

*РГГУ, МГУ, Москва, 2012-2013-2014. 01 - 07.03.2013.  
МФТИ 2013-2014.*

# **Этюд 2**

## **Кинематика роботов**

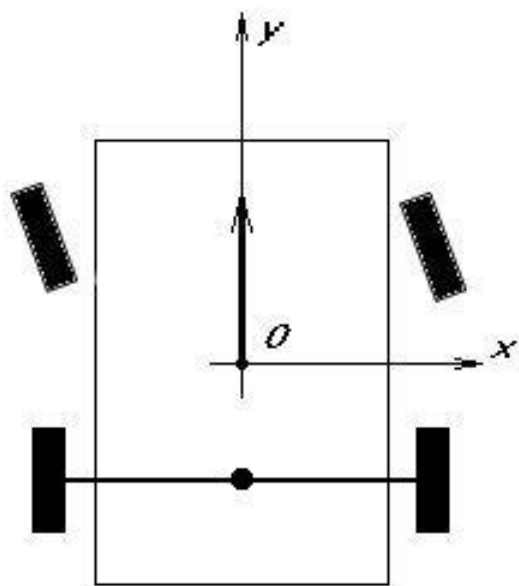
**В.Е.Павловский**

**Часть 1. Кинематика роботов.  
Кинематические схемы.**

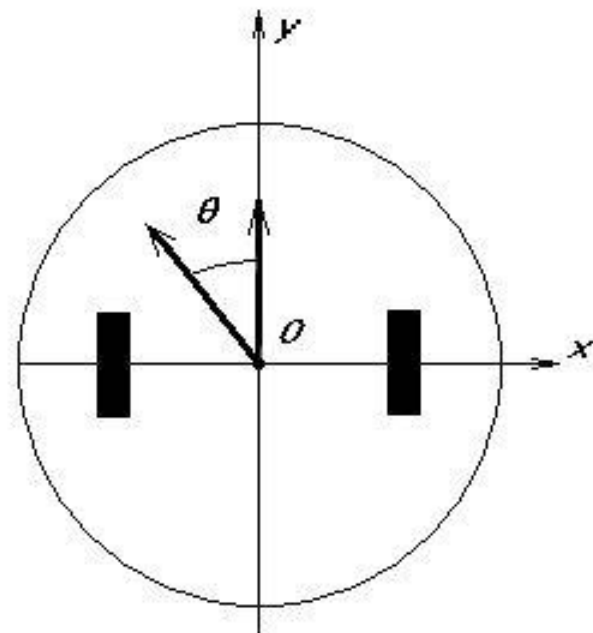
Как выбрать кинематику мобильного робота ?



Колеса ...



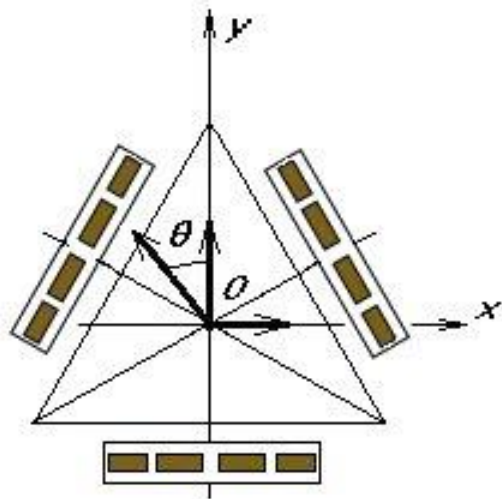
$MF = [y]$   $WD = [1,2,4]$   
 $T = [carlike]$



$MF = [y, \theta]$   $WD = [2,2,2]$   
 $T = [diff]$

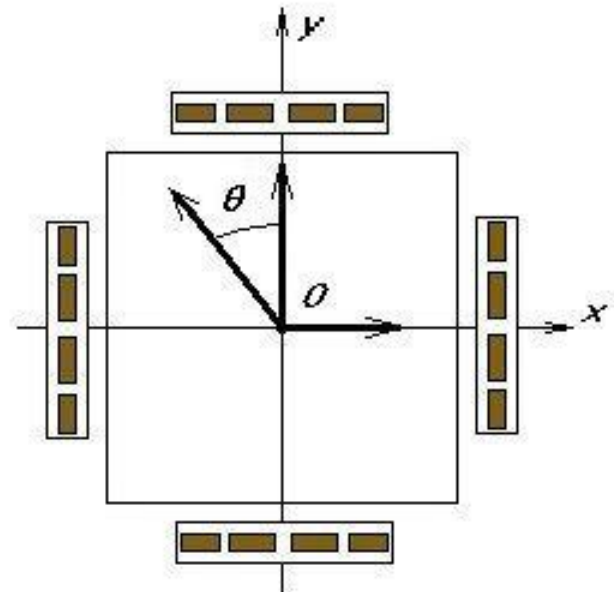
Рис.1. Формула "car\_like" (автомобильная).

Рис.2. Формула "differential drive".



$$MF = [x, y, \theta] \quad WD = [3, 3, 3]$$

$$T = \{omnitriangle\}$$



$$MF = [x, y, \theta] \quad WD = [3, 4, 4]$$

$$T = \{omniquad\}$$

Рис.3. Формула "omni\_triangle".

Рис.4. Формула "omni\_quad".

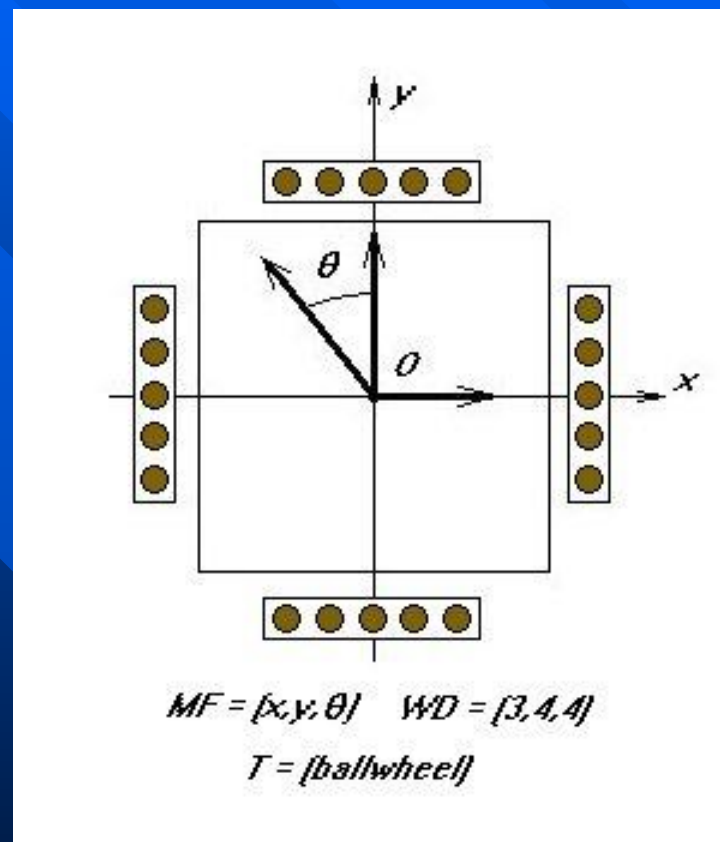
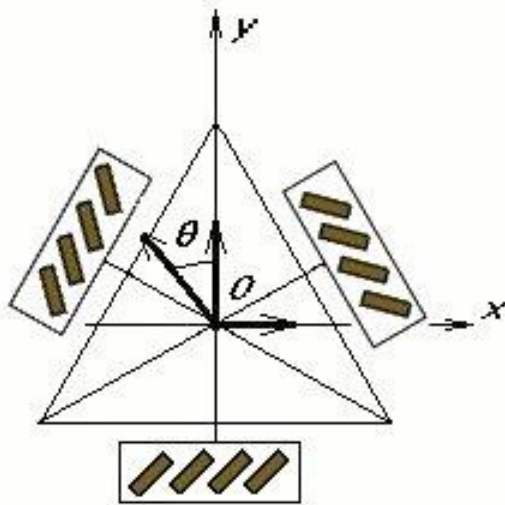
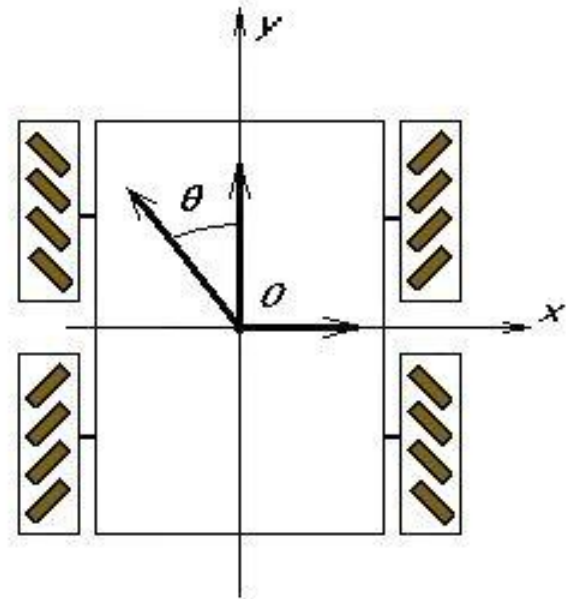


Рис.5. Формула "ball\_wheel".



$MF = [x, y, \theta]$   $WD = [3, 3, 3]$   
*T = [mecanumtriangle] Top View*

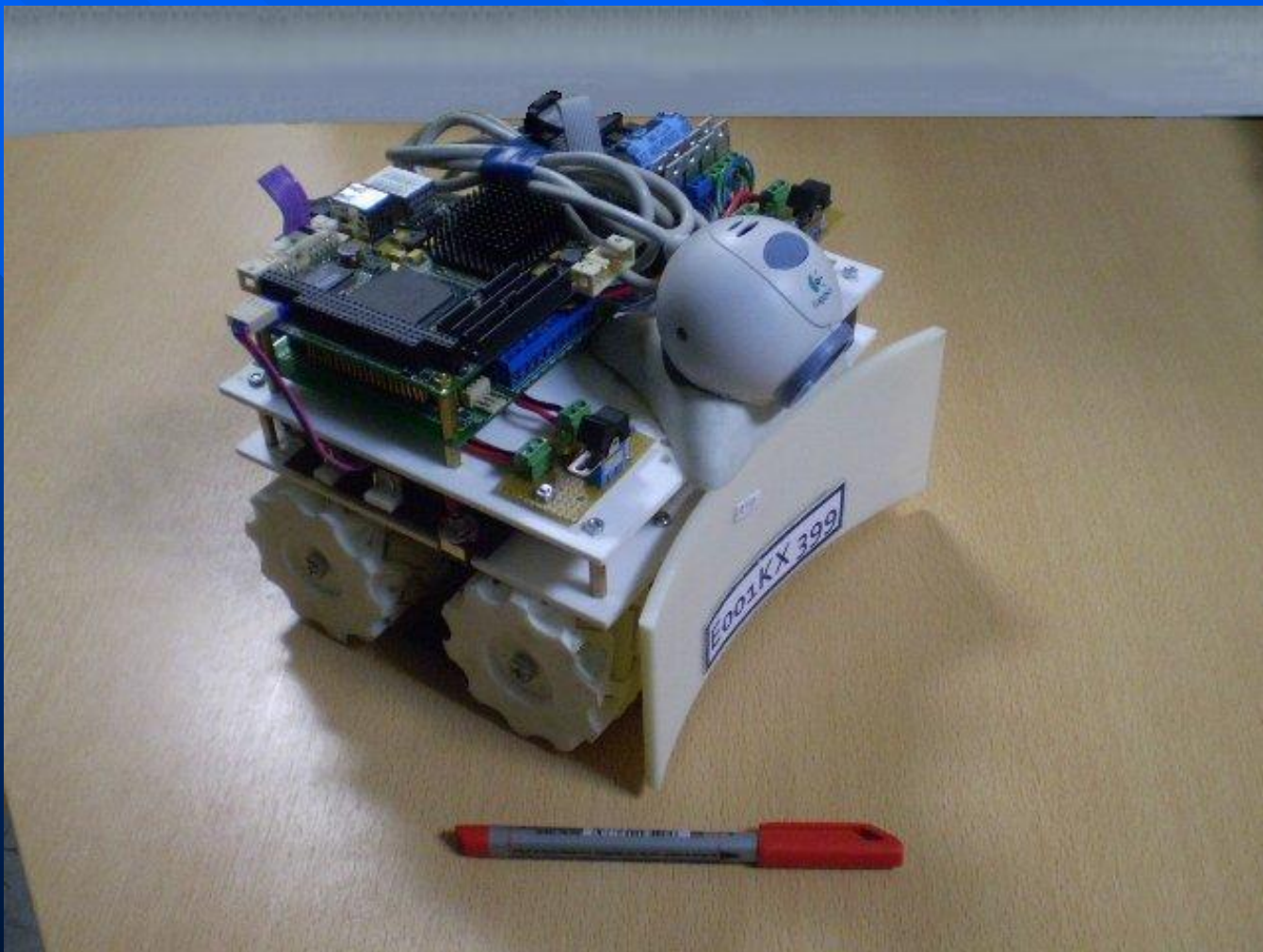
Рис.6. Формула "mecanum\_triangle".



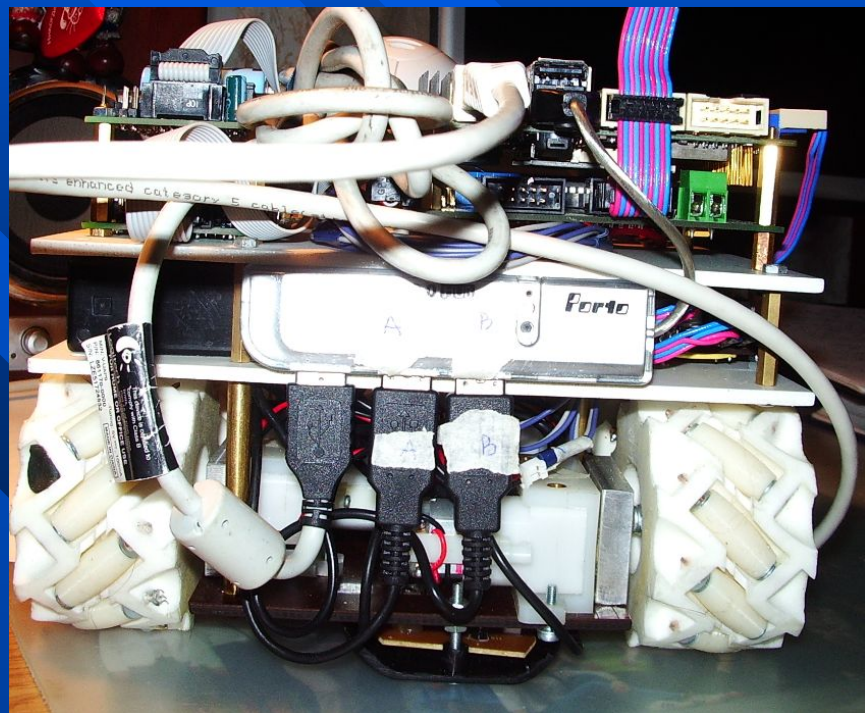
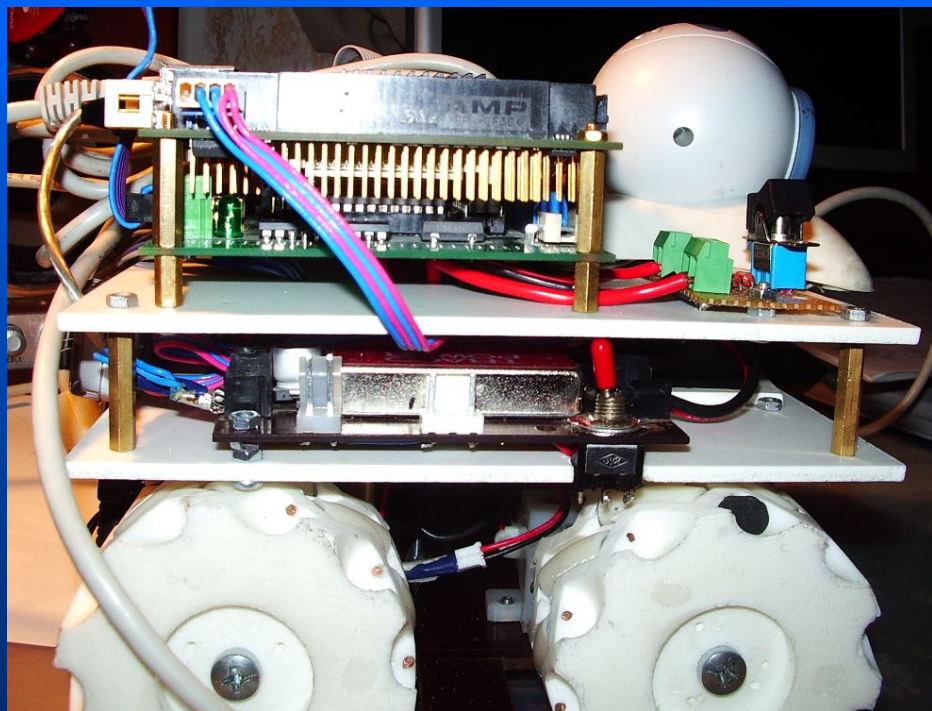
$MF = [x, y, \theta]$   $WD = [3, 4, 4]$   
*T = [mecanumquad] Top View*

Рис.7. Формула "mecanum\_quad".

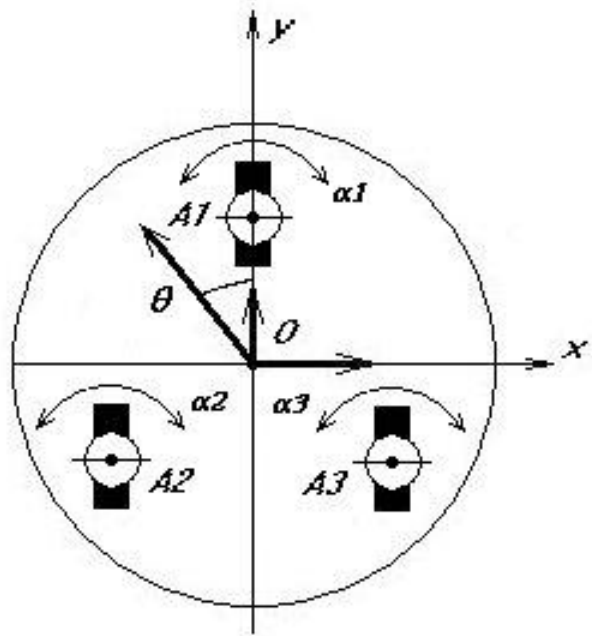




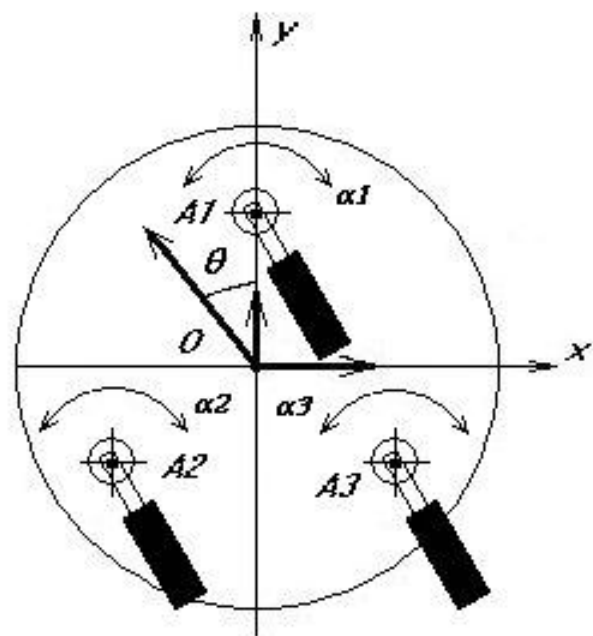
ОМНИБОТ



ОМНИБОТ



$MF = [x, y, \theta]$   $WD = [3, 6, 3]$   
*T = [powerwheel]*



$MF = [x, y, \theta]$   $WD = [3, 6, 3]$   
*T = [castorwheel]*

Рис.8. Формула "powered\_wheel".

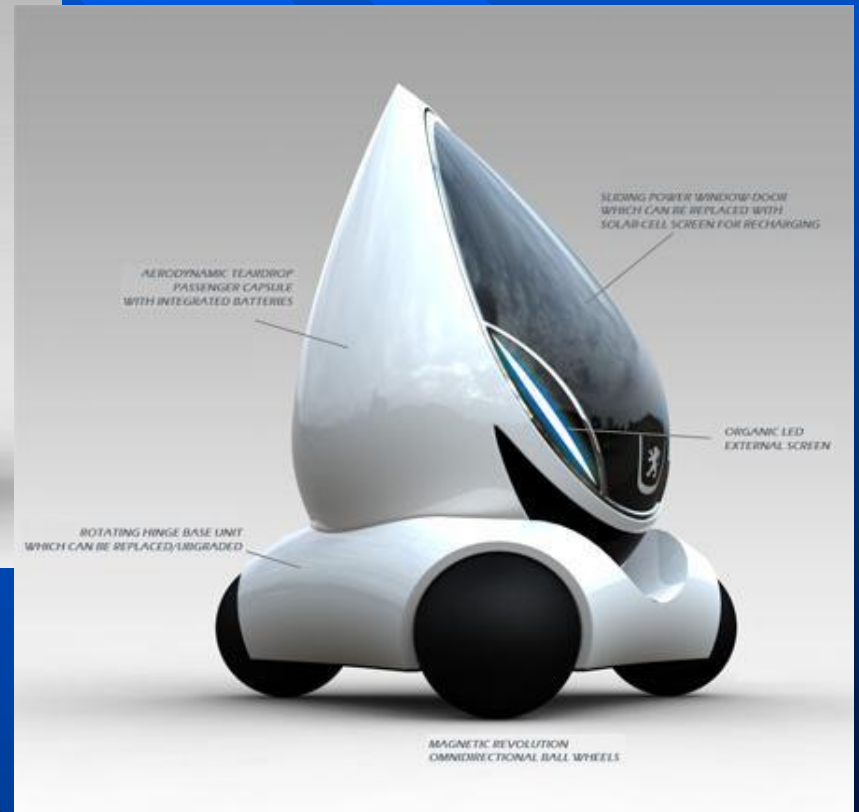
Рис.9. Формула "castor\_wheel".

# Сферороботы





Робот-шар Sphero (Россия).



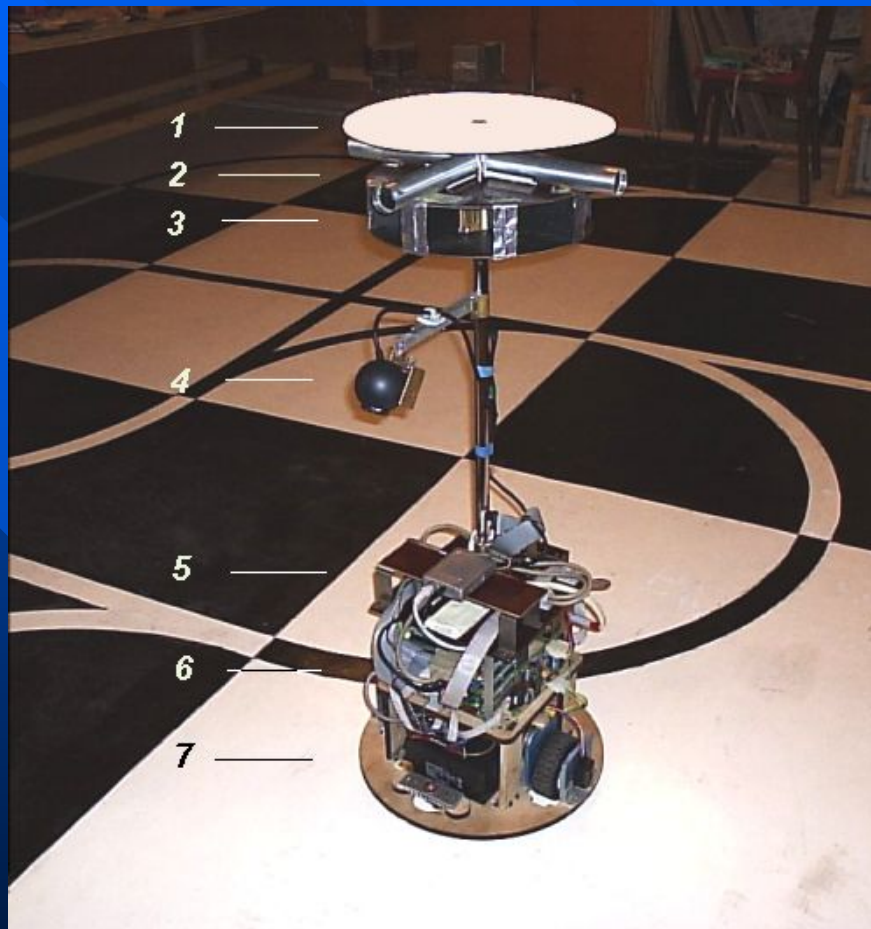
Tear Drop of Peugeot (MoVillE).



MotoBall. Университет Сан-Хосе, США.

**Часть 2. Кинематика роботов.  
Робот с дифференциальным приводом.**



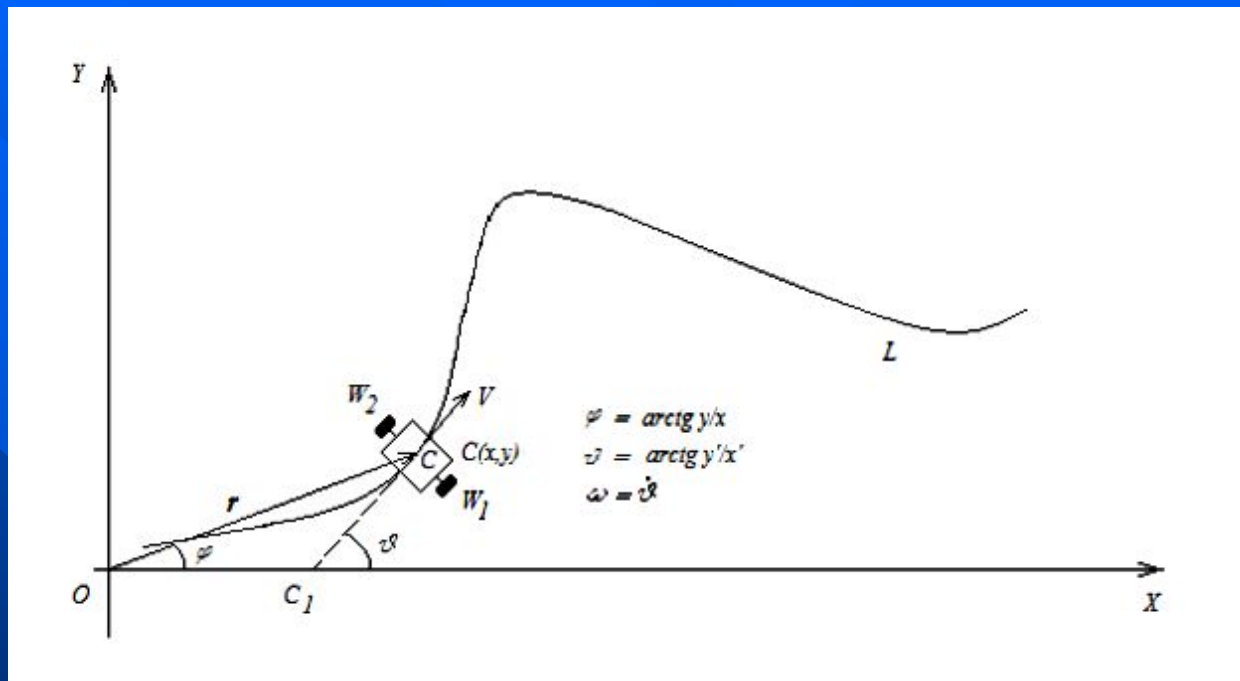


Робот с дифференциальным пиводом – «Аргонавт-3».



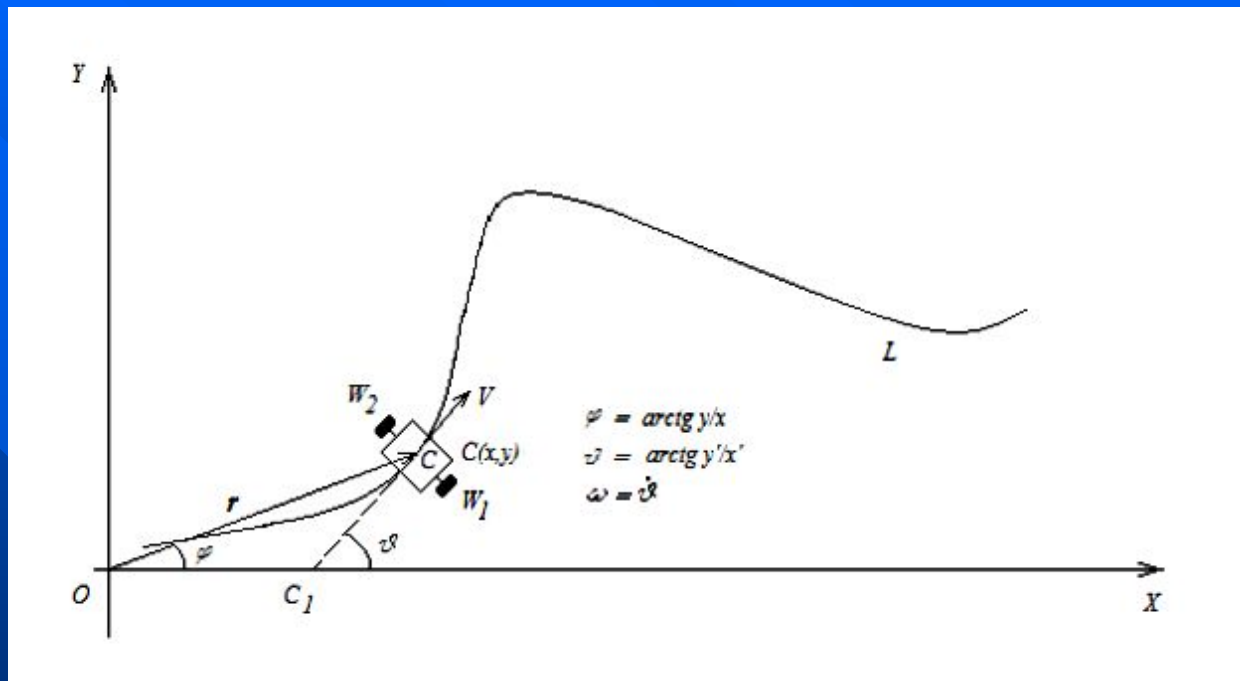
Робот с дифференциальным приводом – IE-ROBOT.

# Кинематические связи.



*Кинематические связи.* Пусть робот с дифференциальным приводом совершает плоскопараллельное движение и движется по заданной траектории  $L$  как на рис. , кривая  $L$  - плоская. Введем основные кинематические параметры робота. Пусть движение задается в некоторой абсолютной системе отсчета  $OXY$ . Положение робота на траектории  $L$  будем характеризовать координатами  $(x, y)$  точки  $C$  - середины оси колес (пусть именно она движется по  $L$ ), и углом  $\vartheta$ , который составляет продольная ось  $C_1C$  робота, направленная по касательной к  $L$ , с осью абсцисс  $OX$ . Правое и левое по ходу робота колеса обозначим  $W_1, W_2$  соответственно. Колеса одинаковы, их радиусы  $\rho$ , расстояние между колесами  $2a$ . Угловые скорости вращения колес  $\dot{\varphi}_1$  и  $\dot{\varphi}_2$ .

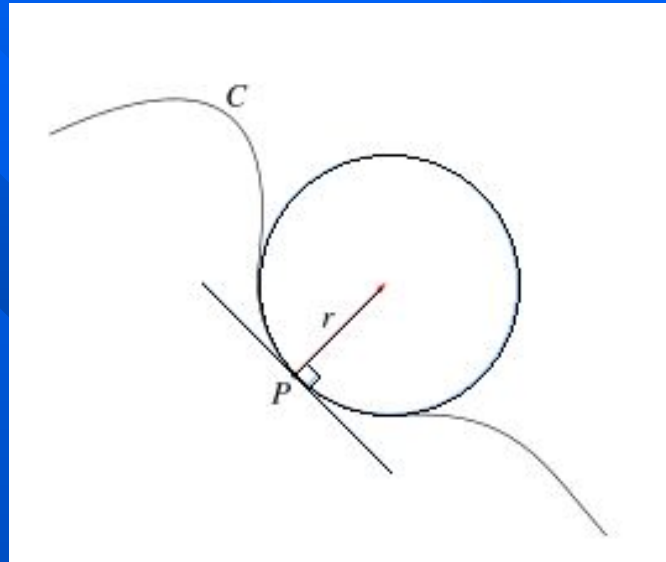
Робот на траектории.



Для дальнейшего понадобится еще дифференциальная характеристика кривой, называемая кривизной  $k$ , для регулярной кривой  $\gamma$  на декартовой плоскости, заданной параметрически  $(x(s), y(s))$  кривизна определяется выражением (1.1а), заданной уравнением  $y = y(x)$ , - выражением (1.1б):

$$\text{а) } k(s) = \frac{|y'_s x''_s - x'_s y''_s|}{(x'^2_s + y'^2_s)^{3/2}}, \quad \text{б) } k(x) = \frac{|y''|}{(\sqrt{1 + y'^2})^3} \quad (1.1)$$

Робот на траектории.



Для того чтобы кривая совпадала с некоторым отрезком прямой или со всей прямой, необходимо и достаточно, чтобы кривизна тождественно равнялась нулю. Величина, обратная кривизне кривой ( $r = 1/k$ ), называется радиусом кривизны, он совпадает с радиусом соприкасающейся окружности (рис.23) в данной точке кривой. Центр этой окружности называется центром кривизны. Если кривизна кривой в точке  $P$  равна нулю, то соприкасающаяся окружность вырождается в прямую. Если кривая - окружность, ее радиус кривизны равен ее радиусу, соприкасающаяся окружность совпадает с ней самой.

Кривизна траектории.



Введем далее параметры  $v, \omega$  - скорость точки  $C$  и угловую скорость робота - и в этих параметрах запишем кинематические уравнения движения робота. Ясно, что

$$\begin{aligned} x' &= v \cos \vartheta, \quad y' = v \sin \vartheta, \quad v = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{y'}{x'}, \\ \omega &= \vartheta', \quad \omega = \left( \arctg \frac{y'}{x'} \right)' = \frac{x'^2}{x'^2 + y'^2} \left( \frac{y'}{x'} \right)' = \frac{y''x' - y'x''}{x'^2 + y'^2} = \text{sign}(y''x' - y'x'')k(s)v, \quad (1.2a) \\ \text{т.е.} \quad \omega &= \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} = \text{sign}(x'y'' - y'x'')k(s)v = \kappa(s)v, \end{aligned}$$

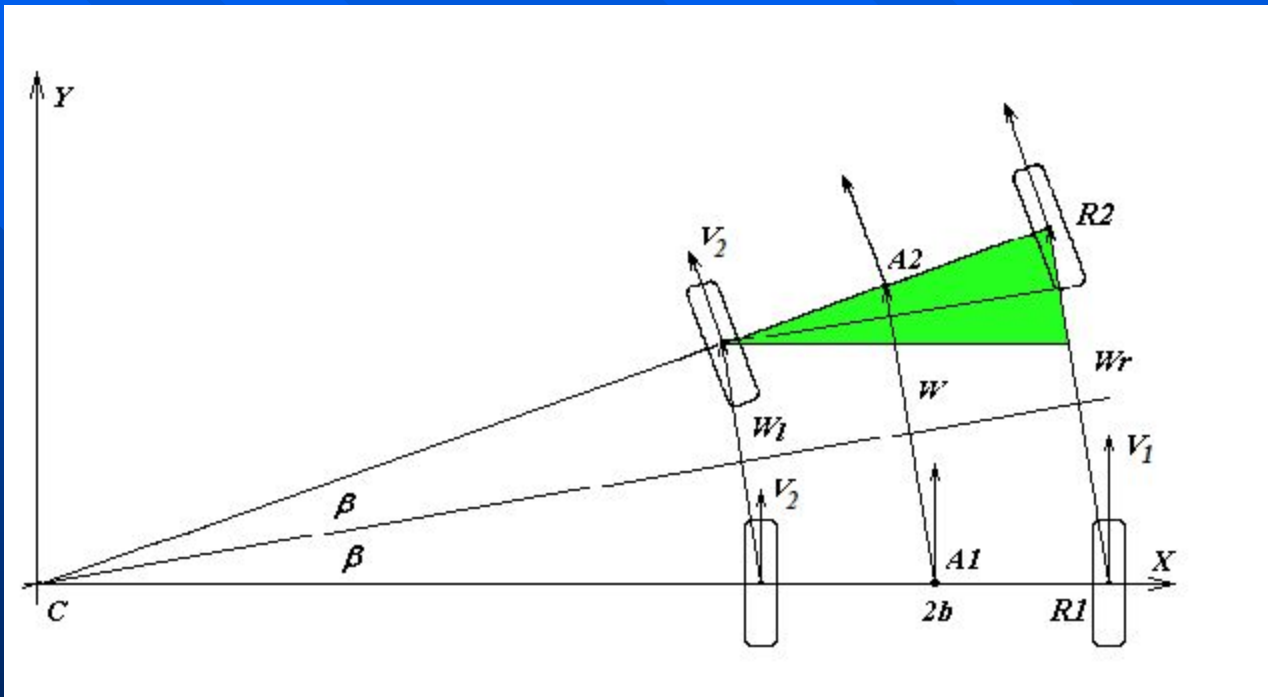
и последняя формула показывает весьма важную связь  $\omega$  и кривизны  $k(s)$ , если  $k(s)$  имеет особенности, особенности будет иметь и  $\omega$ . Здесь также введена  $\kappa(s)$  - ориентированная кривизна траектории со знаком, и ясно, что  $\omega$  фактически является скоростью вращения касательной к траектории.

При задании траектории в полярной системе координат, используя определения  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , нетрудно прямым вычислением последовательно показать, что в этой системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\varphi), \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad v(t) = \sqrt{r'^2 + (r\varphi')^2} \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \frac{ds}{dt} = v(s) \frac{ds}{dt}, \quad (1.2b) \\ \text{т.е.} \quad v(t) &= \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}, \quad v(s) = \sqrt{r'^2 + (r\varphi')^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \end{aligned}$$

и очевидно, что формулы (1.2a) и (1.2b) совпадают в определении скорости  $\mathbf{v}$ .

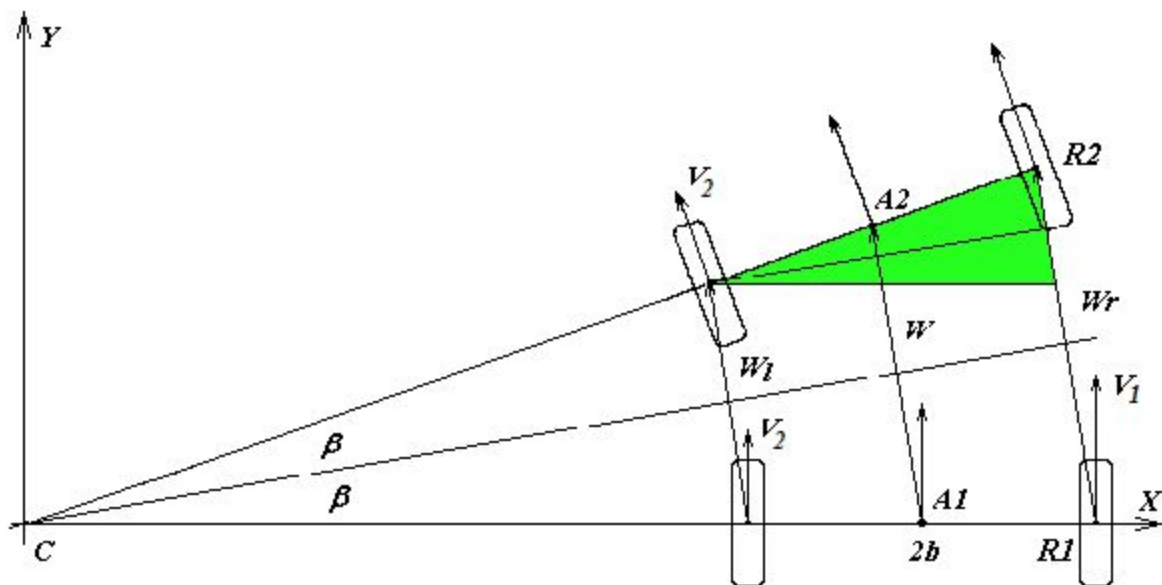
Имея уравнение  $L$ , заданное, например, в параметрическом виде  $\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s)$ , с помощью (1.2a) можно вычислять  $(\mathbf{v}, \omega)$  в движении робота по траектории. При этом при задании кривой наиболее часто используются два варианта:  $s$  - длина дуги траектории (натуральный параметр), или  $s = t$  - время. Параметризацию траектории  $L$  временем  $t$  с условием (1.2a) - (1.2b) будем называть законом движения робота.



Расчет элементарного перемещения и поворота.

Кинематика робота с дифференциальным приводом.



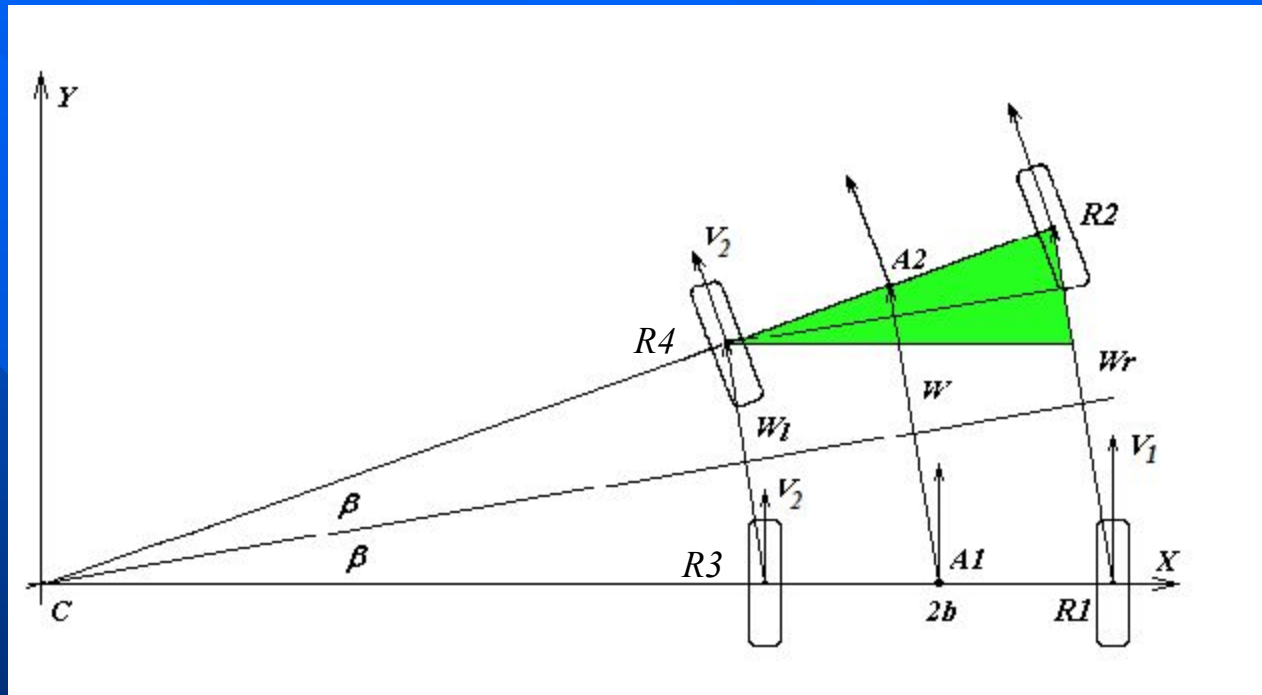


Выпишем кинематическую связь  $(v, \omega)$  с другими параметрами робота. Рассмотрим рис. Пусть  $w_r = w_1$  и  $w_l = w_2$  - малые (элементарные) перемещения центров колес  $(R1, R2)$  и  $(R3, R4)$  за время  $dt$ , при этих перемещениях середина оси колес переходит на малое перемещение  $w$  из  $A1$  в  $A2$ . Очевидно, рассматривая трапецию  $R1, R2, R3, R4$  можно записать (знаки равенства следует понимать как приближенное равенство малых величин):

$$w_1 = v_1 \cdot dt = \rho \dot{\varphi}_1 dt, \quad w_2 = v_2 \cdot dt = \rho \dot{\varphi}_2 dt,$$

$$w = v \cdot dt = \frac{w_1 + w_2}{2} = \rho \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} dt$$

Кинематика робота с дифференциальным приводом.



и аналогично, рассматривая закрашенный треугольник на рис.24, получим

$$\sin \beta = \frac{w_1 - w_2}{2 \cdot 2a}, \quad \text{и при } \beta \ll 1 \quad \beta = \frac{w_1 - w_2}{4a}$$

$$\omega \cdot dt = 2\beta = \frac{\rho \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2}{a} dt.$$

Кинематика робота с дифференциальным приводом.



$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = 2\pi\rho \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

и в этих формулах  $2a$  можно заменять равной ей величиной  $b = 2a$  - расстоянием между колесами робота. Введя очевидное обозначение  $A$  для матрицы уравнения (1.4), его можно переписать:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \rho A \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = 2\pi\rho A \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) или (1.5) выражают прямую кинематическую задачу для робота. Инвертировав эти уравнения, получим обратную кинематическую задачу:

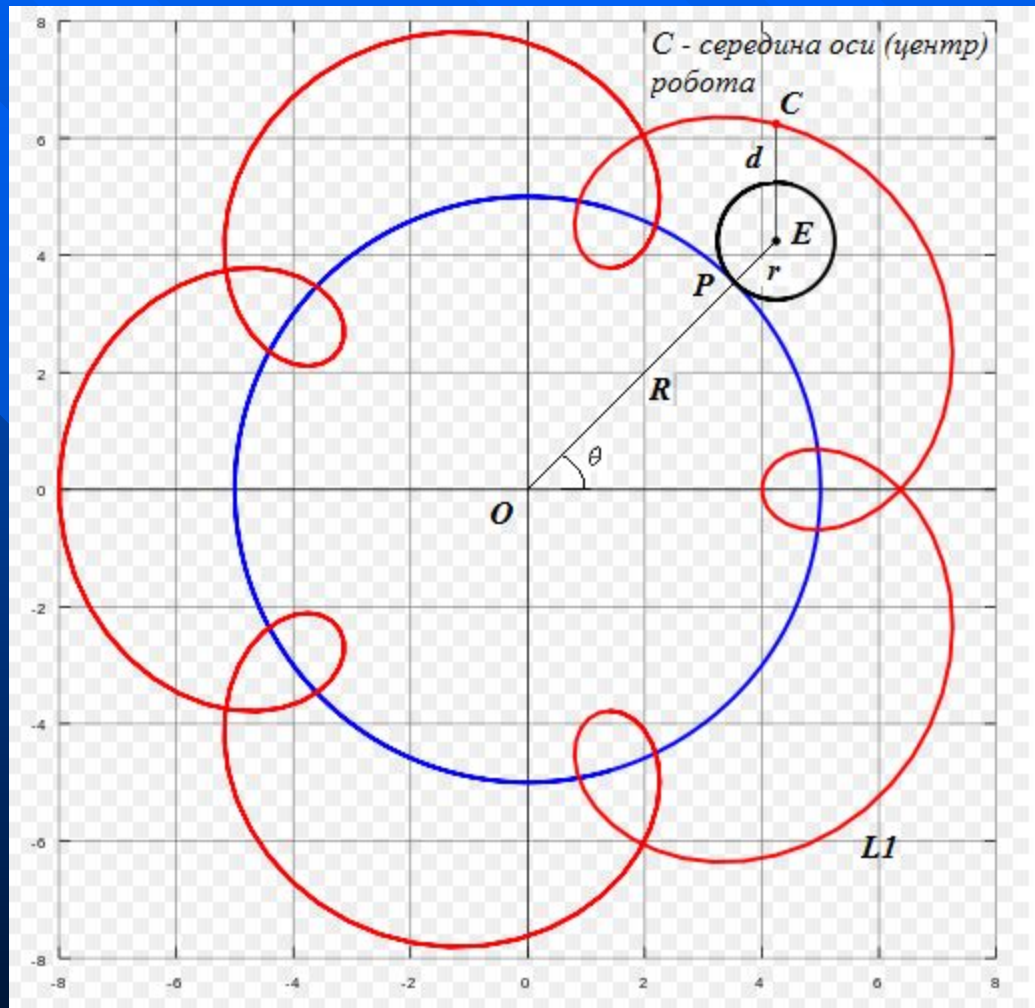
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} A^{-1} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\rho} A^{-1} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

или

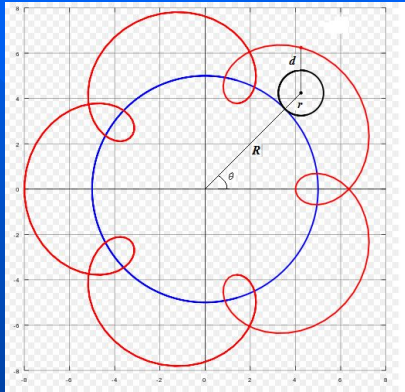
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\rho} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Имея уравнения (1.7) по известным функциям  $v(s), \omega(s)$  можно вычислить необходимые скорости вращения колес  $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$  (или  $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ ), реализующие это движение.

# Кинематическое управление.



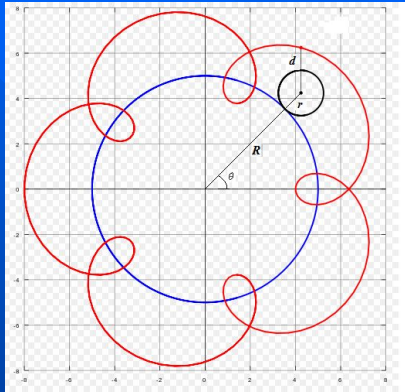
Кинематика робота – движение по эпитрохоиде. Циклоидальные кривые.



Параметрические уравнения эпитроихиды имеют вид (1.8):

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - d \cos \left( \frac{R + r}{r} \theta \right) \\ y = (R + r) \sin \theta - d \sin \left( \frac{R + r}{r} \theta \right) \\ \theta = \lambda t \end{cases} \quad (1.8)$$

Кинематика робота – движение по эпитроихиде.



Рассмотрим первый случай (т.е.  $\lambda \equiv 1$ ). Найдём производные (скорости)  $x'_\theta, y'_\theta$ :

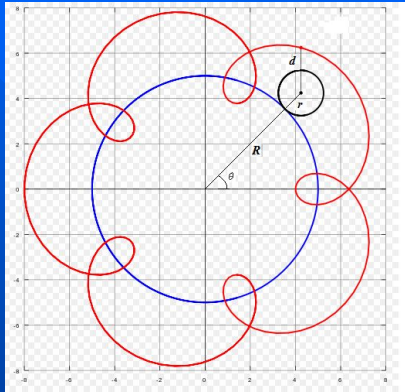
$$\begin{cases} x'_\theta = (R+r) \left[ -\sin \theta + \frac{d}{r} \sin \left( \frac{R+r}{r} \theta \right) \right] \\ y'_\theta = (R+r) \left[ \cos \theta - \frac{d}{r} \cos \left( \frac{R+r}{r} \theta \right) \right], \end{cases} \quad (1.9)$$

и вторые производные  $x''_\theta, y''_\theta$ :

$$\begin{cases} x''_\theta = (R+r) \left[ -\cos \theta + \frac{d(R+r)}{r} \cos \left( \frac{R+r}{r} \theta \right) \right] \\ y''_\theta = (R+r) \left[ -\sin \theta + \frac{d(R+r)}{r} \sin \left( \frac{R+r}{r} \theta \right) \right]. \end{cases} \quad (1.10)$$

Кинематика робота – движение по эпитрохоиде.

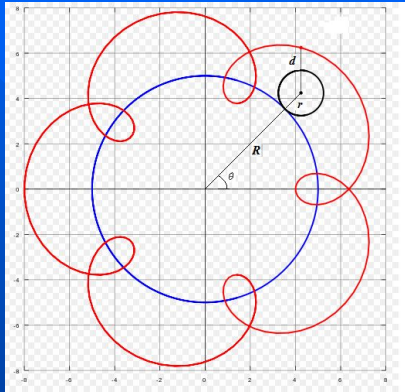




и упростим эти соотношения с помощью формул приведения для косинуса разности углов:

$$\begin{cases} v(\theta) = (R+r) \sqrt{\left[ \frac{d^2+r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]} \\ \omega(\theta) = \frac{\left[ \frac{(R+r)d^2+r^3}{r^3} - \frac{(R+2r)d}{r^2} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]}{\left[ \frac{d^2+r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]}, \end{cases} \quad (1.11)$$

Кинематика робота – движение по эпитрохоиде.



а отсюда найдем  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 = \frac{R+r}{\rho} \sqrt{\left[ \frac{d^2+r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]} + \frac{a}{\rho} \frac{\left[ \frac{(R+r)d^2+r^3}{r^3} - \frac{(R+2r)d}{r^2} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]}{\left[ \frac{d^2+r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]} \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{R+r}{\rho} \sqrt{\left[ \frac{d^2+r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]} - \frac{a}{\rho} \frac{\left[ \frac{(R+r)d^2+r^3}{r^3} - \frac{(R+2r)d}{r^2} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]}{\left[ \frac{d^2+r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Нетрудно заметить, что подкоренное выражение в (1.11), (1.12) всегда строго положительно, числитель в формуле для  $\omega(\theta)$  также положителен, т.е. функции скоростей робота  $v(\theta), \omega(\theta)$  существуют и положительны во всем диапазоне изменения  $\theta$ .

Кинематика робота – движение по эпитрохоиде.

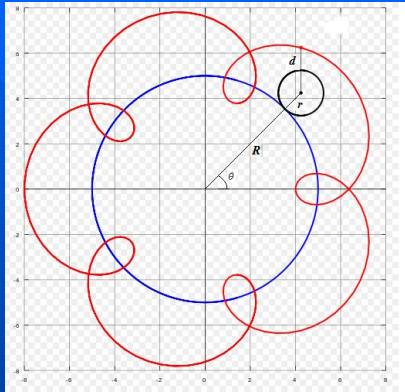
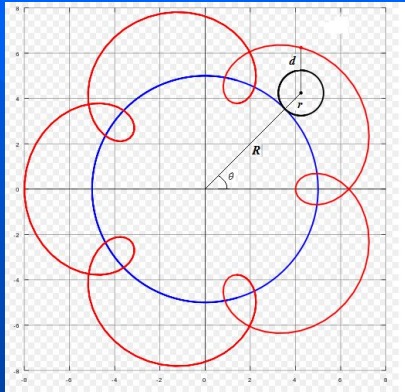


Рис. 26: Скорость и угловая скорость робота на эпитрохоиде.

Приведем графики полученных функций. На рис.26 численно с шагом 0.1 сек построены графики скорости и угловой скорости  $v(\theta), \omega(\theta)$  (1.11) при движении по эпитрохоиде. На рис.27 - графики угловых скоростей вращения колес  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  (1.12). Графики построены для значений  $R = 5, r = 1, d = 2, a = 0.5, \rho = 0.2$  (все величины здесь в метрах). Важно подчеркнуть, что, как показывают соотношения (1.11), (1.12), все рассмотренные функции являются гладкими, непрерывными.

Кинематика робота – движение по эпитрохоиде. Графики.



Можно также по графикам

оценить, что полученные функции изменяются в диапазонах:

$$\begin{aligned}
 &6 \leq v \leq 18 \text{ м/сек}, \quad 4.3 \leq \omega \leq 11 \text{ рад/сек}, \\
 &57.2 \leq \dot{\varphi}_1 \leq 100.7 \text{ рад/сек}, \quad 2.5 \leq \dot{\varphi}_2 \leq 80 \text{ рад/сек}, \\
 &\text{и также} \quad 9.1 \leq \dot{\phi}_1 \leq 16.0 \text{ об/сек}, \quad 0.4 \leq \dot{\phi}_2 \leq 12.7 \text{ об/сек}.
 \end{aligned}$$

При некоторых параметрах задачи вращающееся медленнее левое колесо  $W_2$  может останавливаться, или, более того, вращаться в обратную сторону. Так будет, например, если  $d = 1.9$  (м) при сохранении значений остальных расчетных параметров.

Кинематика робота – движение по эпитрохоиде. Графики.

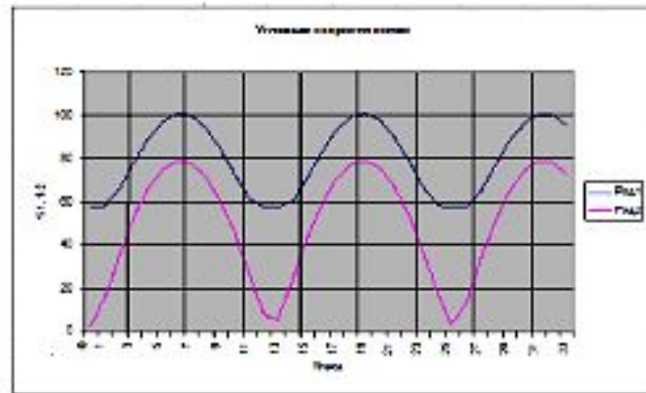
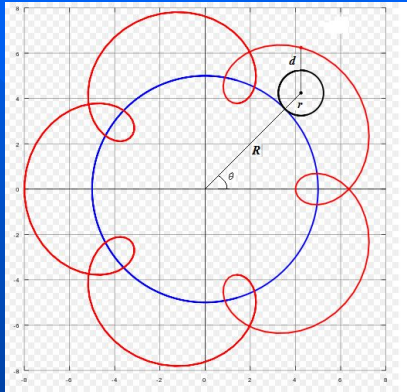
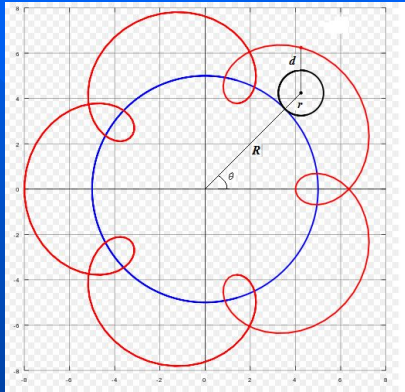


Рис. 27: Угловые скорости вращения колес.

Кинематика робота – движение по эпитрохоиде. Графики.



Вычислим кривизну эпитрохоиды, покажем, что она непрерывна. С использованием (1.9) - (1.11) можно записать:

$$k(\theta) = \frac{\left| \frac{(R+r)d^2 + r^3}{r^3} - \frac{(R+2r)d}{r^2} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right|}{(R+r) \left[ \frac{d^2 + r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \right]^{3/2}}. \quad (1.13)$$

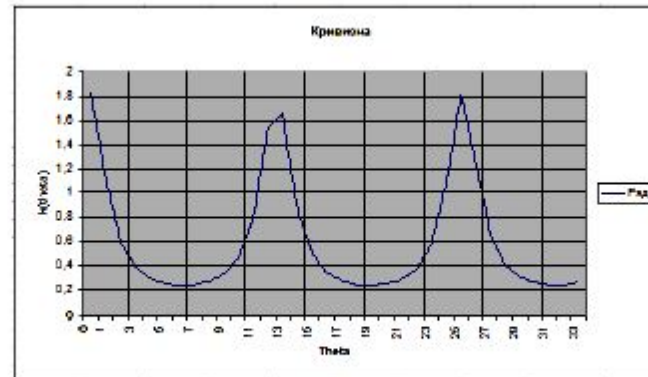


Рис. 28: Кривизна эпитрохоиды.

Кинематика робота – движение по эпитрохоиде. Графики.

*Этап 1.* Например, на той же основе можно построить движение робота с вальсированием вдоль прямой.

Параметрические уравнения такой траектории можно принять следующими:

$$\begin{cases} x(t) = rt - d \sin t \\ y(t) = r - d \cos t \end{cases}, \quad (1.14)$$

обозначения здесь использованы те же, что в уравнении эпитрохоиды (1.8), параметр траектории - время  $t$ . График этой траектории приведен на рис. Он построен для параметров:  $r = 0.5$  м,  $d = 1, 2$  м, с шагом 0.6 сек.

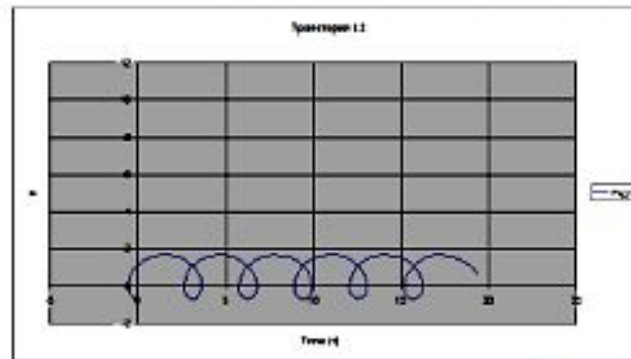


Рис. 29: Циклоидальная траектория  $L2$ .

Кинематика робота. Другие циклоидальные кривые.



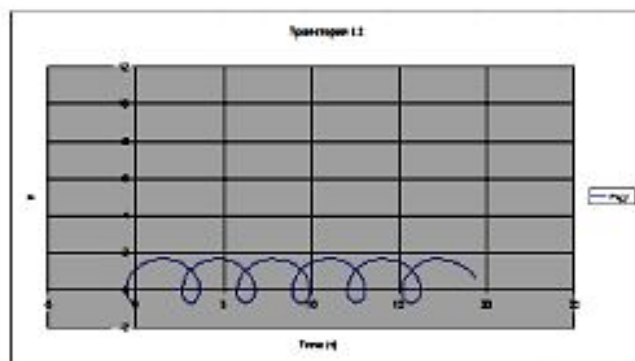


Рис. 29: Циклоидальная траектория  $L2$ .

Выпишем формулы для скоростей робота:

$$\begin{cases} v = \sqrt{(r^2 + d^2 - 2rd \cos t)} \\ \omega = \frac{rd \cos t - d^2}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos t)} \end{cases} \quad (1.15)$$

и на основании (1.7) выпишем условия скорости вращения колес на этой траектории:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{\rho} \sqrt{(r^2 + d^2 - 2rd \cos t)} + \frac{a}{\rho} \frac{rd \cos t - d^2}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos t)} \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{\rho} \sqrt{(r^2 + d^2 - 2rd \cos t)} - \frac{a}{\rho} \frac{rd \cos t - d^2}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos t)} \end{cases} \quad (1.16)$$

Кинематика робота. Другие циклоидальные кривые.



*Этап 2.* На основании синтезированного движения можно построить несколько более сложный случай. Это движение, у траектории которого средняя ось не является прямой, а криволинейна. Для этого добавим к уравнениям (1.14) сдвиг по оси  $y$  с помощью какой-либо нелинейной функции. Например, следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = rt - d \sin t \\ y(t) = \sin(rt) + (r - d \cos t) \end{cases}, \quad (1.17)$$

Получающаяся траектория  $L3$  изображена на рис.33, она также относится к классу циклоидальных. Эта кривая построена для  $r = 0.2$  м,  $d = 0.5$  м.

Подобные “экологические” траектории имеют определенный смысл, например, когда необходимо совместить вальсирующее движение с обходом препятствий. Заметим, что сдвигая функция (в (1.17)  $\sin(rt)$ ) может быть выбрана достаточно произвольной, как этого требует задача движения.

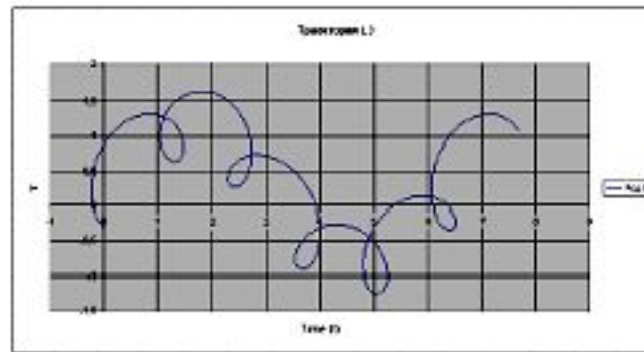


Рис. 33: Циклоидальная траектория  $L3$ .

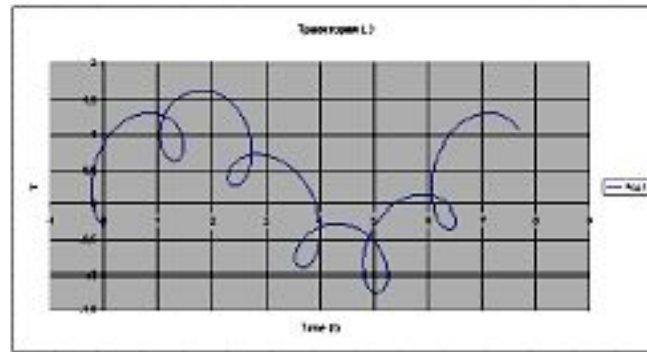


Рис. 33: Циклоидальная траектория  $L3$ .

Скорости для движения по  $L3$  таковы:

$$\begin{cases} v = \sqrt{(1 + \cos^2(rt)) r^2 + d^2 + 2rd (\sin t \cos(rt) - \cos t)} \\ \omega = -\frac{(r^2 \sin(rt) (r - d \cos t) - rd (\cos t - \sin t \cos(rt)) + d^2)}{(1 + \cos^2(rt)) r^2 + d^2 + 2rd (\sin t \cos(rt) - \cos t)}, \end{cases} \quad (1.18)$$

и угловые скорости вращения колес таковы:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{\rho} \sqrt{(1 + \cos^2(rt)) r^2 + d^2 + 2rd (\sin t \cos(rt) - \cos t)} - \\ \quad - \frac{a (r^2 \sin(rt) (r - d \cos t) - rd (\cos t - \sin t \cos(rt)) + d^2)}{\rho (1 + \cos^2(rt)) r^2 + d^2 + 2rd (\sin t \cos(rt) - \cos t)} \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{\rho} \sqrt{(1 + \cos^2(rt)) r^2 + d^2 + 2rd (\sin t \cos(rt) - \cos t)} + \\ \quad + \frac{a (r^2 \sin(rt) (r - d \cos t) - rd (\cos t - \sin t \cos(rt)) + d^2)}{\rho (1 + \cos^2(rt)) r^2 + d^2 + 2rd (\sin t \cos(rt) - \cos t)}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Кинематика робота. Другие циклоидальные кривые.

*Движение с постоянным модулем скорости.* В рассмотренном выше случае движения по эпитрохе движение определялось равномерным вращением радиус-вектора  $OO_1$  центра производящей малой окружности, т.е. происходило с постоянной угловой скоростью  $\theta$ . Рассмотрим на примере эпитрохи вариант, когда требуется движение робота по траектории с постоянной скоростью. Условие постоянства модуля (величины) скорости означает

$$v(t) = v(s) \frac{ds}{dt} = v_0 = \text{const}, \quad (1.20)$$

и переходя в этом соотношении к независимой переменной  $t$ , времени, можем получить уравнение для определения того, как должен зависеть параметр траектории от  $t$  для выполнения (1.20):

$$\int v(s) ds = \int v_0 dt = v_0 t + V_1, \quad (1.21)$$

где  $V_1$  - константа интегрирования, определяемая начальными условиями.

В случае эпитрохоиды это будет зависимость  $\theta(t)$ , которую можно получить, решив уравнение, вытекающее из (1.11) и (1.21):

$$I(\theta) = \int (R+r) \sqrt{\left[ \frac{d^2 + r^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos\left(\frac{R}{r} \theta\right) \right]} d\theta = v_0 t + V_1, \quad (1.22)$$

решением этого уравнения будет нелинейная функция  $\theta(t)$ , обеспечивающая постоянство линейной скорости  $v$ . Для решения (1.22) необходимо вычислить интеграл в левой части, и затем найти решение как обратную функцию к  $I(\theta)$ .

Заметим, что аналогично (1.20) - (1.22) может быть выписано уравнение для определения параметра  $s(t)$ , соответствующего любому заданному закону движения по траектории, т.е. движению с заданной вперед скоростью  $v^*(t)$

$$\int v(s) ds = \int v^*(t) dt, \quad (1.23)$$

Кинематика робота. Движение с постоянным модулем скорости.

Наконец отметим, что в качестве общего метода решения уравнений типа (1.22) вполне могут быть приняты численные методы расчета интеграла  $I(\theta)$  и его обращения, т.к. они дают общий метод решения, не зависящий от того, берется ли интеграл  $I(\theta)$  в элементарных функциях, или нет.

Для задачи движения по эпитрохоиде такие расчеты были проведены для параметров:  $R = 5$  м,  $r = 1$  м,  $d = 2$  м,  $v_0 = 1.5$  м/сек. Фактически это соответствует последнему уравнению в (1.8) в виде

$$\theta = \lambda t, \quad \text{где } \lambda = 0.118.$$

Расчеты были проведены для одного полного “оборота”  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  робота по эпитрохоиде с разбивкой цикла движения по  $\theta$  и по  $t$  на 500 точек. Заметим, что значение интеграла  $I(\theta)$  в конце интервала интегрирования, т.е.  $I(2\pi)$ , в рассмотренном варианте параметризации является полной длиной эпитрохоиды.

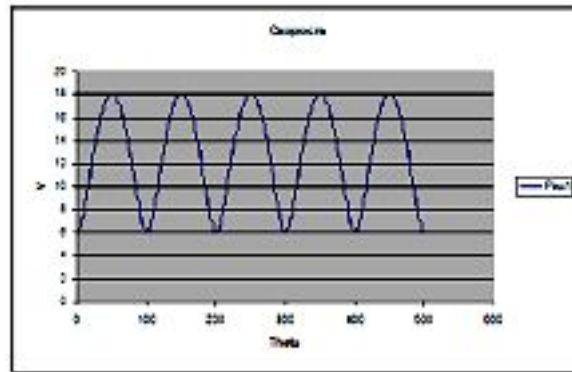
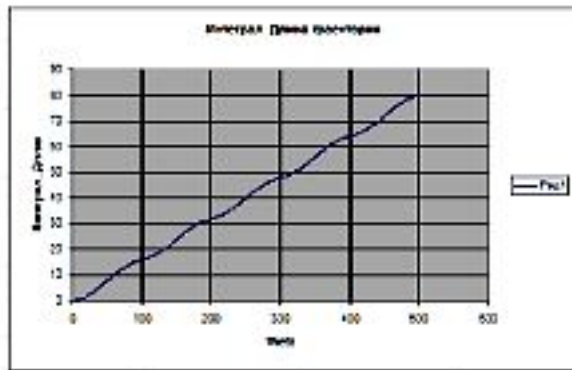
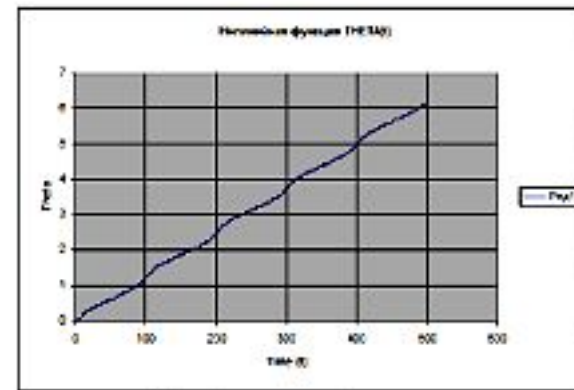


Рис. 35: Скорость движения по эпитрохоиде  $L1$ , полный цикл.



(а) интеграл (длина пути)



(b) обратная функция

Кинематика робота. Движение с постоянным модулем скорости. Графики.

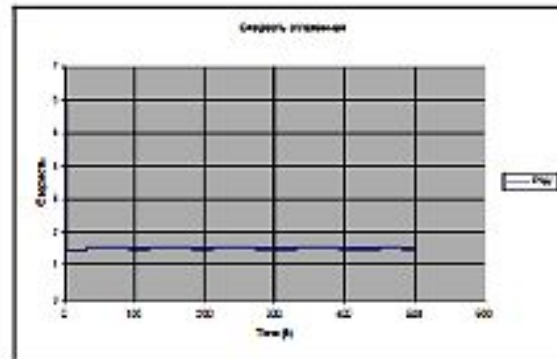
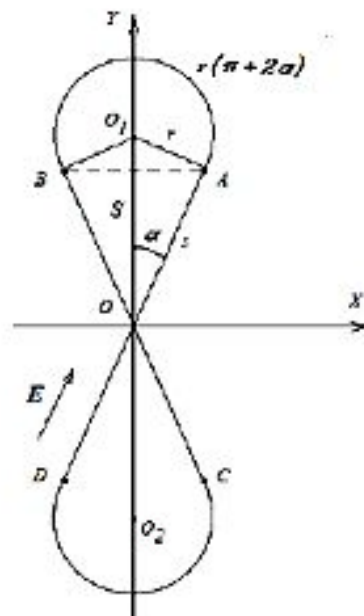


Рис. 37: Константная скорость движения по эпитрохонде  $L1$ , полный цикл.

Кинематика робота. Движение с постоянным модулем скорости. Графики.



Особенности и их разрешение.



*особая точка A  
(B, C, D)*

Рис. 35: Траектория «восьмерка» L4.

Кинематика робота. Траектория «восьмерка».

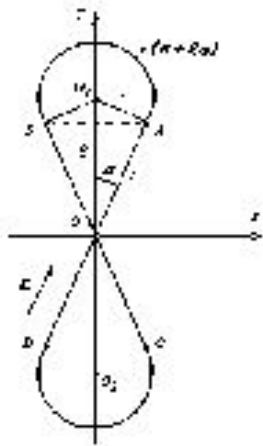


Рис. 35. Траектория «восьмерка» 64.

Формально говоря, в механике роботов (и в механике вообще) последнее обстоятельство недопустимо, скорости механических систем не могут быть разрывны (если нет ударов). Если же допустить резкий скачок скоростей колес в окрестности  $k$ -особой точки, это приведет к скольжению колес и неточному исполнению траектории, для «восьмерки» такая ошибка будет накапливаться во всех  $k$ -особых точках.

*Отсюда следует важный вывод: геометрически гладкий синтез траекторий мобильного робота не обязательно приводит к механически гладкому движению и поэтому не всегда возможна его реализация, она зависит от управления.*

Так, допустить такой траекторный синтез, как синтез касательными отрезками и дугами, возможно, если реализовать специальное управление в  $k$ -особых точках.

Кинематика робота. Траектория «восьмерка».

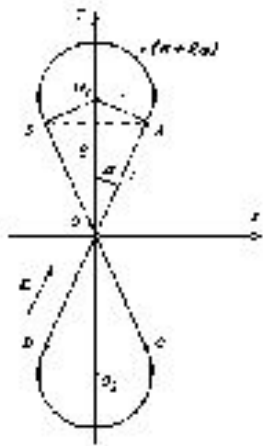


Рис. 35. Трапецеидальный профиль. 64.

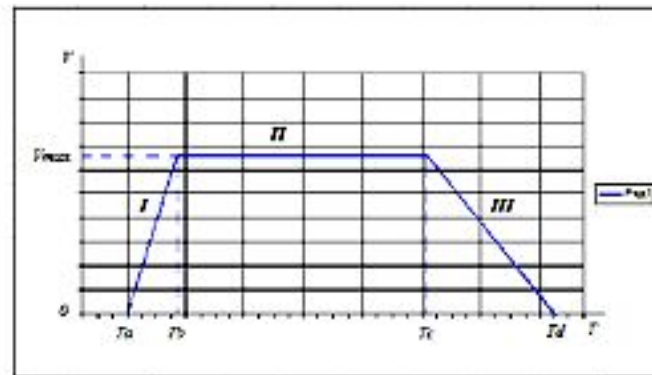


Рис. 36: Трапецеидальный профиль.

Кинематика работа. Первое решение – трапецеидальный профиль.

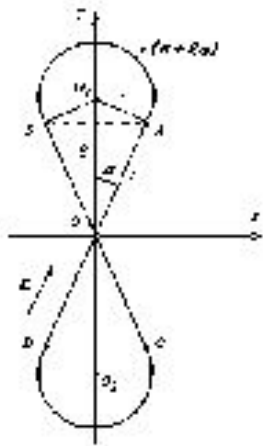


Рис. 35. Траектория трапецеидальной АА.

На графиках ниже приведены профили изменения скоростей робота  $v, \omega$  и угловых скоростей колес  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  для движения по “восьмерке” в условиях, что  $v, \omega$  изменяются по трапецеидальным профилям, при этом так же будут изменяться и  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ . Графики построены для следующих значений параметров: параметры траектории “восьмерка”  $S = 2,5$  (м),  $\alpha = 30^\circ$ , максимальная скорость робота  $V_{max} = 1$  (м/сек), коэффициенты режима  $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.8, \alpha_3 = 0.1$ , параметры робота  $a = 0.6$  (м),  $\rho = 0.2$  (м).

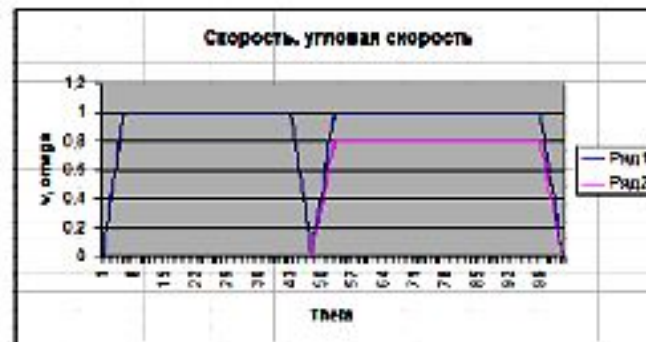


Рис. 37: Скорость и угловая скорость на “восьмерке”.

Кинематика робота. Первое решение – трапецеидальный профиль.

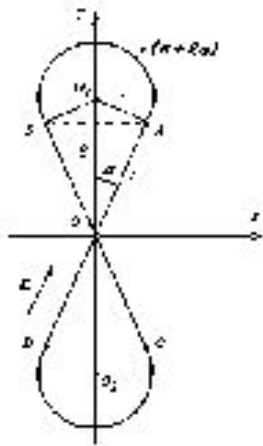


Рис. 35. Траектория трапецеидальной АА.

На графиках ниже приведены профили изменения скоростей робота  $v, \omega$  и угловых скоростей колес  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  для движения по "восьмерке" в условиях, что  $v, \omega$  изменяются по трапецеидальным профилям, при этом так же будут изменяться и  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ . Графики построены для следующих значений параметров: параметры траектории "восьмерка"  $S = 2,5$  (м),  $\alpha = 30^\circ$ , максимальная скорость робота  $V_{max} = 1$  (м/сек), коэффициенты режима  $\alpha_1 = 0,1, \alpha_2 = 0,8, \alpha_3 = 0,1$ , параметры робота  $a = 0,6$  (м),  $\rho = 0,2$  (м).

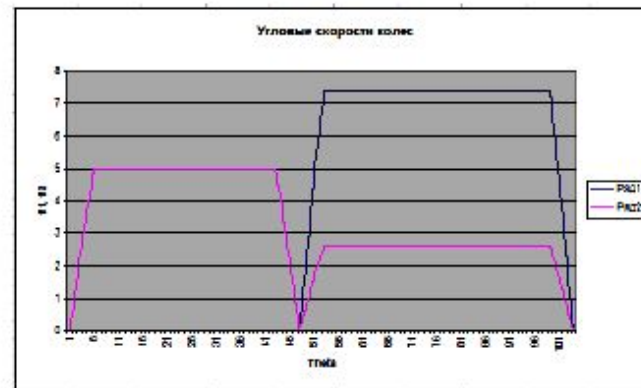


Рис. 38: Скорости вращения колес на "восьмерке".

Кинематика робота. Первое решение – трапецеидальный профиль.

*Редукция  $\kappa$ -особых точек.* Другое возможное решение проблемы  $\kappa$ -особых точек состоит в следующем. Заменяем такую точку небольшим сегментом гладкой непрерывной кривой с непрерывными первой и второй производными. Значения координат на этом сегменте и значения производных выбираются так, чтобы обеспечить и гладкое касание кривых и непрерывность кривизны получаемой траектории. Этот метод будем называть редукцией  $\kappa$ -особых точек. Редукция возможна, если допустимо небольшое изменение траектории, по которой должен двигаться робот.

Покажем редукцию на примере траектории “восьмерка”.

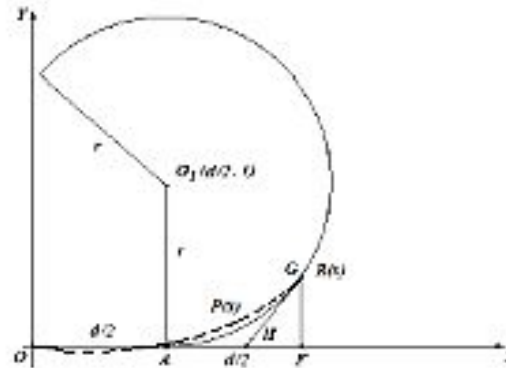


Рис. 42: Редукция  $\kappa$ -особой точки сплайном.

Кинематика робота. Второе решение – редукция особенностей.



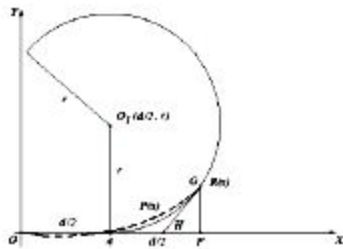


Рис. 42: Редукция  $x$ -особой точки сплайном.

Условия сохранения значений функций, производных и кривизны в точках  $O$  и  $G$ , это 6 условий, поэтому минимальный полином, удовлетворяющий этим условиям - полином 5-го порядка, такой полином имеет 6 коэффициентов, которые следует определить. В системе координат  $OXY$  он имеет вид:

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 . \quad (1.28)$$

Левый конец сплайна, который будем строить, - начало координат  $O$ , очевидно, что на левом конце условия на функцию, производную и кривизну нулевые  $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$ , а тогда ясно, что младшие три коэффициента в (1.28) также равны нулю,  $a_2 = a_1 = a_0 = 0$ , и полином принимает вид:

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 . \quad (1.29)$$

Оставшиеся коэффициенты определяются из условий на правом конце, при  $x = d$ .

Кинематика работа. Второе решение – редукция особенностей.

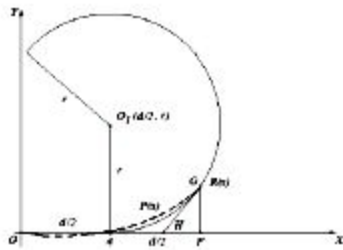


Рис. 42: Редукция  $x$ -особой точки слайдом.

Уравнение полной окружности, содержащей  $R(x)$ , имеет вид (см. рис.42):

$$\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

следовательно, уравнение нижней полуокружности, содержащей  $R(x)$ , таково:

$$y = r - \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}, \quad (1.30)$$

и искомое значение в  $G$  равно:

$$y(d) = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - d^2}. \quad (1.31)$$

Кинематика работа. Второе решение – редукция особенностей.

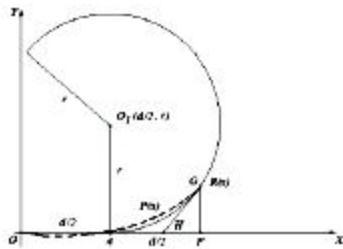


Рис. 42: Редукция  $x$ -особой точки слайдом.

Производная функции (1.30) имеет вид

$$y' = \frac{x - \frac{d}{2}}{\sqrt{r^2 - (x - \frac{d}{2})^2}},$$

а ее значение в  $G$  равно:

$$y'(d) = \frac{d}{\sqrt{4r^2 - d^2}}. \quad (1.32)$$

Условие сохранения кривизны в точке  $G$  по второй из формул (1.1) приводит к следующему соотношению на вторую производную полинома  $P(x)$

$$|P''(x)| = k(x) \left( \sqrt{1 + P'(x)^2} \right)^3 = \frac{1}{r} \left( \sqrt{1 + P'(x)^2} \right)^3,$$

где полином  $P'(x)$  в точке  $x = d$  можно заменить равным ему соотношением (1.32):

$$|P''(d)| = \frac{8r^2}{(\sqrt{4r^2 - d^2})^3}. \quad (1.33)$$

Кинематика робота. Второе решение – редукция особенностей.

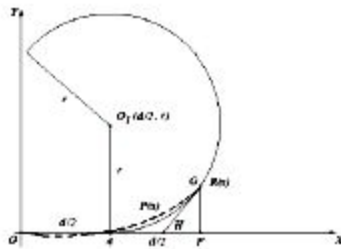


Рис. 42: Редукция  $\kappa$ -особой точки слайдом.

Теперь объединяя выписанные соотношения (1.31)-(1.33) получим линейную систему третьего порядка на неизвестные коэффициенты  $a_5$ ,  $a_4$ ,  $a_3$  полинома  $P(x)$ :

$$\begin{cases} P(d) = (d^5)a_5 + (d^4)a_4 + (d^3)a_3 = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - d^2} \\ P'(d) = (5d^4)a_5 + (4d^3)a_4 + (3d^2)a_3 = \frac{d}{\sqrt{4r^2 - d^2}} \\ |P''(d)| = (20d^3)a_5 + (12d^2)a_4 + (6d)a_3 = \frac{8r^2}{(\sqrt{4r^2 - d^2})^3} \end{cases} \quad (1.34)$$

При ее выписывании модуль в третьем уравнении раскрыт исходя из очевидных геометрических соображений, - на дуге  $R(x)$ , где выполняется построение ( $d/2 \leq x \leq r + d/2$ ), первая производная вдоль дуги возрастает, следовательно, вторая положительна, и такой же знак должен быть у  $P''(d)$  в силу их равенства в  $x = d$ .

Кинематика работа. Второе решение – редукция особенностей.

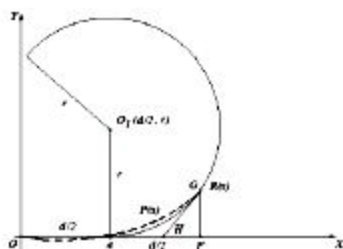


Рис. 42: Редукция  $x$ -особой точки слайном.

Далее, у системы (1.34) легко понизить порядок. Действительно, эта система может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} (d^2)a_5 + (d)a_4 + a_3 = \frac{1}{d^3} \left( r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - d^2} \right) = \frac{1}{d^3} P(d) \\ \left( \frac{5}{3}d^2 \right)a_5 + \left( \frac{4}{3}d \right)a_4 + a_3 = \frac{d}{3d^2\sqrt{4r^2 - d^2}} = \frac{1}{3d^2} P'(d) \\ \left( \frac{10}{3}d^2 \right)a_5 + (2d)a_4 + a_3 = \frac{8r^2}{6d(\sqrt{4r^2 - d^2})^3} = \frac{1}{6d} P''(d) . \end{cases} \quad (1.35)$$

Отсюда, сохраняя выражение правых частей через значения функции и производных, вычитая первое уравнение из второго и третьего, получим систему второго порядка на старшие коэффициенты  $a_5$ ,  $a_4$  полинома  $P(x)$ :

Кинематика работа. Второе решение – редукция особенностей.

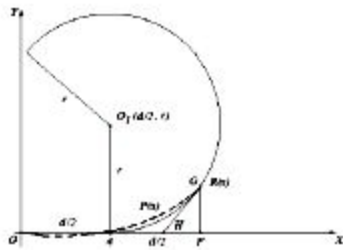


Рис. 42: Редукция  $\kappa$ -особой точки слайдом.

$$\begin{cases} (\frac{2}{3}d^2)a_5 + (\frac{1}{3}d)a_4 = \frac{1}{3d^2}P'(d) - \frac{1}{d^3}P(d) \\ (\frac{7}{3}d^2)a_5 + (d)a_4 = \frac{1}{6d}P''(d) - \frac{1}{d^3}P(d) . \end{cases} \quad (1.36)$$

Определитель этой системы,  $\Delta = -1/9 d^3$ , не равен нулю по построению  $d$ , система разрешима. Ее решение можно выписать на основе, например, формул Крамера, т.к. для второго порядка они вполне эффективны, а затем из первого (или из любого) уравнения (1.35) можно найти коэффициент  $a_3$ .

Кинематика работа. Второе решение – редукция особенностей.





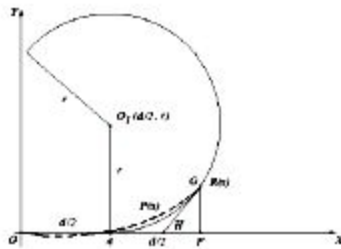


Рис. 42: Редукция  $x$ -особой точки сплайном.

Проведем редукцию точки  $A$  на траектории-“восьмерке”, изображенной выше на рис.38. Пусть ее параметры и параметры робота те же, что и ранее:  $S = 2.5$  м,  $\alpha = 30^\circ$ , т.е. радиус дугового сегмента траектории  $r = 1.25$  м, его кривизна  $k = 0.8$ , максимальная скорость робота  $V_{max} = 1$  м/сек, параметры робота  $a = 0.6$  м,  $\rho = 0.2$  м. Редукцию будем проводить в системе координат, показанной на рис.42. Пусть длина носителя редуцирующего сплайна  $d = 0.4$  м. С этими параметрами формулы (1.31)-(1.33), (1.37) дают следующие значения:

$$\begin{cases} P(d) = 0,016104, & P'(d) = 0,162088, & P''(d) = 0,831733 \\ a_5 = -3,061012, & a_4 = 3,094281, & a_3 = -0,496330. \end{cases} \quad (1.38)$$

На рис.43а показана редукция точки  $A(0.2, 0)$ , показан сглаживающий сплайн и часть дуговой траектории, к которой необходимо выполнить сглаживание. На рис.43б приведен график кривизны, показывающий, как она изменяется вдоль построенного сглаживающего сплайна. Важно, что в конечных точках она в точности равна требуемым значениям  $k = 0$ ,  $k = 0.8$ , и является непрерывной на всей редуцированной траектории.

Кинематика робота. Второе решение – численный пример.

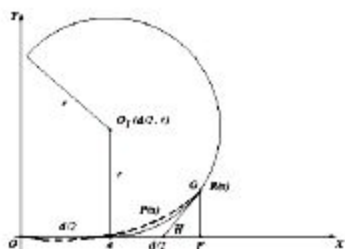


Рис. 42: Редукция  $x$ -осевой точки слайдом.

Теперь определим скорости движения робота по этой траектории и скорости вращения колес. Примем условие, что робот движется с постоянным модулем скорости точки, лежащей на построенной траектории, и совпадающей с серединой оси колес. Пусть эта скорость равна  $v_1 = 0,75$  м/сек.

Кинематика робота. Второе решение – численный пример.

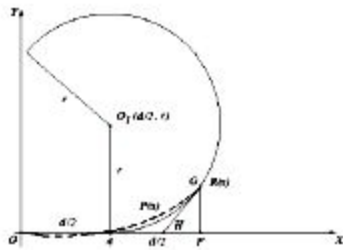
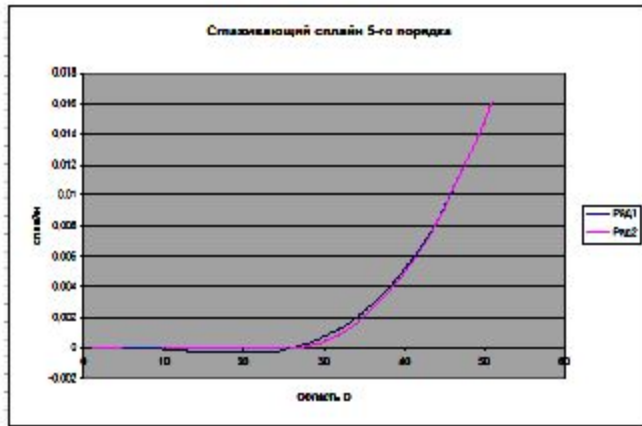
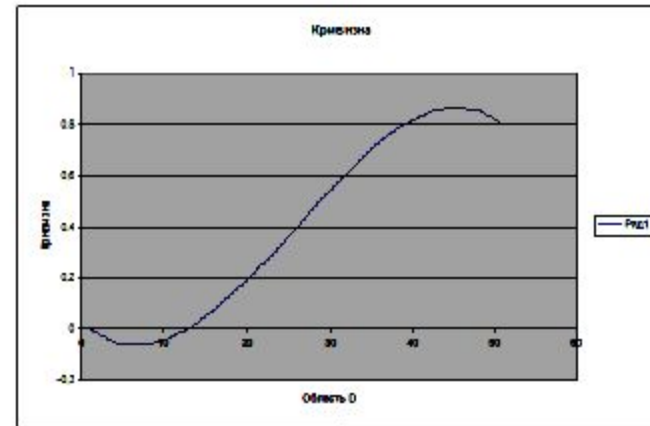


Рис. 42: Редукция  $x$ -осевой точки слайном.



(a) приближение окружности слайном



(b) кривизна вдоль слайна

Кинематика робота. Второе решение – численный пример.

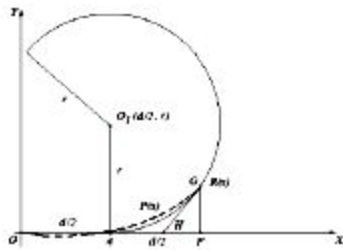
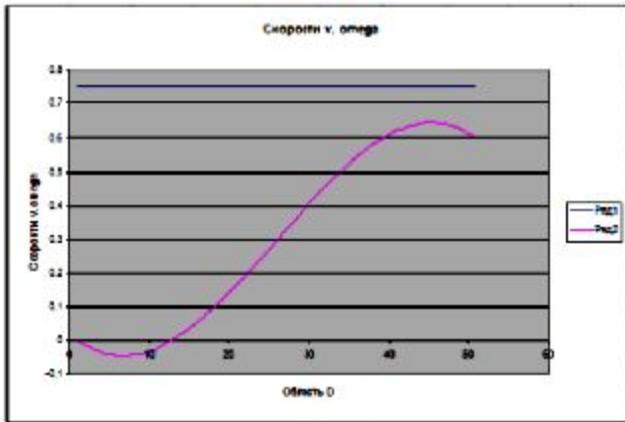
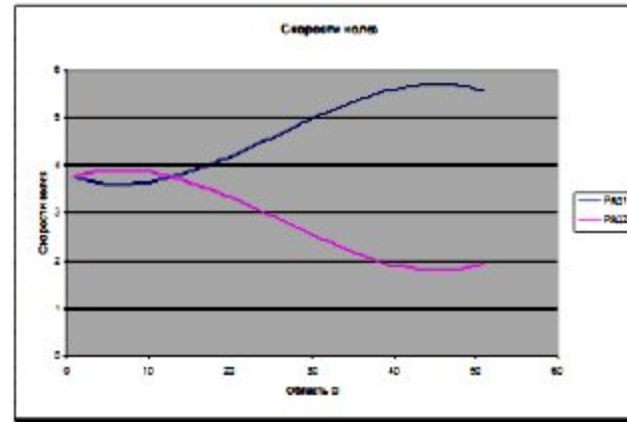


Рис. 42: Редукция  $x$ -осевой точки слайдом.



(a) скорости  $v, \omega$



(b) скорости вращения колес

Кинематика робота. Второе решение – численный пример.

# Резюме

*Замечание 1.* При синтезе движения все построенные кинематические схемы движения должны рассматриваться как кинематическое программное движение робота. Далее задача системы управления состоит в отработке программного движения, при этом будут возникать точности этой отработки, продиктованные динамическими характеристиками робота и его приводов. Вообще говоря, при синтезе кинематической программы целесообразно учитывать динамические возможности робота, чтобы не была построена нереализуемая программа движения. Некоторым примером такого учета является учет максимальных скоростей и ускорений робота и колес  $V_{max}$ ,  $a_{1max}$ ,  $a_{2max}$ ; использованный при синтезе трапецеидальных профилей скоростей.

*Замечание 2.* Другое возможное применение описанных методов - кинематический контроль траекторного синтеза, т.е. контроль уже найденных траекторий, построенных системами прокладки пути робота, и выбор способа, как проехать по предписанной траектории. При таком контроле одной из задач является выбор закона движения робота по траектории, обеспечивающего необходимые величины скоростей робота. Примером этого может служить рассмотренный выше метод синтеза движения с постоянным, или любым наперед заданным, модулем скорости. Вторая задача - контроль наличия особых или  $\kappa$ -особых точек на траектории и синтез соответствующего способа их прохождения.

Траектории с особыми (например, угловыми) точками могут порождаться, в частности, графовыми методами выбора пути по дискретной сетке, если в них не предусмотрено сглаживание построенного пути.



*Замечание 3.* Описанный выше метод построения трапецеидальных профилей скоростей - лишь базовый вариант. При необходимости можно строить более сложные способы синтеза движения с использованием, например, не линейных, а квадратичных элементов профиля и т.д. Такой способ будет соответствовать движению не с постоянными, а с переменными ускорениями.

*Замечание 4.* Метод редукции точечных (или малых) траекторных особенностей сплайнами имеет преимущество перед методом трапецеидальных профилей скоростей в том, что робот может двигаться по сглаженной траектории без остановок. Метод трапецеидальных профилей, однако, проще в вычислительном смысле и не приводит к деформациям траектории.

*Замечание 5.* При редукции особенностей сглаживание может выполняться не только алгебраическими сплайнами, а и с помощью большого числа различных других кривых. Условием сглаживания является лишь гладкое сопряжение с исходной кривой по начальным и конечным значениям функций, их производных и кривизны. Так, схема на рис.44b показывает преобразование угловых скоростей колес по алгебраическому сплайну, но такое преобразование может быть выполнено и иначе, например, простым линейным преобразованием от начальных к конечным значениям. Однако, в таком варианте оказывается, что переходная траектория не выражается в элементарных функциях, а является фрагментом спирали Корню, описываемой неэлементарными функциями - интегралами Френеля. Такие функции в системе управления робота можно хранить лишь в табличном, а не в формульном, виде, что приводит к расходу памяти управляющей системы. Поэтому выбор варианта сглаживания в конечном итоге зависит от решаемой задачи.