

# ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

---

## ЛЕКЦИЯ 3: ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

# 1. Кинетическая энергия МС. Теорема Кенига

---

**Кинетической энергией материальной системы** называется сумма кинетических энергий входящих в нее точек

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2$$

При вычислении кинетической энергии системы полезна **теорема Кенига**

**Теорема** Кинетическая энергия материальной системы в ее абсолютном движении ( $T$ ) складывается из кинетической энергии  $T_0$  центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии  $T_{\text{отн}}$  системы в ее движении относительно поступательно перемещающихся в инерциальном пространстве вместе с центром масс осей.

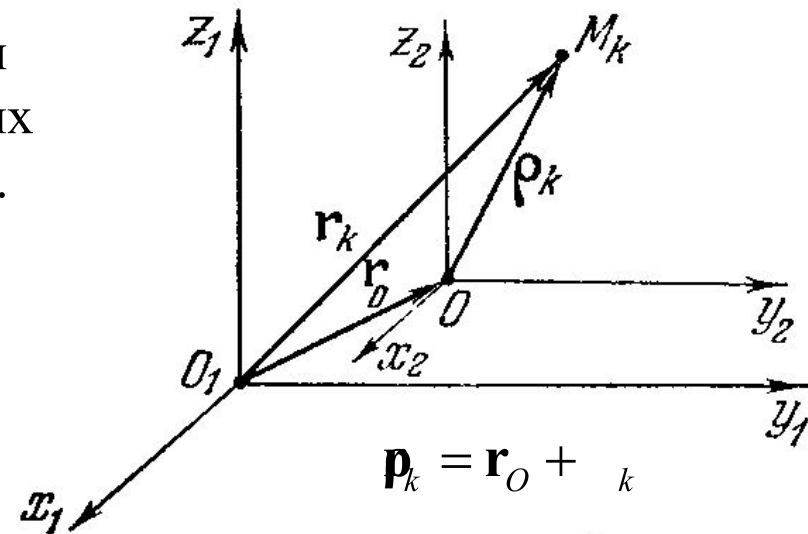
$$T = T_{\text{отн}} + T$$

## 2. Доказательство теоремы Кенига

Подвижные координаты (2) перемещаются поступательно относительно инерциальных осей (1) вместе с центром  $O$  масс системы.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{v}_O + \mathbf{u}_k) \cdot (\mathbf{v}_O + \mathbf{u}_k) = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{k=1}^n m_k}_{\frac{1}{2} M v_0^2} + \cancel{\mathbf{v}_O \cdot \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{u}_k} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k u_k^2}_{T_{отн}}
 \end{aligned}$$

$$T = T_{отн} + T$$



$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}_k$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_O + \mathbf{u}_k$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{p}_k = 0$$

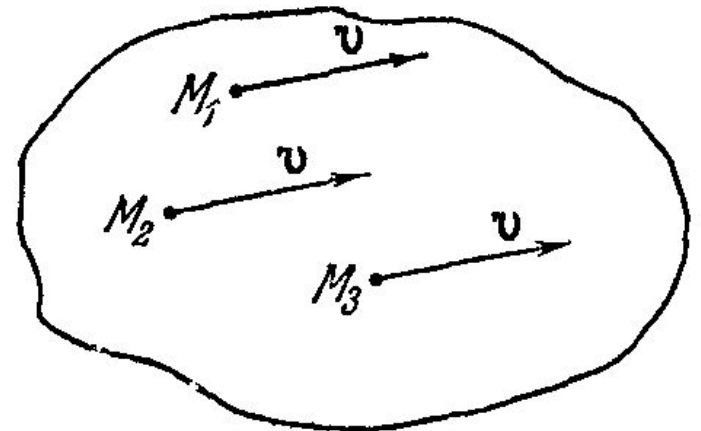
$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{u}_k = 0$$

### 3. Кинетическая энергия ТТ, движущегося поступательно

---

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} v^2 \int dm = \frac{1}{2} Mv^2$$

$$T = \frac{1}{2} Mv^2$$



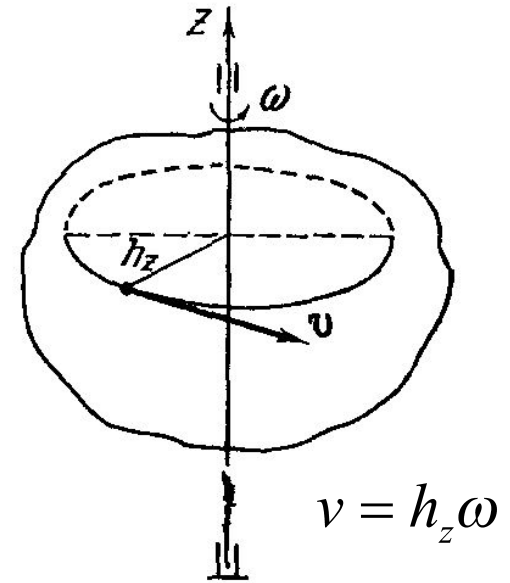
кинетическая энергия ТТ, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости

## 4. Кинетическая энергия ТТ, вращающегося относительно оси

---

$$T = \frac{1}{2} \int \omega^2 h_z^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int h_z^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$



кинетическая энергия ТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела

# 5. Кинетическая энергия ТТ, движущегося произвольно

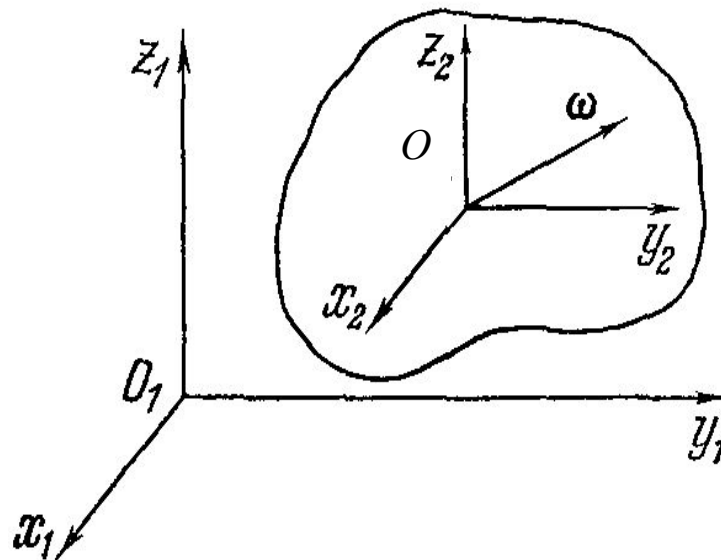
Теорема Кенига  $T = \frac{1}{2} M v_{\text{отн}}^2 + T$

Кинематика: движение тела относительно поступательно перемещающихся осей (2) представляет собой вращение с угловой скоростью  $\omega$

$$T_{\text{отн}} = \frac{1}{2} I_{O\omega} \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_{O\omega} \omega^2$$

В общем случае  $I_{O\omega}$  переменная величина т.к. ось вращения изменяет свое положение



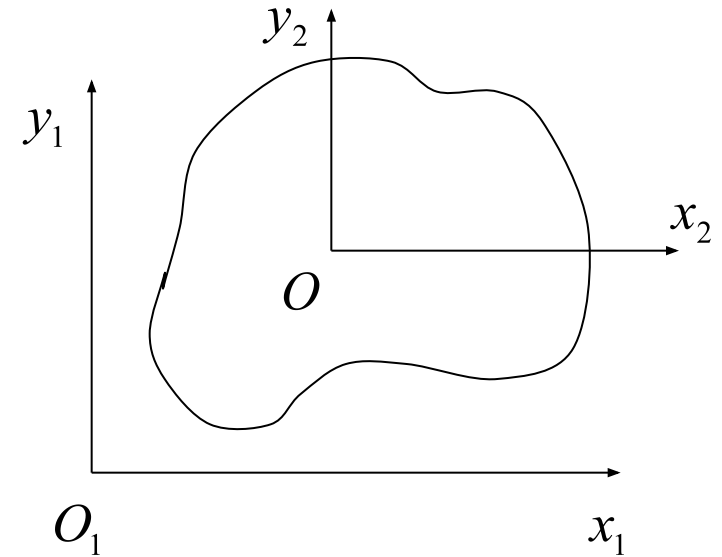
кинетическая энергия ТТ складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии в его вращении относительно центра масс

## 6. Кинетическая энергия ТТ при ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

---

$$\boldsymbol{\omega} \parallel O z_2$$

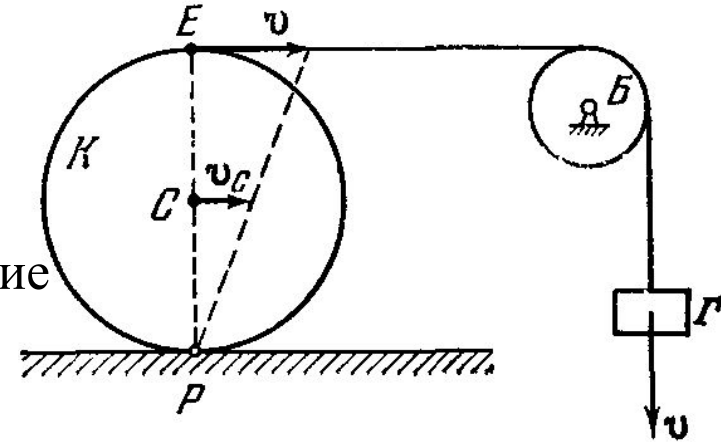
$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_{O z_2} \omega^2$$



Ось  $O z_2$  не меняет своего положения относительно тела, поэтому момент инерции  $I_{O z_2}$  не меняется с течением времени

# 7. Пример вычисления кинетической энергии

Каток К массы  $m_1$  лежит на горизонтальной плоскости. Каток обмотан тросом, перекинутым через блок Б радиуса  $r$ . К свободному концу троса прикреплен груз Г массы  $m_3$ . При опускании груза со скоростью  $v$  трос, разматываясь, приводит в качение без скольжения каток. Определить кинетическую энергию системы, если момент инерции блока Б относительно оси вращения равен  $I_2$



$$T_G = \frac{1}{2} m_3 v^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} I_2 \omega_B^2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{v^2}{r^2}$$

Скорость точки касания блока с тросом равна скорости  $v$  груза Г.

$$T_K = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_C^2$$

$$v_C = \frac{v}{2}$$

$$\omega_C = \frac{v - v/2}{R} = \frac{v}{2R}$$

$$I_{Cz} = \frac{m_1 R^2}{2}$$

$$T_K = \frac{3}{16} m_1 v^2$$

$$M_{np} = m_3 + \frac{I_2}{r^2} + \frac{3m_1}{8}$$



# 8. Теорема об изменении кинетической энергии

$$d\left(\frac{m_1 v_1^2}{2}\right) = \mathbf{F}_1^e \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_1^i \cdot d\mathbf{r}_1$$

+

$$d\left(\frac{m_n v_n^2}{2}\right) = \mathbf{F}_n^e \cdot d\mathbf{r}_n + \mathbf{F}_n^i \cdot d\mathbf{r}_n$$

$$dT = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^i \cdot d\mathbf{r}_k$$

Дифференциальная форма теоремы об изменении кинетической энергии :  
дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2}\right)_0 = A_{11}^e + A_1^i$$

+

$$\dots$$
$$\frac{m_n v_n^2}{2} - \left(\frac{m_n v_n^2}{2}\right)_0 = A_n^e + A_n^i$$

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i$$

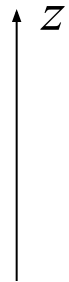
Интегральная форма теоремы:  
изменение кинетической энергии системы при перемещении ее из какой-то начальной конфигурации в данную равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил

## 9. Работа сил тяжести

---

$$\begin{aligned}\sum_k d'A_k^e &= \sum_k m_k \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}_k = -\sum_k m_k g \cdot dz_k = \\ &= -gd \left( \sum_k m_k z_k \right) = -gd (Mz_C) = -gMdz_C\end{aligned}$$

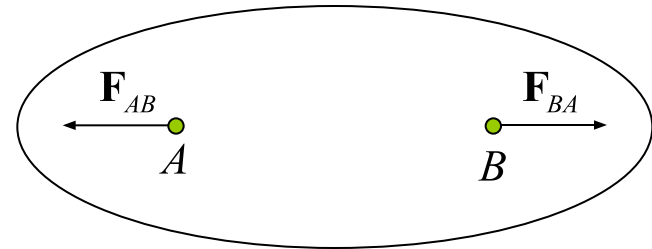
$$A^{(e)} = -Mg \int_{z_{0C}}^{z_C} dz_C = -Mg (z_C - z_{0C})$$



Полная работа сил тяжести системы равна весу всей системы, умноженному на вертикальное перемещение ее центра тяжести

# 10. Работа внутренних сил твердого тела

$$N_{AB} = \mathbf{F}_{AB} \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_{BA} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{F}_{AB} \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)$$



Кинематика  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{BA}$

$$N_{AB} = \mathbf{F}_{AB} \cdot \left( \begin{array}{c} \mathbf{BA} \\ \perp \mathbf{F}_{AB} \end{array} \right) = 0$$

$$N^i = \sum_{A,B} N_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^i = \sum_{A,B} A_{AB} = 0$$

Сумма работ всех внутренних сил абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю

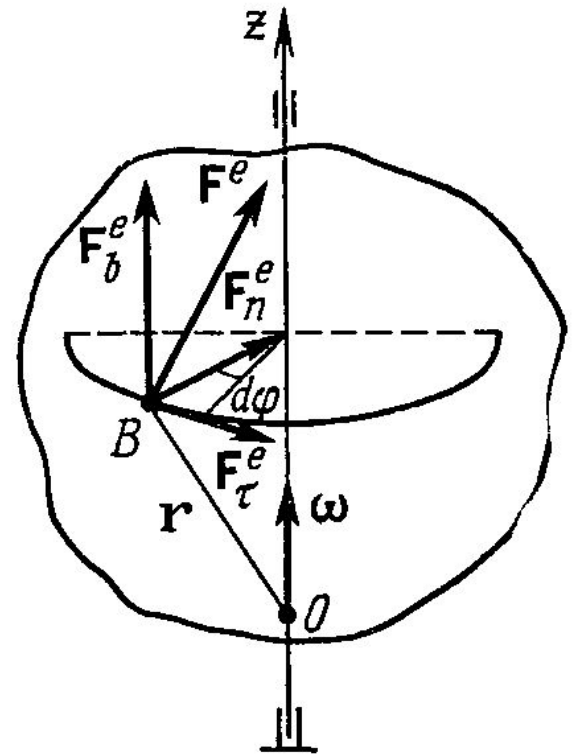
# 11. Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу

$$d'A^e = F_\tau^e ds = F_\tau^e h d\varphi = M_z^e d\varphi$$

Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна моменту этой силы относительно оси вращения, умноженному на дифференциал угла поворота тела

Мощность:

$$N^e = M_z^e \omega_z$$

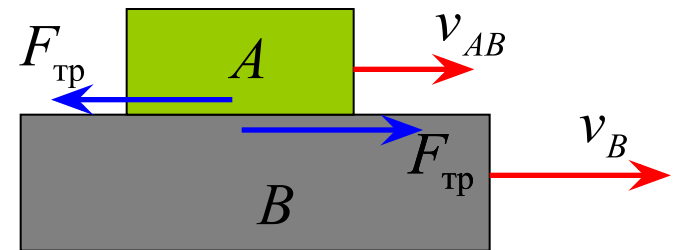


# 12. Работа внутренних сил скольжения сочлененных тел

$v_{AB}$  Скорость  $A$  относительно  $B$

$$v_A = v_B + v_{AB}$$

$$N_{\text{тр}}^i = -F_{\text{тр}} v_A + F_{\text{тр}} v_B = -F_{\text{тр}} v_{AB}$$

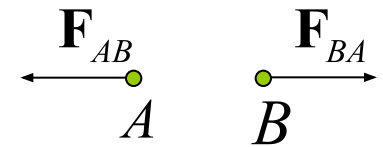


Полная мощность внутренних сил трения скольжения двух сочлененных тел равна взятому со знаком минус произведению модуля силы трения на модуль относительной скорости.

# 13. Работа потенциальных внутренних сил

$$\mathbf{F}_{AB} \cdot d\mathbf{r}_A + \mathbf{F}_{BA} \cdot d\mathbf{r}_B = \mathbf{F}_{AB} \cdot (d\mathbf{r}_A - d\mathbf{r}_B) =$$

$$= \mathbf{F}_{AB} \cdot d\overrightarrow{BA} = f(\rho_{AB}) d\rho_{AB} = -du(\rho_{AB})$$



$$|\mathbf{F}_{AB}| = |\mathbf{F}_{BA}| = f(\rho_{AB})$$

$$u(\rho) = -\int f(\rho) d\rho$$

$$U^i = \sum_{k,l} u(\rho_{kl})$$

$$\begin{aligned} 2\rho_{AB} d\rho_{AB} &= d\rho_{AB}^2 = d(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}) = \\ &= 2\overrightarrow{BA} \cdot d\overrightarrow{BA} = 2\rho_{AB} \frac{\mathbf{F}_{AB} \cdot d\overrightarrow{BA}}{|\mathbf{F}_{AB}|} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^i \cdot d\mathbf{r}_k = \frac{1}{2} \sum_{k,l} f(\rho_{kl}) d\rho_{kl} = -d \sum_{k,l} u(\rho_{kl}) = -dU^i$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^i \cdot d\mathbf{r}_k = -dU^i$$

$U^i$ -потенциальная энергия внутренних сил (внутренняя энергия)

# 14. Работа потенциальных внешних сил

На точку #1 действуют потенциальные внешние силы

$$\mathbf{F}_1^e = -\nabla U_1^e(\mathbf{r}_1)$$

На точку #2 действуют потенциальные внешние силы

$$\mathbf{F}_2^e = -\nabla U_2^e(\mathbf{r}_2)$$

• • •

На точку #n действуют потенциальные внешние силы

$$\mathbf{F}_n^e = -\nabla U_n^e(\mathbf{r}_n)$$

$$d'A^e = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k = -\sum_{k=1}^n \nabla U_k^e(\mathbf{r}_k) \cdot d\mathbf{r}_k = -\sum_{k=1}^n dU_k^e(\mathbf{r}_k) = -dU^e$$

$$U^e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \sum_{k=1}^n U_k^e(\mathbf{r}_k)$$

$U^e$ -потенциальная энергия внешних сил

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k = -dU^e$$

# 15. Закон сохранения полной механической энергии

---

Допустим, что внутренние и внешние силы, работа которых отлична от нуля, потенциальны (нулю может равняться работа идеальных связей).

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^i \cdot d\mathbf{r}_k = -dU^i \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k = -dU^e$$

$$d(T + U^e + U^i) = 0$$

$$E = T + U^e + U^i = \text{Const}$$

интеграл энергии

$U^e$ -потенциальная  
энергия внешних сил  
 $U^i$ -внутренняя  
энергия

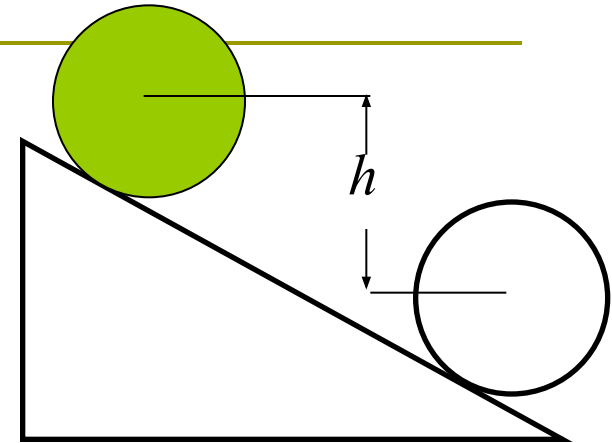
$E$ -полная механическая  
энергия системы

Систему, для которой имеет место интеграл энергии, называют **консервативной**.



# 16. Пример # 1

Цилиндр катится без скольжения по наклонной плоскости. Начальная скорость равна нулю. Найти скорость центра масс цилиндра в момент времени когда он опустился на величину  $h$ .



$$T + U^e = (T + U^e)_0$$

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\frac{V^2}{R^2} = \frac{3}{4}MV^2$$

$$\frac{3}{4}MV^2 = Mgh$$

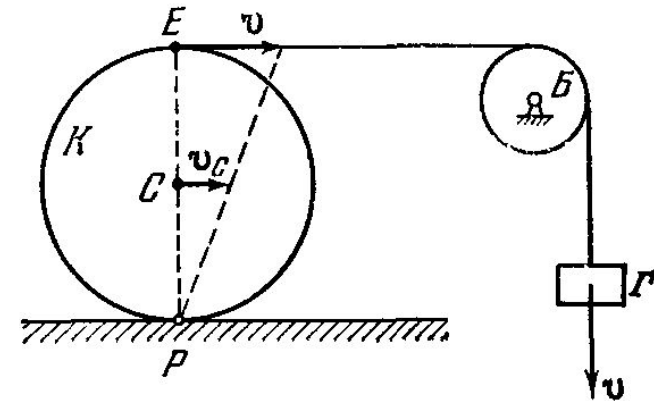
$$V = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Если это тело спускается не вращаясь, имеем  $\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$

Следовательно, вращение уменьшает скорость  $V$

# 17. Пример # 2

Груз  $\Gamma$  под действием силы тяжести опускается из состояния покоя вниз. Определить скорость  $v$  груза  $\Gamma$  при опускании его на высоту  $h$ . Трением качения катка и трением на оси блока пренебречь.



Связи идеальны. Внутренняя энергия равна нулю

$$T + U^e = (T + U^e)_0$$

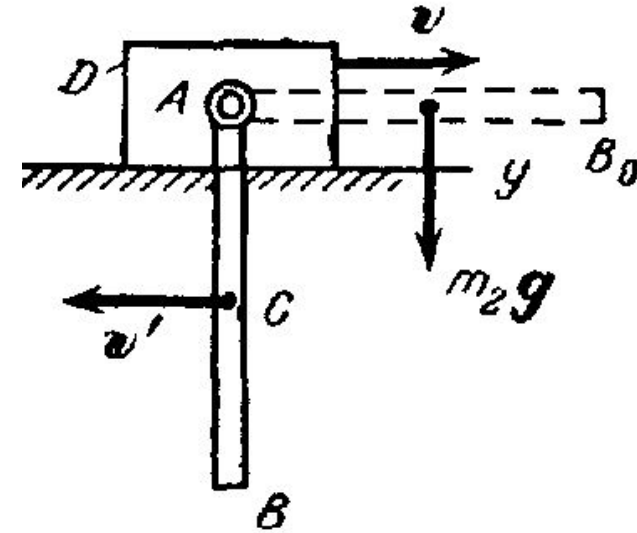
$\frac{1}{2} M_{np} v^2$        $-m_3 gh$        $0$        $0$

$$v = \sqrt{2 \frac{m_3}{M_{np}} gh}$$

$$M_{np} = m_3 + \frac{I_2}{r^2} + \frac{3m_1}{8}$$

# 18. Пример использования 2

К брусу D массы  $m_1$  лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплен шарнирно в точке A однородный стержень AB, имеющий массу  $m_2$  и длину  $l$ . Система начинает движение из состояния покоя в момент, когда стержень отклонен до горизонтального положения  $AB_0$ . Пренебрегая трением в оси A, найти скорость  $v$  бруса в тот момент, когда стержень проходит через вертикаль.



Сохранение энергии  $T + U^e = (T + U^e)_0 = 0 \quad U^e = -m_2 g \frac{l}{2}$

$$T = T_D + T_{AB} \quad T_D = \frac{1}{2} m_1 v^2 \quad T_{AB} = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cx} \omega^2$$

$$I_{Cx} = \frac{m_2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} m_2 l^2 \quad v_C = v' - v \quad v' - \text{ скорость C относительно A} \quad v' = \frac{1}{2} l \omega$$

$$v_C = \frac{1}{2} l \omega - v \quad T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{m_2 l^2 \omega^2}{6} - \frac{1}{2} m_2 l v \omega$$

Сохранение импульса  $Q_y = Q_{y0} = 0 \Rightarrow m_1 v - m_2 v_C = 0 \Rightarrow l \omega = \frac{2(m_1 + m_2)}{m_2} v$

$$T = \frac{(4m_1 + m_2)(m_1 + m_2)}{6m_2} v^2 = m_2 \frac{gl}{2} \Rightarrow$$

$$v = \frac{m_2 \sqrt{3gl}}{\sqrt{(4m_1 + m_2)(m_1 + m_2)}}$$

# 19. Основные теоремы и законы сохранения

| Характеристика движения       | Основная теорема                            | Закон сохранения              | Системы, для которых верен закон сохранения  |
|-------------------------------|---|-------------------------------|--|
| Количество движения (импульс) | $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^e$     | $\mathbf{Q} = \text{Const}$   | Замкнутые системы и произвольные системы с $\mathbf{F}^e = 0$                                |
| Момент количества движения    | $\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e$ | $\mathbf{K}_O = \text{Const}$ | Замкнутые системы и произвольные системы с $\mathbf{M}_O^e = 0$                              |
| Кинетическая энергия          | $dT = d'A$                                  | $T = \text{Const}$            | Консервативные системы при движении по поверхности уровня и произвольные системы с $d'A = 0$ |
| Полная энергия                | $dE = d'A^{**}$                             | $E = \text{Const}$            | Консервативные системы   |