ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ЛЕКЦИЯ 3:

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1. Кинетическая энергия МС. Теорема Кенига

Кинетической энергией материальной системы называется сумма кинетических энергий входящих в нее точек

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2$$

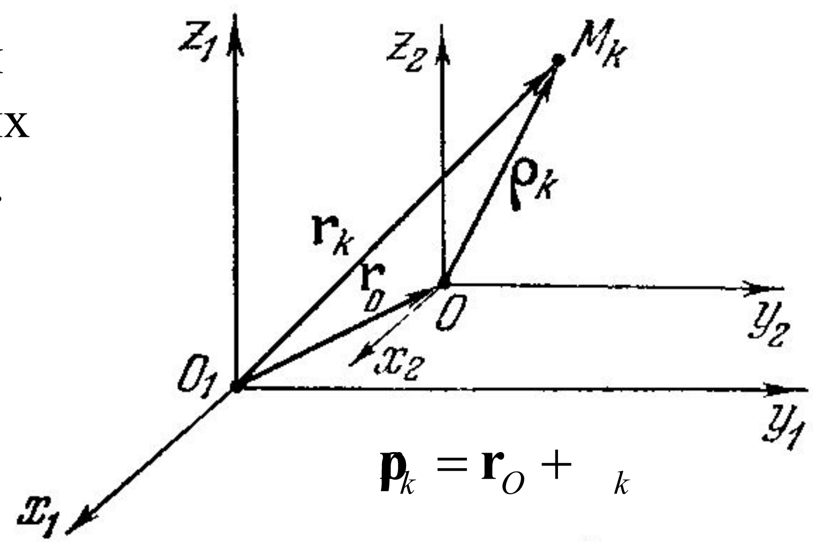
При вычислении кинетической энергии системы полезна **теорема Кенига**

Теорема Кинетическая энергия материальной системы в ее абсолютном движении (T) складывается из кинетической энергии T_O центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии $T_{\text{отн}}$ системы в ее движении относительно поступательно перемещающихся в инерциальном пространстве вместе с центром масс осей.

$$\boxed{T = T_O + T_{\text{отн}}}$$

2. Доказательство теоремы Кенига

Подвижные координаты (2) перемещаются поступательно относительно инерциальных осей (1) вместе с центром *O* масс системы.



$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\mathbf{v}_O + \mathbf{u}_k\right)\cdot\left(\mathbf{v}_O + \mathbf{u}_k\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}v_0^2\sum_{k=1}^{n} m_k}_{\frac{1}{2}Mv_0^2} + \mathbf{v}_0 \cdot \cancel{\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{u}_k} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k u_k^2}_{T_{отн}}$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_O + \quad {}_k$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_O + \mathbf{u}_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k = 0$$

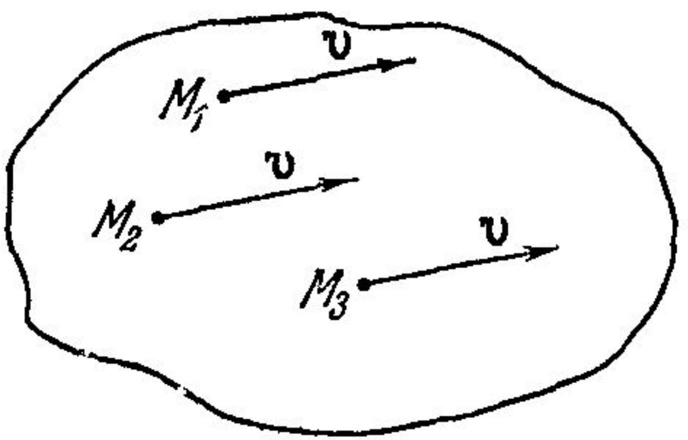
$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{u}_k = 0$$

$$\boxed{T = T_{0тн} + T}$$

3. Кинетическая энергия ТТ, движущегося поступательно

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2} v^2 \int dm = \frac{1}{2} M v^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v^2}$$

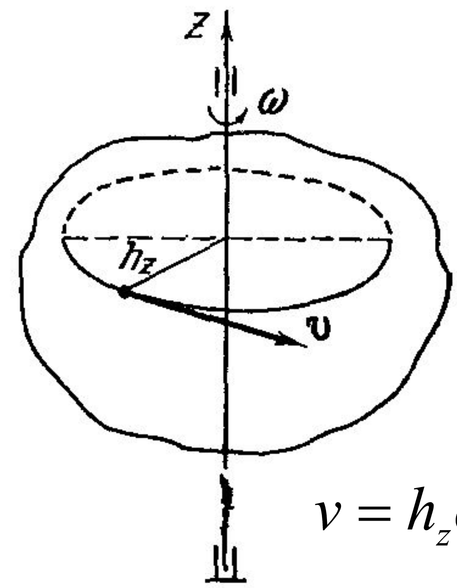


кинетическая энергия ТТ, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости

4. Кинетическая энергия ТТ**,** вращающегося относительно оси

$$T = \frac{1}{2}\int \omega^2 h_z^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int h_z^2 dm = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

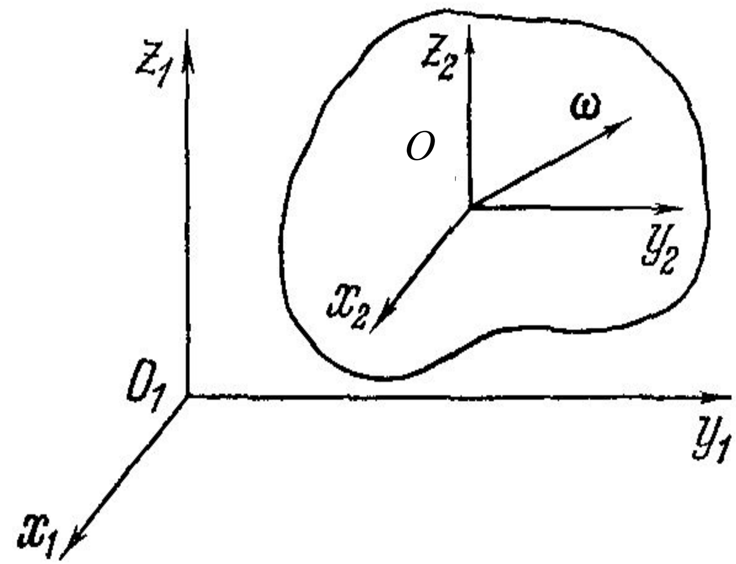


$$v = h_z\omega$$

кинетическая энергия ТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела

5. Кинетическая энергия ТТ**,** движущегося произвольно

Теорема Кенига $T = \frac{1}{2} M v_O^2 + T_{отн}$



Кинематика: движение тела относительно поступательно перемещающихся осей (2) представляет собой вращение с угловой скоростью ω

$$T_{отн} = \frac{1}{2} I_{O\omega} \omega^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_{O\omega} \omega^2}$$

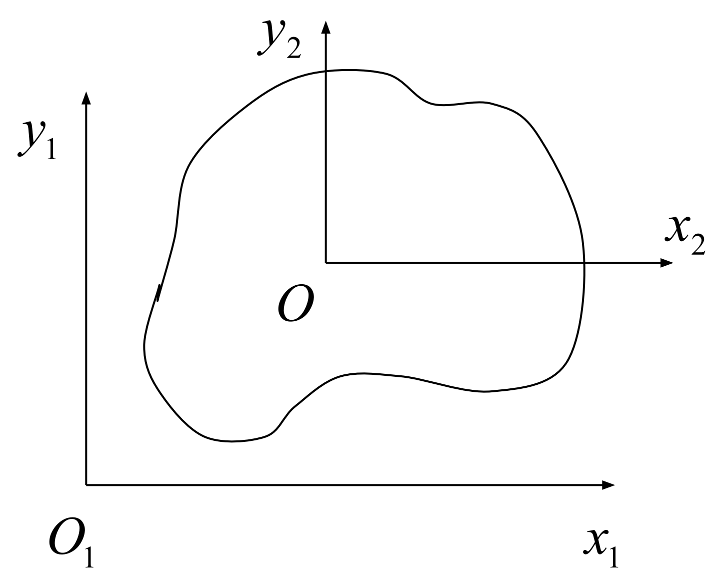
В общем случае $I_{O\omega}$ переменная величина т.к. ось вращения изменяет свое положение

кинетическая энергия ТТ складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии в его вращении относительно центра масс

6. Кинетическая энергия ТТ при плоском движении

$\boldsymbol{\omega} \parallel Oz_2$

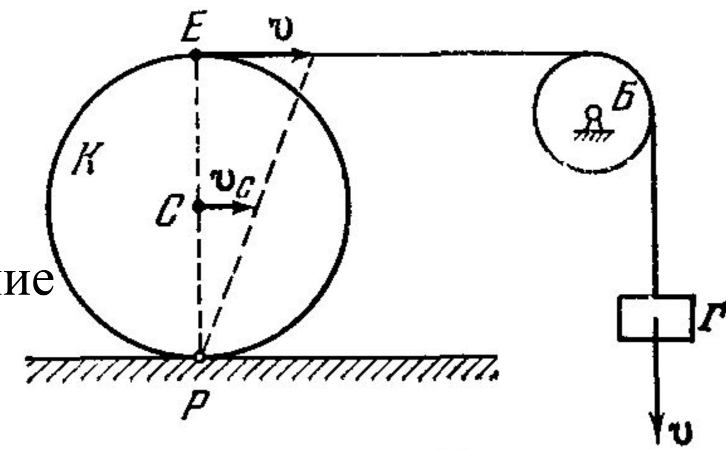
$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_{Oz_2} \omega^2}$$



Ось Oz_2 не меняет своего положения относительно тела, поэтому момент инерции I_{Oz_2} не меняется с течением времени

7. Пример вычисления кинетической энергии

Каток К массы m_1 лежит на горизонтальной плоскости. Каток обмотан тросом, перекинутым через блок Б радиуса r. К свободному концу троса прикреплен груз Г массы m_3. При опускании груза со скоростью v трос, разматываясь, приводит в качение без скольжения каток. Определить кинетическую энергию системы, если момент инерции блока Б относительно оси вращения равен I_2



$$T_Г = \frac{1}{2} m_3 v^2 \qquad T_Б = \frac{1}{2} I_2 \omega_Б^2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{v^2}{r^2}$$

Скорость точки касания блока с тросом равна скорости v груза Г.

$$T_К = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_C^2 \qquad v_C = \frac{v}{2} \qquad \omega_C = \frac{v - v/2}{R} = \frac{v}{2R} \qquad I_{Cz} = \frac{m_1 R^2}{2}$$

$$T_К = \frac{3}{16} m_1 v^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M_{пр} v^2 \qquad M_{пр} = m_3 + \frac{I_2}{r^2} + \frac{3m_1}{8}}$$

8. Теорема об изменении кинетической энергии

$$d\left(\frac{m_1 v_1^2}{2}\right) = \mathbf{F}_1^e \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_1^i \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$+$$

$$d\left(\frac{m_n v_n^2}{2}\right) = \mathbf{F}_n^e \cdot d\mathbf{r}_n + \mathbf{F}_n^i \cdot d\mathbf{r}_n$$

$$\boxed{dT = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^i \cdot d\mathbf{r}_k}$$

Дифференциальная форма теоремы об изменении кинетической энергии : дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2}\right)_0 = A_{1\,1}^e + A_1^i$$

$$+$$

$$\ldots$$

$$\frac{m_n v_n^2}{2} - \left(\frac{m_n v_n^2}{2}\right)_0 = A_n^e + A_n^i$$

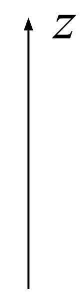
$$\boxed{T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i}$$

Интегральная форма теоремы: изменение кинетической энергии системы при перемещении ее из какой-то начальной конфигурации в данную равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил

9. Работа сил тяжести

$$\sum_k d'A_k^e = \sum_k m_k \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}_k = -\sum_k m_k g \cdot dz_k =$$

$$= -gd\left(\sum_k m_k z_k\right) = -gd\left(Mz_C\right) = -gMdz_C$$

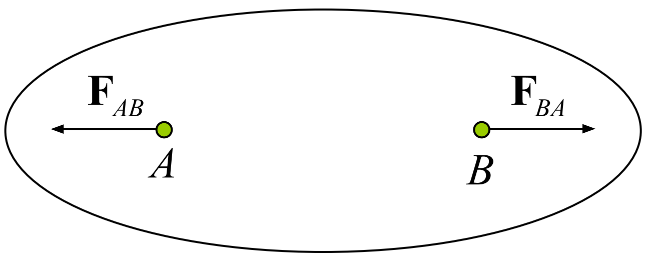


$$A^{(e)} = -Mg\int_{z_{0C}}^{z_C} dz_C = -Mg\left(z_C - z_{0C}\right)$$

Полная работа сил тяжести системы равна весу всей системы, умноженному на вертикальное перемещение ее центра тяжести

10. Работа внутренних сил твердого тела

$$N_{AB} = \mathbf{F}_{AB} \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_{BA} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{F}_{AB} \cdot \left(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \right)$$



Кинематика $\quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{BA}$

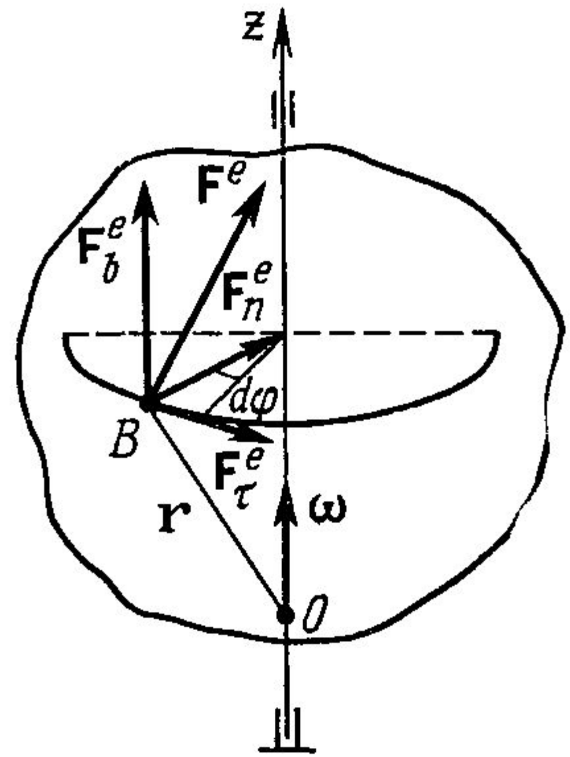
$$N_{AB} = \mathbf{F}_{AB} \cdot \left(\underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{BA}}_{\perp \mathbf{F}_{AB}} \right) = 0$$

$$N^i = \sum_{A,B} N_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^i = \sum_{A,B} A_{AB} = 0$$

Сумма работ всех внутренних сил абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю

11. Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу

$$d'A^e = F_\tau^e ds = F_\tau^e h d\varphi = M_z^e d\varphi$$



Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна моменту этой силы относительно оси вращения, умноженному на дифференциал угла поворота тела

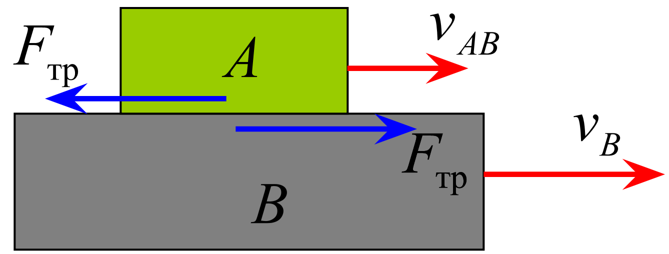
Мощность:

$$N^e = M_z^e \omega_z$$

12. Работа внутренних сил скольжения сочлененных тел

v_{AB} Скорость A относительно B

$$v_A = v_B + v_{AB}$$



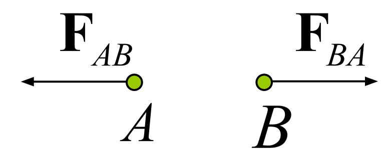
$$N^i_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} v_A + F_{\text{тр}} v_B = -F_{\text{тр}} v_{AB}$$

Полная мощность внутренних сил трения скольжения двух сочлененных тел равна взятому со знаком минус произведению модуля силы трения на модуль относительной скорости.

13. Работа потенциальных внутренних сил

$$\mathbf{F}_{AB}\cdot d\mathbf{r}_A+\mathbf{F}_{BA}\cdot d\mathbf{r}_B=\mathbf{F}_{AB}\cdot\left(d\mathbf{r}_A-d\mathbf{r}_B\right)=$$

$$=\mathbf{F}_{AB}\cdot d\overrightarrow{BA}=f\left(\rho_{AB}\right)d\rho_{AB}=-du\left(\rho_{AB}\right)$$



$$\left|\mathbf{F}_{AB}\right|=\left|\mathbf{F}_{BA}\right|=f\left(\rho_{AB}\right)$$

$$2\rho_{AB}d\rho_{AB}=d\rho_{AB}^2=d\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}\right)=$$

$$=2\overrightarrow{BA}\cdot d\overrightarrow{BA}=2\rho_{AB}\frac{\mathbf{F}_{AB}\cdot d\overrightarrow{BA}}{\left|\mathbf{F}_{AB}\right|}$$

$$u(\rho)=-\int f\left(\rho\right)d\rho$$

$$U^i=\sum_{k,l}u\left(\rho_{kl}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k^i\cdot d\mathbf{r}_k=\frac{1}{2}\sum_{k,l}f\left(\rho_{kl}\right)d\rho_{kl}=-d\sum_{k,l}u\left(\rho_{kl}\right)=-dU^i$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k^i\cdot d\mathbf{r}_k=-\,dU^i}$$

U^i-потенциальная энергия внутренних сил (внутренняя энергия)

14. Работа потенциальных внешних сил

На точку #1 действуют потенциальные внешние силы $\mathbf{F}_1^e = -\nabla U_1^e(\mathbf{r}_1)$

На точку #2 действуют потенциальные внешние силы $\mathbf{F}_2^e = -\nabla U_2^e(\mathbf{r}_2)$

• • • • • •

На точку #n действуют потенциальные внешние силы $\mathbf{F}_n^e = -\nabla U_n^e(\mathbf{r}_n)$

$$d'A^e = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k = -\sum_{k=1}^{n} \nabla U_k^e(\mathbf{r}_k) \cdot d\mathbf{r}_k = -\sum_{k=1}^{n} dU_k^e(\mathbf{r}_k) = -dU^e$$

$$U^e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots \mathbf{r}_n) = \sum_{k=1}^{n} U_k^e(\mathbf{r}_k)$$

U^e-потенциальная энергия внешних сил

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k = -dU^e}$$

15. Закон сохранения полной механической энергии

Допустим, что внутренние и внешние силы, работа которых отлична от нуля, потенциальны (нулю может равняться работа идеальных связей).

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^i \cdot d\mathbf{r}_k = -dU^i \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k = -dU^e$$

U^e-потенциальная энергия внешних сил

U^i-внутренняя энергия

$$d\left(T + U^e + U^i\right) = 0$$

$$\boxed{E = T + U^e + U^i = \mathrm{Const}}$$

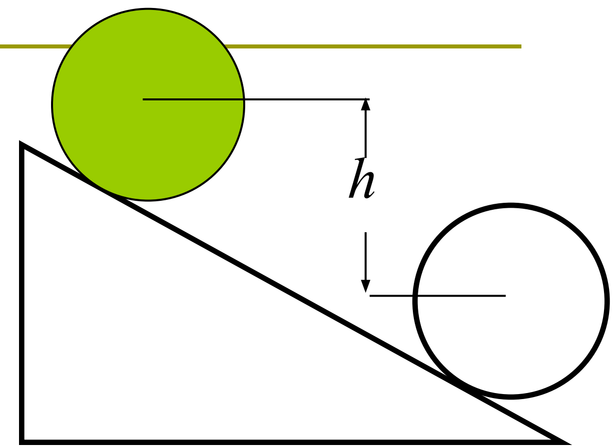
интеграл энергии

E-полная механическая энергия системы

Систему, для которой имеет место интеграл энергии, называют **консервативной**.

16. Пример # 1

Цилиндр катится без скольжения по наклонной плоскости. Начальная скорость равна нулю. Найти скорость центра масс цилиндра в момент времени когда он опустился на величину h.



$$T + U^e = \left(T + U^e\right)_0$$

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\frac{V^2}{R^2} = \frac{3}{4}MV^2$$

$$\frac{3}{4}MV^2 = Mgh$$

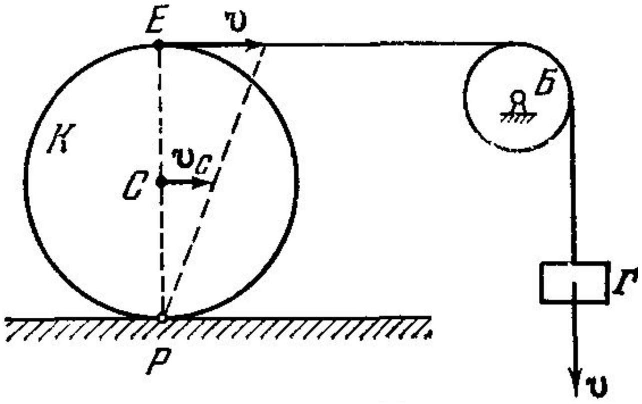
$$\boxed{V = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

Если это тело спускается не вращаясь, имеем $\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$

Следовательно, вращение уменьшает скорость V

17. Пример # 2

Груз Г под действием силы тяжести опускается из состояния покоя вниз. Определить скорость v груза Г при опускании его на высоту h. Трением качения катка и трением на оси блока пренебречь.



Связи идеальны. Внутренняя энергия равна нулю

$$T + U^e = \left(T + U^e\right)_0$$

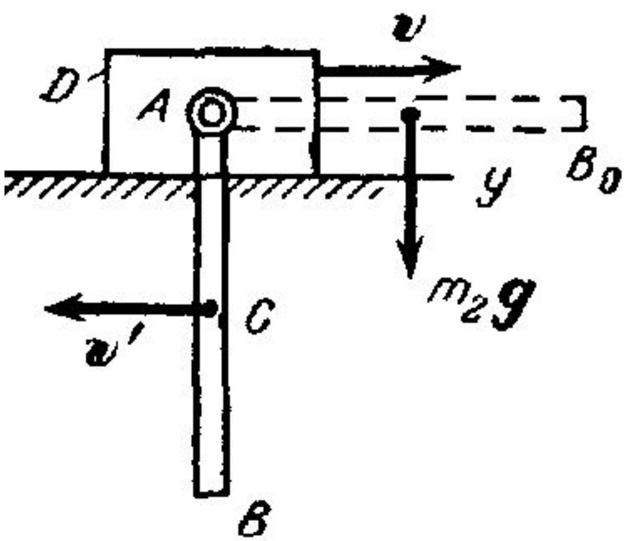
$$\frac{1}{2}M_{np}v^2 \qquad -m_3 gh \qquad 0 \qquad 0$$

$$\boxed{v = \sqrt{2\frac{m_3}{M_{np}}gh}}$$

$$M_{np} = m_3 + \frac{I_2}{r^2} + \frac{3m_1}{8}$$

18. Пример использования 2

К брусу D массы m_1 лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплен шарнирно в точке A однородный стержень AB, имеющий массу m_2 и длину l. Система начинает движение из состояния покоя в момент, когда стержень отклонен до горизонтального положения AB_0. Пренебрегая трением в оси A, найти скорость v бруса в тот момент, когда стержень проходит через вертикаль.



Сохранение энергии $T + U^e = \left(T + U^e\right)_0 = 0$ $\qquad U^e = -m_2 g \dfrac{l}{2}$

$$T = T_D + T_{AB} \qquad T_D = \frac{1}{2} m_1 v^2 \qquad T_{AB} = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cx} \omega^2$$

$$I_{Cx} = \frac{m_2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} m_2 l^2 \qquad v_C = v' - v$$

v' – скорость C относительно A $\qquad v' = \dfrac{1}{2} l\omega$

$$v_C = \frac{1}{2} l\omega - v \qquad T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v^2 + \frac{m_2 l^2 \omega^2}{6} - \frac{1}{2} m_2 l v \omega$$

Сохранение импульса $\quad Q_y = Q_{y0} = 0 \;\Rightarrow\; m_1 v - m_2 v_C = 0 \;\Rightarrow\; l\omega = \dfrac{2(m_1 + m_2)}{m_2} v$

$$T = \frac{(4m_1 + m_2)(m_1 + m_2)}{6m_2} v^2 = m_2 \frac{gl}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{v = \frac{m_2\sqrt{3gl}}{\sqrt{(4m_1 + m_2)(m_1 + m_2)}}}$$

19. Основные теоремы и законы сохранения

Характеристика движения	Основная теорема	Закон сохранения	Системы, для которых верен закон сохранения
Количество движения (импульс)	$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^e$	$\mathbf{Q} = \mathrm{Const}$	Замкнутые системы и произвольные системы с $\mathbf{F}^e = 0$
Момент количеств движения	$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e$	$\mathbf{K}_O = \mathrm{Const}$	Замкнутые системы и произвольные системы с $\mathbf{M}_O^e = 0$
Кинетическая энергия	$dT = d'A$	$T = \mathrm{Const}$	Консервативные системы при движении по поверхности уровня и произвольные системы с $d'A = 0$
Полная энергия	$dE = d'A^{**}$	$E = \mathrm{Const}$	Консервативные системы