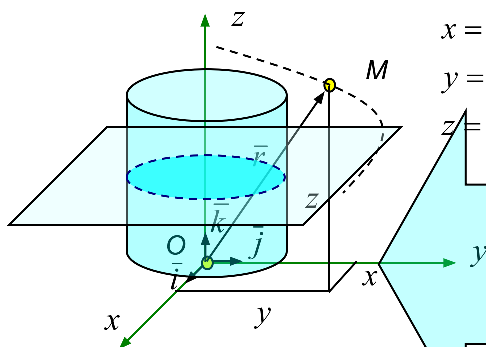
Три способа задания движения точки:

Векторный способ: Задается величина и направление радиуса-вектора.



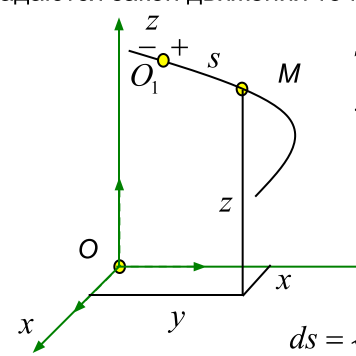
$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

Координатный способ: Задаются координаты положения точки.

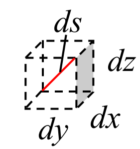


$$x = x(t);\quad y = y(t);\quad z = z(t).$$

Естественный способ: Задаются закон движения точки и траектория.



$$s = s(t);\quad f(x, y, z) = 0.$$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Все три способа задания эквивалентны и связаны между собой:

1. Векторный и координатный – соотношением: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$

2. Координатный и естественный – соотношением: $s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$

3. Для получения уравнения траектории движения необходимо из уравнений движения координатного способа исключить время, т.к. траектория не зависит от времени:

$$x = x(t) \Rightarrow t = t(x);$$
$$y = y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x);$$
$$z = z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x).$$

Последние два уравнения представляют собой уравнения линейчатых поверхностей, линия пересечения которых и есть траектория движения точки.

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$$

Например:

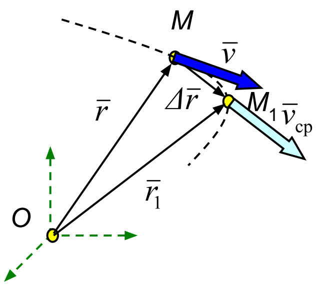
$$x = t \Rightarrow t = x$$
$$y = \sqrt{R^2 - t^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \;\text{ или }\; x^2 + y^2 = R^2;$$
$$z = c.$$

Последние два уравнения представляют собой уравнения цилиндрической поверхности радиуса *R* с образующей, параллельной оси *z*, и плоской поверхности, параллельной координатной плоскости *Oxy* и смещенной по оси *z* на величину *c*. Линия пересечения этих поверхностей (окружность радиуса *R*) - траектория движения точки.

- **Скорость точки** – величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве.

Три способа задания движения точки определяют способы определения скорости точки:

Векторный способ: Сравним два положения точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:



$$t \Rightarrow \bar{r};$$
$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta\bar{r};$$

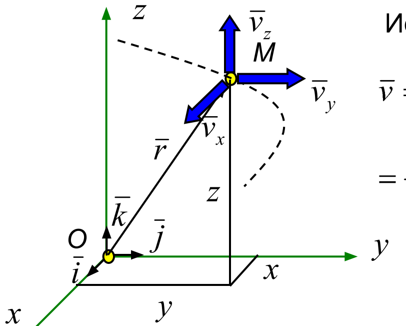
$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \bar{v}_{ср}$$ - вектор средней скорости в интервале времени Δt, направлен по направлению вектора перемещения (хорде MM_1).

Устремим $\Delta t \to 0$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \bar{v}$

Предел отношения приращения функции к приращению приращения аргумента есть производная функции (по определению): $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$ - **вектор истинной скорости точки в момент времени t**, направлен по касательной к траектории (при приближении M_1 к M хорда занимает положение касательной).

Координатный способ: Связь радиуса-вектора с координатами определяется выражением: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$



Используем векторную форму определения скорости:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$$

Компоненты (составляющие) вектора скорости:

$$\bar{v}_x = \dot{x}(t)\bar{i};\quad \bar{v}_y = \dot{y}(t)\bar{j};\quad \bar{v}_z = \dot{z}(t)\bar{k}.$$

Проекции скорости на оси координат:

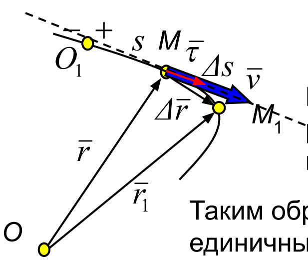
$$v_x = \dot{x};\quad v_y = \dot{y};\quad v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};\quad \cos(\bar{v}, x) = \frac{\dot{x}}{v};\quad \cos(\bar{v}, y) = \frac{\dot{y}}{v}.$$

Естественный способ: Представим радиус-вектор как сложную функцию: $\bar{r}(t) = \bar{r}[s(t)]$.

Используем векторную форму определения скорости:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\dot{s}$$



Представим производную радиус-вектора как предел: $\dfrac{d\bar{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}$.

Вектор приращения радиуса-вектора направлен по хорде MM_1 и в пределе занимает положение касательной.

Величина производной радиуса-вектора по дуговой координате равна 1: $\left|\dfrac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \dfrac{2\rho\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho\Delta\varphi} = 1.$

При $\Delta s \to 0$ радиус кривизны $\rho_1 \to \rho$, угол между радиусами кривизны $\Delta\phi \to 0$, числитель - - основание равнобедренного треугольника, знаменатель – длина круговой дуги радиуса ρ.

Таким образом, производная радиуса-вектора по дуговой координате есть единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Вектор скорости равен: $\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau}$. **Проекция скорости на касательную:** $v_\tau = \dot{s}$

При $\dot{s} > 0$ вектор скорости направлен в сторону увеличения дуговой координаты, В противном случае – в обратную сторону.

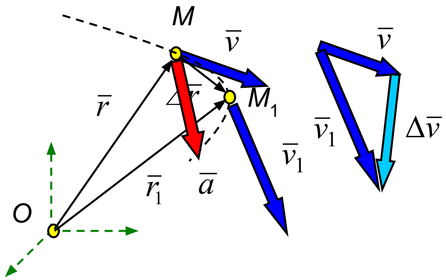
- **Ускорение точки** – величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки.

Три способа задания движения точки определяют способы определения ускорения точки:

$t \qquad \Rightarrow \bar v;$

$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar v_1 = \bar v + \Delta \bar v;$

Векторный способ: Сравним скорости точки в двух положениях точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

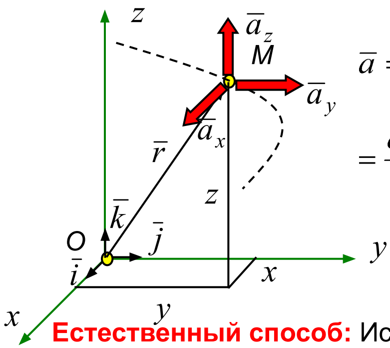


$\dfrac{\Delta \bar v}{\Delta t} = \bar a_{\text{ср}}$ - вектор среднего ускорения в интервале времени Δt, направлен в сторону вогнутости траектории.

Переходя к пределу получаем: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar v}{\Delta t} = \bar a \qquad \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar v}{\Delta t} = \dfrac{d\bar v}{dt}$

$\bar a = \dfrac{d\bar v}{dt} = \dfrac{d^2 \bar r}{dt^2}$ - **вектор истинного ускорения точки в момент времени *t***, *лежит в соприкасающейся плоскости* (предельное положение плоскости, проведенной через касательную в точке *M* и прямую, параллельную касательной в точке M_1, при стремлении M_1 к *M*) и *направлен в сторону вогнутости траектории*.

Координатный способ: Используем полученное векторное выражение и связь радиуса-вектора с координатами $\bar r(t) = x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k$



$$\bar a = \frac{d^2 \bar r(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k\right] = \frac{d^2 x}{dt^2}\bar i + \frac{d^2 y}{dt^2}\bar j + \frac{d^2 z}{dt^2}\bar k = a_x \bar i + a_y \bar j + a_z \bar k$$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения:

$\bar a_x = \ddot x \bar i;$

$\bar a_y = \ddot y \bar j;$

$\bar a_z = \ddot z \bar k.$

Проекции ускорения на оси координат:

$a_x = \ddot x;$

$a_y = \ddot y;$

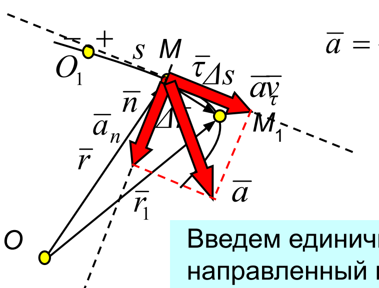
$a_z = \ddot z;$

$a = \sqrt{\ddot x^2 + \ddot y^2 + \ddot z^2};$

$\cos(\bar a, x) = \dfrac{\ddot x}{a};$

$\cos(\bar a, y) = \dfrac{\ddot y}{a}.$

Естественный способ: Используем векторное выраже



$$\bar a = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot s \bar\tau) = \ddot s \bar\tau + \dot s \frac{d\bar\tau}{dt}.$$

Величина производной
единичного касательного в
по дуговой координате:

Таким образом **полное ускорение точки есть векторная сумма двух ускорений**: **касательного**, направленного по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты, если $\ddot s > 0$ (в противном случае – в противоположную) и **нормального ускорения**, направленного по нормали к касательной в сторону центра кривизны (вогнутости траектории): $\bar a = \bar a_\tau + \bar a_n.$

Модуль полного ускорения: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$

касательной к траектории.

Введем единичный вектор ***n***, нормальный (перпендикулярный) к касательной, направленный к центру кривизны.
С использованием вектора ***n*** и ранее определенных величин ускорение представляется как сумма векторов: $\bar a = \ddot s \bar\tau + \dfrac{\dot s^2}{\rho}\bar n.$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения:

$\bar a_\tau = \ddot s \bar\tau;$

$\bar a_n = \dfrac{\dot s^2}{\rho}\bar n.$

Проекции ускорения на оси *τ* и *n*:

$a_{\tau\tau} = \ddot s$

$a_n = \dfrac{\dot s^2}{\rho}.$

Лекция 1 (продолжение 1.4)

- **Равнопеременное движение точки** – движение точки по траектории, при котором касательное ускорение не изменяется по величине.

$a_{\tau\tau} = \ddot{s} = const.$ Запишем выражение для касательного ускорения через проекцию скорости: $a_{\tau\tau} = \ddot{s} = \frac{d}{dt}(\dot{s}) = \frac{dv_\tau}{dt}$

Полученное выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается разделением переменных и интегрированием левой и правой частей:

$$dv_\tau = a_{\tau\tau}dt \qquad \int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} dv_\tau = a_{\tau\tau}\int_0^t dt; \qquad v_\tau\Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = a_{\tau\tau}t\Big|_0^t; \qquad v_\tau - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau}t \qquad v_\tau = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau}t$$

-скорость точки при равнопеременном движении

В свою очередь скорость точки также связывается с дуговой координатой дифференциальной зависимостью: $v_\tau = \frac{ds}{dt}$ или $ds = v_\tau dt.$

После подстановки выражения для скорости и интегрирования получаем :

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau}t)dt; \qquad s\Big|_{s_0}^{s} = \left(v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^t; \qquad s - s_0 = v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}. \qquad s = s_0 + v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}$$

- дуговая координата точки при равно-переменном движении

- **Классификация движений точки**.

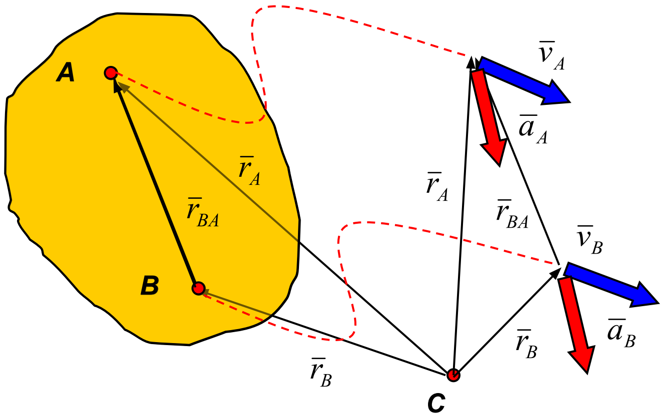
№ пп	$\bar{a}_\tau$	$\bar{a}_n$	Вид движения: Закон движения	Вид движения: Траектория
1	= 0 [t, t_1]	= 0 [t, t_1]	равномерное (v = const)	прямолинейное (ρ = ∞)
2	= 0 [t, t_1]	≠ 0 [t, t_1]	равномерное (v = const)	криволинейное (ρ ≠ ∞)
2.1	= 0 в момент времени t	= 0 [t, t_1]	неравномерное (v ≠ const), в момент времени t $v = max$	прямолинейное (ρ = ∞)
2.2		≠ 0 [t, t_1]		криволинейное (ρ ≠ ∞)
3	≠ 0 [t, t_1]	= 0 [t, t_1]	неравномерное (v ≠ const)	прямолинейное (ρ = ∞)
3.1		= 0 в момент времени t	перемена направления движения (v = 0 при t=t)	любая траектория
3.2			неравномерное (v ≠ const)	перегиб траектории (ρ = ∞ при t=t)
4	≠ 0 [t, t_1]	≠ 0 [t, t_1]	неравномерное (v ≠ const)	криволинейное (ρ ≠ ∞)
5	= const [t, t_1]	любое	равнопеременное	любая траектория

Лекция 2

- **Кинематика твердого тела** – изучает движение твердого тела, кинематика точки используется для получения новых зависимостей и формул.

- **Поступательное движение твердого тела** – такое движение при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе. Обычно поступательное движение отождествляется с прямолинейным движением его точек, однако это не так. Точки и само тело (центр масс тела) могут двигаться по криволинейным траекториям, см. например, движение кабины колеса обозрения.

- **Теорема о поступательном движении твердого тела** – **При поступательном движении твердого тела все его точки описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени геометрически равные скорости и ускорения**.



Проведем радиус-векторы к двум точкам *A* и *B*, а также соединим эти точки вектором $\boldsymbol{r}_{BA}$.

В любой момент времени выполняется векторное равенство: $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \bar{r}_{BA}.$

В любой момент времени вектор $\boldsymbol{r}_{BA}$ ***остается постоянным по направлению*** (по определению поступательного движения) ***и по величине*** (расстояние между точками не изменяется). Отсюда: $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \overline{const},$ и это означает, что в каждый момент времени положение точки *A* отличается от положения точки *B* на одну и ту же величину $\boldsymbol{r}_{BA}$ = ***const***, т.е. **траектории** этих двух точек **тождественны** (совпадают друг с другом при наложении).

Продифференцируем по времени левую и правую часть соотношения: $\dfrac{d\bar{r}_A(t)}{dt} = \dfrac{d\bar{r}_B(t)}{dt}$

и это означает, что в каждый момент времени **скорость точки *A* равна геометрически** (т.е. векторно) **скорости точки *B***. $\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t).$

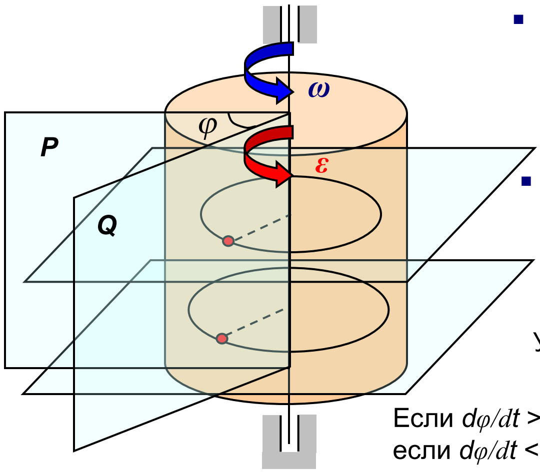
Второе дифференцирование по времени приводит к соотношению: $\dfrac{d\bar{r}^2{}_A(t)}{dt^2} = \dfrac{d\bar{r}^2{}_B(t)}{dt^2}$

и это означает, что в каждый момент времени **ускорение точки *A* равно геометрически** (т.е. векторно) **ускорению точки *B***. $\bar{a}_A(t) = \bar{a}_B(t).$

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной точки, принадлежащей этому телу и выбранной произвольным образом. Все параметры движения этой точки (траектория, скорость и ускорение) описываются уравнениями и соотношениями кинематики точки.

Лекция 2 (продолжение – 2.2)

- **Вращательное движение твердого тела** – движение при котором все его точки движутся в плоскостях, перпендикулярных некоторой неподвижной прямой, и описывают окружности с центрами, лежащими на этой прямой, называемой **осью вращения**.



- **Задание вращательное движения** – движение задается законом изменения двугранного угла φ (угла поворота), образованного неподвижной плоскостью *P*, проходящей через ось вращения, и плоскостью *Q*, жестко связанной с телом:

$$\varphi = \varphi(t)$$ **- уравнение вращательного движения**

- **Угловая скорость** – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота.

$$t \Rightarrow \varphi;$$
$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi;$$
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{\text{ср}}$$ - средняя угловая скорость в интервале времени Δt,

Устремим $\Delta t \to 0$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$ $\quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ **- истинная угловая скорость в момент времени *t***

Если $d\varphi/dt > 0$, то вращение происходит в сторону увеличения угла поворота,
если $d\varphi/dt < 0$, то вращение происходит в сторону уменьшения угла поворота.

Угловая скорость изображается дуговой стрелкой в сторону вращения.

- **Угловое ускорение** – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости.

$$t \Rightarrow \omega;$$
$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta\omega;$$
$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{ср}}$$ - среднее угловое ускорение в интервале времени Δt,

Устремим $\Delta t \to 0$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon$ $\quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ **- истинное угловое ускорение в момент времени *t***

Угловое ускорение изображается дуговой стрелкой в сторону увеличения угла поворота при $\ddot{\varphi} > 0$.

Если $d^2\varphi/dt^2$ и $d\varphi/dt$ одного знака, то скорость увеличивается по модулю и вращение называется ускоренным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в одну сторону),
если $d^2\varphi/dt^2$ и $d\varphi/dt$ разного знака, то скорость уменьшается по модулю и вращение называется замедленным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в противоположные стороны).

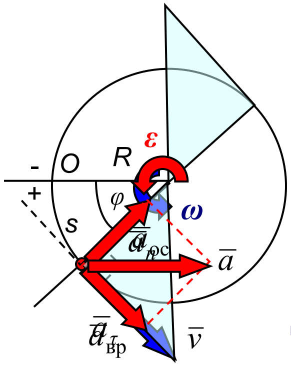
- **Равномерное вращение** – угловая скорость не изменяется по величине. $\omega = const.$ $\quad \omega = \frac{d\varphi}{dt};$ $\quad \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int\limits_0^t dt;$ $\quad \varphi = \varphi_0 + \omega t.$

- **Равнопеременное вращение** – угловое ускорение не изменяется по величине.

$$\varepsilon = const. \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int\limits_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int\limits_0^t dt; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int\limits_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

Лекция 2 (продолжение 2.3)

- **Скорость точки при вращательном движении твердого тела –** траектория точки известна (окружность радиуса *R* – расстояние точки до оси вращения), можно применить формулу для определения скорости точки при естественном задании движения: $v_\tau = \dot{s}$



Дуговая координата связана с радиусом окружности: $s = \varphi R.$

Тогда проекция скорости на касательную к окружности: $v_\tau = \dfrac{d}{dt}(\varphi R) = \dfrac{d\varphi}{dt} R = \omega R.$

Поскольку далее работают с модулем угловой скорости после изображения ее в виде дуговой стрелки расчетной формулой является выражение для модуля скорости: $v = \omega \cdot R$ и вектор скорости направляют **перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки угловой скорости**.

Как следует из формулы **скорость точки пропорциональна расстоянию ее до оси вращения** (радиусу вращения).

- **Ускорение точки при вращательном движении твердого тела –** траектория точки известна, можно применить формулы для определения ускорений точки при естественном задании движения:

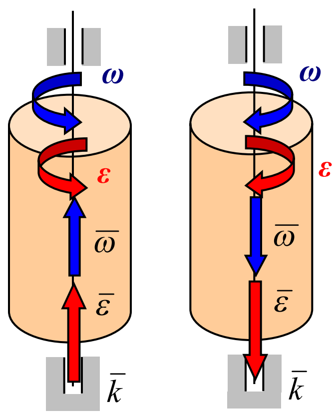
Тогда проекции ускорения на касательную к окружности и нормаль: $a_\tau = \varepsilon R.$ $\quad a_n = \omega^2 R.$

Поскольку далее работают с модулем углового ускорения после изображения его в виде дуговой стрелки расчетной формулой является выражение для касательного ускорения: $a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot R$ и вектор этого ускорения, называемого **вращательным ускорением**, направляют **перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки углового ускорения**.

Нормальное ускорение теперь называется **осестремительным ускорением** $a_{\text{ос}} = \omega^2 \cdot R$, его направляют **по радиусу к оси вращения** независимо от направления дуговой стрелки угловой скорости, не говоря уж о направлении дуговой стрелки углового ускорения.

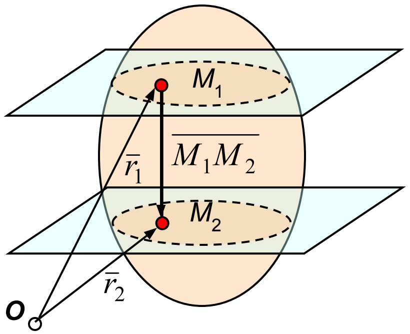
Как следует из формул **оба ускорения точки пропорциональны расстоянию ее до оси вращения** (радиусу вращения).

Полное ускорение точки, как и ранее, есть **векторная сумма** этих ускорений: $\bar{a} = \bar{a}_{\text{вр}} + \bar{a}_{\text{ос}}.$



Лекция 2 (продолжение 2.4)

- **Плоскопараллельное движение твердого тела – движение при котором каждая точка тела движется в в плоскости параллельной некоторой неподвижной плоскости**. Сечение тела одной из таких плоскостей есть плоская фигура, остающаяся в этой плоскости при движении тела.



- **Теорема о плоскопараллельном движении твердого тела – плоскопаралллельное движение твердого тела однозначным образом определяется движением плоской фигуры, образованной сечением тела одной из параллельных плоскостей**.

Выберем две точки на произвольных двух сечениях тела, находящиеся на одном перпендикуляре к этим плоскостям:

Проведем к каждой точке радиусы-векторы из неподвижной точки О и свяжем их между собой вектором ***M₁M₂***:

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \overline{M_1M_2}$$

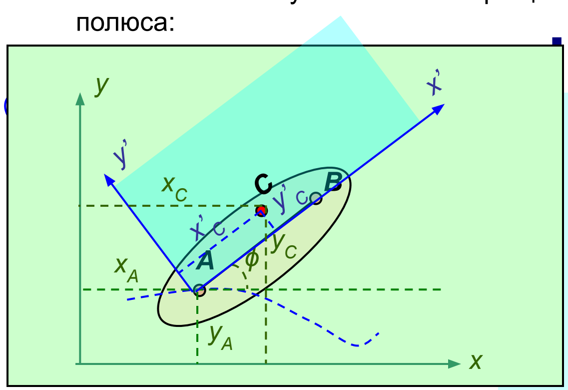
При плоском движении тела вектор ***M₁M₂*** не изменяется по величине, остается параллельным самому себе (движется поступательно) и, следовательно, точки этого вектора описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения:

$$\frac{d\bar{r}_2}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = \overline{const}); \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1, \text{ и } \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}; \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

Таким образом, при плоском движении тела движение каждой точки одной из плоских фигур определяет движение соответствующих точек, находящихся во всех других смежных параллельных плоскостях.

Следствие: Поскольку положение плоской фигуры однозначно определяется положением ее двух точек или отрезка прямой, проведенной через эти точки, то **плоскопараллельное движение твердого тела определяется движением прямолинейного отрезка, принадлежащего одному из сечений тела параллельными плоскостями**.

- **Разложение плоскопараллельного движения плоской фигуры на поступательное и вращательное движения** – Плоскую фигуру или отрезок прямой можно перевести из одного положения в другое бесчисленным множеством способов, меняя последовательность выполнения поступательного и вращательного движения между собой, а также выбирая различные траектории и точки в качестве полюса:



- Таким образом, **плоскопараллельное движение состоит из двух движений: поступательное и вращательное, и его всегда можно разложить на эти два движения**.

Уравнение движения плоской фигуры: Выбирая в качестве полюса любую точку, например, *A*, поступательная часть движения будет описываться уравнениями движения этой точки. Вращательная часть движения описывается уравнением изменения угла поворота вокруг полюса:

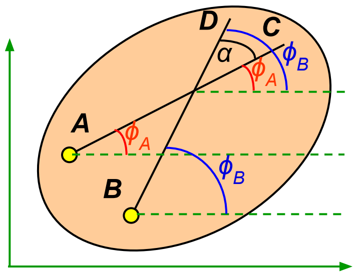
$$x_A = x_A(t);$$
$$y_A = y_A(t);$$
$$\varphi = \varphi(t).$$

Уравнения движения любой точки плоской фигуры, положение которой задается координатами локальной системы отсчета, связанной с фигурой:

$$x_C = x_A(t) + x'_C \cos\varphi(t) - y'_C \sin\varphi(t);$$
$$y_C = y_A(t) + x'_C \sin\varphi(t) + y'_C \cos\varphi(t).$$

Лекция 3

- **Независимость угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры от выбора полюса –** Выберем два произвольных прямолинейных отрезка, изображающих положение плоской фигуры и два полюса на этих отрезках:



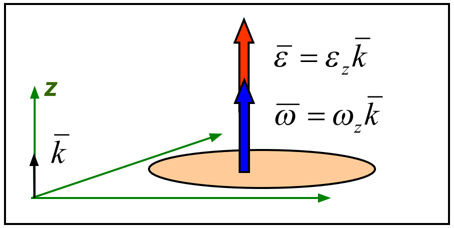
Углы наклона отрезков к горизонтальной оси различны и связаны между собой соотношением: $\varphi_B(t) = \varphi_A(t) + \alpha.$

Продифференцируем это соотношение: $\dfrac{d\varphi_B(t)}{dt} = \dfrac{d\varphi_A(t)}{dt}, \quad (\alpha = const).$

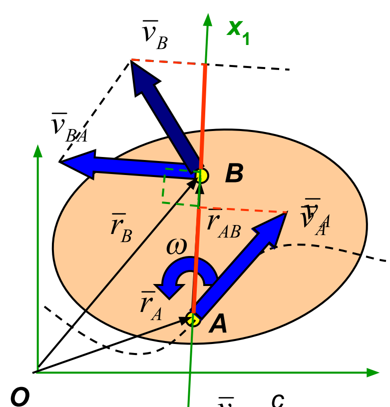
Отсюда следует, что **угловые скорости** двух отрезков **равны**: $\omega_{CA} = \omega_{DB}.$

После повторного дифференцирования следует, что **угловые ускорения** двух отрезков также **равны**: $\dfrac{d\omega_{CA}}{dt} = \dfrac{d\omega_{DB}}{dt}. \quad \varepsilon_{CA} = \varepsilon_{DB}.$

Таким образом, угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры не зависят от выбора полюса и их можно представить в виде векторов, перпендикулярных плоскости фигуры:



- **Теорема о сложении скоростей – Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скоростей полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.**



Радиусы-векторы точек *A* и *B* связаны между собой соотношением:

$$\bar{r}_B(t) = \bar{r}_A(t) + \bar{r}_{AB}(t).$$

Продифференцируем это соотношение:

$$\frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AB}(t)}{dt}.$$

$$\bar{v}_B(t) \qquad \bar{v}_A(t) \qquad \bar{v}_{BA}(t)$$

Второе слагаемое есть вращательная скорость точки *B* вокруг полюса *A*:

$$\bar{v}_{BA}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{r}_{AB}(t); \qquad |\bar{r}_{AB}| = const.$$

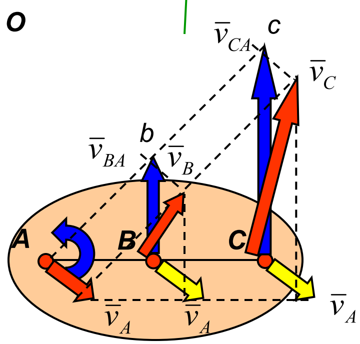
Таким образом, скорость точки *B* равна геометрической сумме скорости полюса *A* и вращательной скорости точки *B* вокруг полюса :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB} = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

- **Следствие 1 – Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки равны .**

Спроецируем векторное соотношение на ось x_1: $\quad (x_1): \quad v_{Bx1} = v_{Ax1}, \quad (\bar{v}_{BA} \perp x_1).$

- **Следствие 2 – Концы векторов скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на отрезки пропорциональные расстояниям между точками.**



Концы векторов вращательных скоростей точек *B* и *A* лежат на одной прямой и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

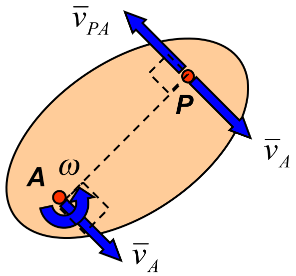
$$v_{BA} = \omega AB, \qquad v_{CA} = \omega AC, \qquad \frac{v_{CA}}{v_{BA}} = \frac{AC}{AB} = \frac{Ac}{Ab}.$$

Концы векторов скоростей полюса *A* лежат, изображенных в точках *B* и *C* также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов скоростей точек *B* и *C* также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками:

Лекция 3 (продолжение 3.1)

- **Мгновенный центр скоростей (МЦС) – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю.**



Пусть известна скорость одной из точек фигуры и угловая скорость вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для скорости некоторой точки *P* согласно теоремы о сложении скоростей:

$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AP} = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}$. Зададим значение скорости этой точки *P* равной нулю: $\bar{v}_P = 0.$

Тогда получаем: $\bar{v}_{PA} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{AP} = -\bar{v}_A$. Т.е. вращательная скорость искомой точки должна быть равна по модулю скорости точки А, параллельна этой скорости и направлена в противоположную сторону.

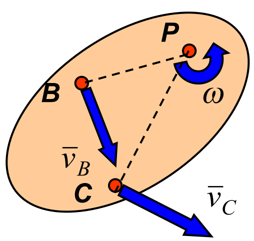
Это позволяет найти положение МЦС (точки *P)*, а именно: МЦС должен находиться на перпендикуляре к скорости точки *A,* отложенном в сторону угловой скорости, на расстоянии:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Если положение МЦС найдено, скорость любой точки плоской фигуры может быть легко определена посредством выбора полюса в МСЦ . В этом случае векторное выражение теоремы о сложении скоростей вырождается в известную зависимость скорости от расстояния до центра вращения:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PB} = \bar{v}_{BP}; \quad (\bar{v}_P = 0); \quad v_B = \omega \cdot BP;$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r}_{PC} = \bar{v}_{CP}; \quad (\bar{v}_P = 0); \quad v_C = \omega \cdot CP;$$



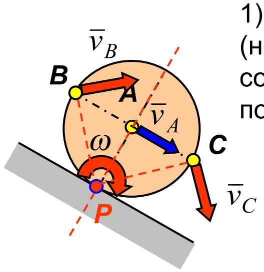
Другими словами, можно утверждать, что **в любой момент времени тело не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС**.

Лекция 3 (продолжение – 3.2)

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры –** Поскольку при движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка (МЦС), жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю, то при определении скоростей эту точку и следует выбирать в качестве полюса, играющего роль центра вращения в данный момент времени.
- Ниже рассмотрим процедуру определения скоростей на примерах:

1

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, положения точек *A*, *B*, *C*, проскальзывание отсутствует.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$ (нет проскальзывания и точка с нулевой скоростью совпадает с точкой контакта колеса и неподвижной поверхностью качения).

2) Определяем угловую скорость: $\omega = \dfrac{v_A}{AP}$.

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону вектора линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

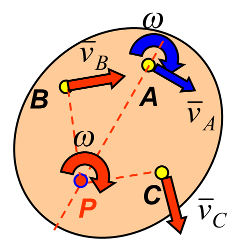
3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$v_B = \omega \cdot BP;$$
$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

2

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{\omega}$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$

2) Определяем расстояние до МЦС: $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$.

Расстояние *AP* откладываем в сторону дуговой стрелки угловой скорости. Дуговую стрелку угловой скорости изображаем вокруг МЦС.

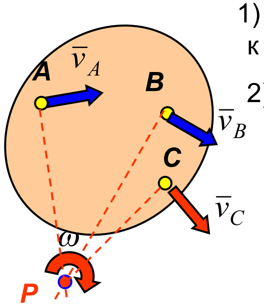
3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$v_B = \omega \cdot BP;$$
$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

3

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$,

2) Определяем угловую скорость: $\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}$.

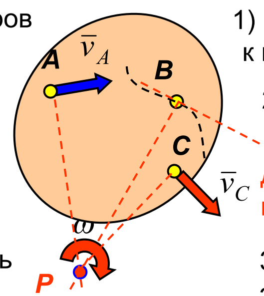
Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $v_C = \omega \cdot CP$.

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

4

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, траектория точки *B*, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$,



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к вектору $\boldsymbol{v}_A$ и касательной к траектории точки *B*.

2) Определяем угловую скорость: $\omega = \dfrac{v_A}{AP}$.

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

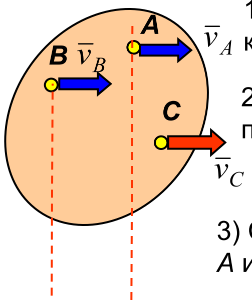
3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $v_C = \omega \cdot CP$.

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

Лекция 3 (продолжение 3.3)

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры**

5 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эта точка находится в бесконечности.

2) Угловая скорость обращается в нуль (мгновенно поступательное движение):

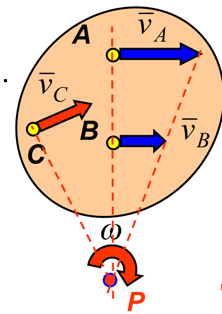
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

3) Скорость точки *C* равна геометрически скоростям точек *A* и *B*:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A = \bar{v}_B.$$

Вектор скорости точки *C* направлен параллельно векторам скоростей точек *A* и *B* (в ту же сторону).

6 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эти перпендикуляры сливаются в одну линию.

2) Определяем положение МЦС (проводим линию через концы векторов $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$) и угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

- **Теорема о сложении ускорений – Ускорение любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки вокруг полюса.**

Скорости точек *A* и *B* связаны между собой соотношением:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_A + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}).$$

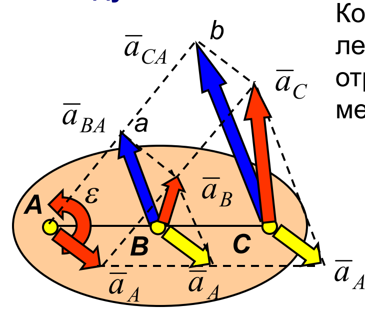
Второе слагаемое дифференцируем как произведение двух функций:

$$\frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}.$$

Получили сумму вращательного и осестремительного ускорений рассматриваемой точки относительно полюса. Таким образом, ускорение точки плоской фигуры:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\text{вр}} + \bar{a}_{BA}^{\text{ос}} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

- **Следствие – Концы векторов ускорений точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, пропорциональные расстояниям между точками.**



Концы векторов ускорений точек $\boldsymbol{a}_{BA}$ и $\boldsymbol{a}_{CA}$ лежат на одной прямой *Abc* и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, AB,$$

$$a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, AC.$$

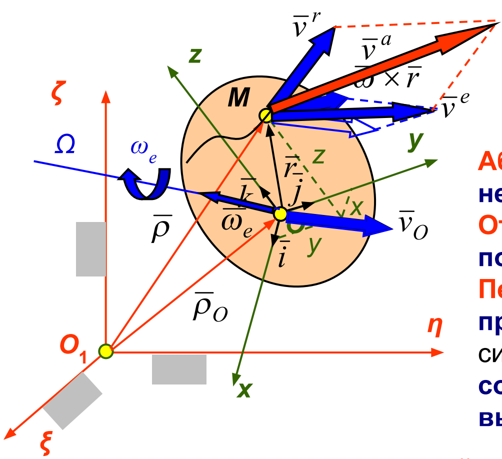
Концы векторов ускорений полюса *A*, изображенных в точках *B* и *C*, лежат также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов суммарных ускорений точек *B* и *C* также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.

- **Сложное движение точки – такое движение, при котором точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях.**

Примеры сложного движения точки (тела): лодка, переплывающая реку; человек, идущий по движущемуся эскалатору; камень подвижной кулисы, поршень качающегося цилиндра; шары центробежного регулятора Уатта.

Для описания сложного движения точки или для представления движения в виде сложного используются **неподвижная система отсчета $O_1\xi\eta\zeta$,** связанная с каким-либо условно неподвижным телом, например, с Землей, и **подвижная система отсчета $Oxyz$,** связанная с каким-либо движущимся телом.



Абсолютное движение (a) - движение **точки**, рассматриваемое относительно **неподвижной** системы отсчета. **Относительное движение (r)** - движение **точки**, рассматриваемое относительно **подвижной** системы отсчета.

Переносное движение (e) - движение **подвижной системы отсчета**, рассматриваемое относительно **неподвижной системы отсчета**.

Абсолютная скорость (ускорение) **точки v^a** (a^a) - **скорость** (ускорение) точки, **вычисленная** относительно **неподвижной** системы отсчета.

Относительная скорость (ускорение) **точки v^r** (a^r) – **скорость** (ускорение) точки, **вычисленная** относительно **подвижной** системы отсчета.

Переносная скорость (ускорение) **точки v^e** (a^e) – **скорость** (ускорение) точки, **принадлежащей** подвижной системе координат или твердому телу, с которым жестко связана подвижная система координат, **совпадающей** с рассматриваемой движущейся точкой в данный момент времени и **вычисленная** относительно **неподвижной системы отсчета**.

Теорема о сложении скоростей – абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей точки.

В любой момент времени справедливо соотношение:

$$\bar\rho = \bar\rho_O + \bar r = \bar\rho_O + x\bar i + y\bar j + z\bar k.$$

Продифференцируем это соотношение по времени имея в виду, орты ***i***, ***j***, ***k*** изменяют свое направление в общем случае движения свободного тела, с которым связана подвижная система координат:

$$\frac{d\bar\rho}{dt} = \frac{d\bar\rho_O}{dt} + \frac{d\bar r}{dt} = \underbrace{\boxed{\frac{d\bar\rho_O}{dt}}}_{\bar v_O} + \underbrace{\boxed{\frac{dx}{dt}\bar i + \frac{dy}{dt}\bar j + \frac{dz}{dt}\bar k}}_{\bar v^r} + \boxed{x\frac{d\bar i}{dt} + y\frac{d\bar j}{dt} + z\frac{d\bar k}{dt}}.$$

Здесь первое слагаемое (***v*$_O$**) - скорость полюса *O*; следующие три – **относительная скорость точки (*v*^{r}).**

Для последних трех слагаемых следует определить производные по времени от ортов ***i***, ***j***, ***k***:

$$\frac{d\bar i}{dt} = (\bar\omega_e \times \bar i);$$

Подставим векторные произведения в последние три слагаемые:

$$x(\bar\omega_e \times \bar i) + y(\bar\omega_e \times \bar j) + z(\bar\omega_e \times \bar k) = \\ = \bar\omega_e \times (x\bar i + y\bar j + z\bar k) = \boxed{\bar\omega_e \times \bar r}.$$

Сумма первого и последнего слагаемого – скорость точки свободного тела есть **переносная скорость точки (*v*^{e})**:

$$\bar v^e = \bar v_O + \bar\omega_e \times \bar r.$$

Таким образом, с учетом того, что производная по времени радиуса-вектора ***ρ*** есть абсолютная скорость, получаем:

$$\bar v^a = \bar v^r + \bar v^e.$$

Модуль вектора абсолютной скорости:

$$|\bar v^a| = \sqrt{|\bar v^r|^2 + |\bar v^e|^2 + 2|\bar v^r||\bar v^e|\sin(\bar v^r, \bar v^e)}.$$

Лекция 3 (продолжение 3.5)

- **Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) – абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений точки.**

Было получено ранее соотношение для скорости:

$$\frac{d\bar\rho}{dt}=\frac{d\bar\rho_O}{dt}+\dot x\bar i+\dot y\bar j+\dot z\bar k+x\frac{d\bar i}{dt}+y\frac{d\bar j}{dt}+z\frac{d\bar k}{dt}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени еще раз:

$$\frac{d^2\bar\rho}{dt^2}=\underbrace{\boxed{\frac{d^2\bar\rho_O}{dt^2}}}_{\bar a_O}+\underbrace{\boxed{\ddot x\bar i+\ddot y\bar j+\ddot z\bar k}}_{\bar a^r}+\underbrace{\boxed{\dot x\frac{d\bar i}{dt}+\dot y\frac{d\bar j}{dt}+\dot z\frac{d\bar k}{dt}+\dot x\frac{d\bar i}{dt}+\dot y\frac{d\bar j}{dt}+\dot z\frac{d\bar k}{dt}}}_{\bar a^c}+\boxed{x\frac{d^2\bar i}{dt^2}+y\frac{d^2\bar j}{dt^2}+z\frac{d^2\bar k}{dt^2}}.$$

Здесь первое слагаемое (a_O) - ускорение полюса O; следующие три – **относительное ускорение точки (a^r).**

Для последних трех слагаемых следует определить вторые производные по времени от ортов подвижной системы координат ***i***, ***j***, ***k***:

$$\frac{d^2\bar i}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar\omega_e\times\bar i)=\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar i+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar i);$$

$$\frac{d^2\bar j}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar\omega_e\times\bar j)=\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar j+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar j);$$

$$\frac{d^2\bar k}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar\omega_e\times\bar k)=\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar k+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar k).$$

Подставим эти выражения в последние три слагаемые и сгруппируем:

$$\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times x\bar i+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times x\bar i)+$$
$$+\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times y\bar j+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times y\bar j)+$$
$$+\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times z\bar k+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times z\bar k)=$$
$$=\boxed{\bar\varepsilon_e\times\bar r+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar r)}.$$

Сумма первого и полученных двух слагаемых – ускорение точки свободного тела есть **переносное ускорение точки (a^e)**:

$$\bar a^e=\bar a_O+\bar\varepsilon_e\times\bar r+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar r).$$

В оставшихся шести слагаемых сложим одинаковые члены, подставим векторные произведения для первых производных по времени от ортов и сгруппируем:

$$2\left[\dot x\frac{d\bar i}{dt}+\dot y\frac{d\bar j}{dt}+\dot z\frac{d\bar k}{dt}\right]=2\left[\dot x(\bar\omega_e\times\bar i)+\dot y(\bar\omega_e\times\bar j)+\dot z(\bar\omega_e\times\bar k)\right]=\boxed{2(\bar\omega_e\times\bar v^r)}.$$

Полученная компонента ускорения представляет собой **кориолисово ускорение (a^c)**:

$$\bar a^c=2(\bar\omega_e\times\bar v^r).$$

Таким образом, с учетом того, что вторая производная по времени радиуса-вектора ***ρ*** есть абсолютное ускорение, получаем:

$$\bar a^a=\bar a^r+\bar a^e+\bar a^c.$$

- **Величина и направление ускорения Кориолиса:**

Модуль вектора кориолисова ускорения:

$$\left|\bar a^c\right|=2\omega_e v^r\sin(\bar\omega_e,\bar v^r).$$

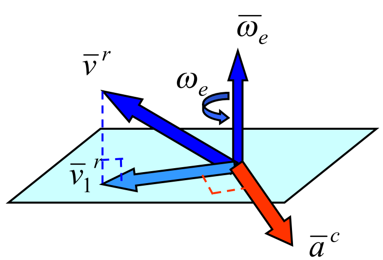
Ускорение Кориолиса обращается в ноль в двух случаях:

1. Угловая скорость переносного движения равна 0 (поступательное переносное движение).
2. Вектор угловой скорости параллелен вектору относительной скорости (синус угла между векторами обращается в 0).

Направление вектора кориолисова ускорения:

Определяется по одному из трех правил:

1. По определению векторного произведения .
2. По правилу правой руки .
3. **По правилу Жуковского**:



а) Спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости.

б) Повернуть проекцию вектора относительной скорости на прямой угол в сторону дуговой стрелки угловой скорости.