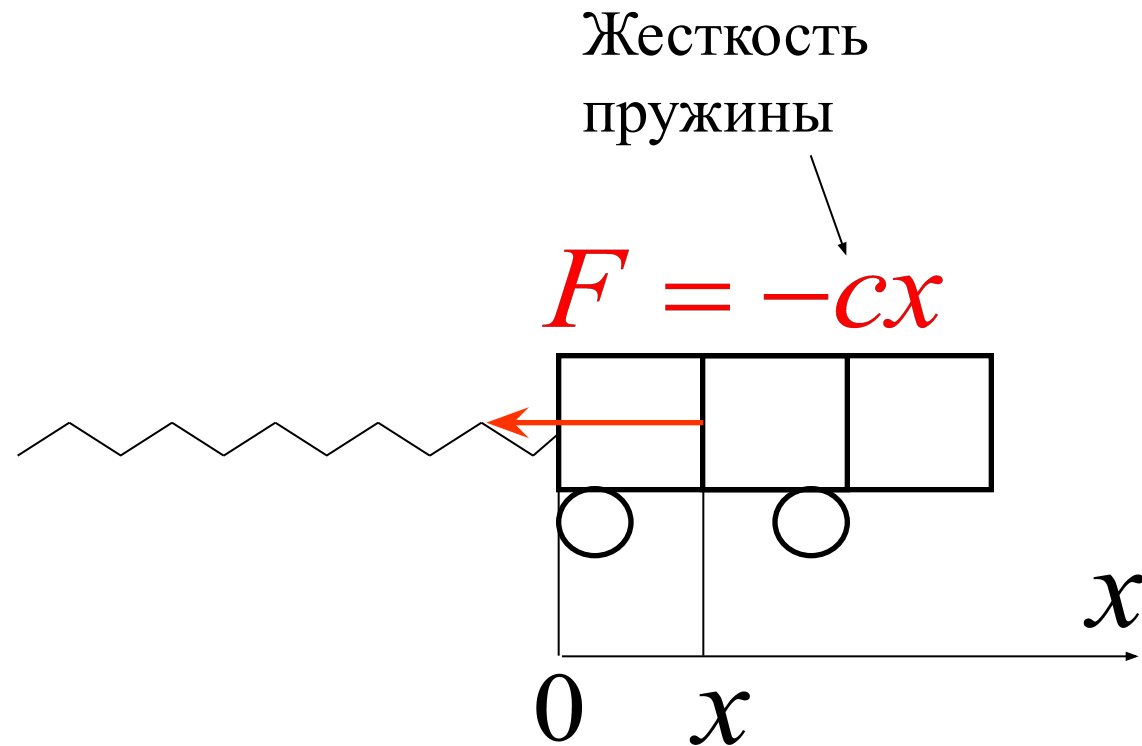


ДИНАМИКА ТОЧКИ

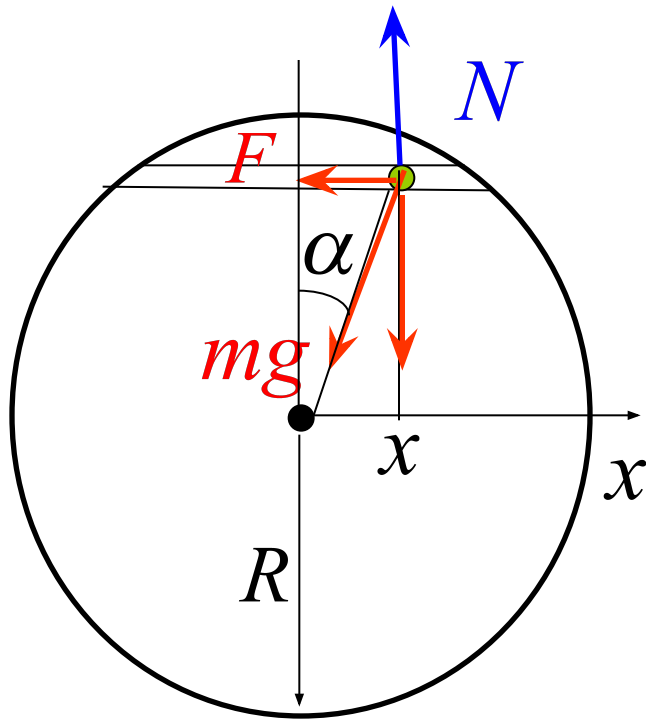
ЛЕКЦИЯ 3: ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ



$$m\ddot{x} + cx = 0$$

2. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ



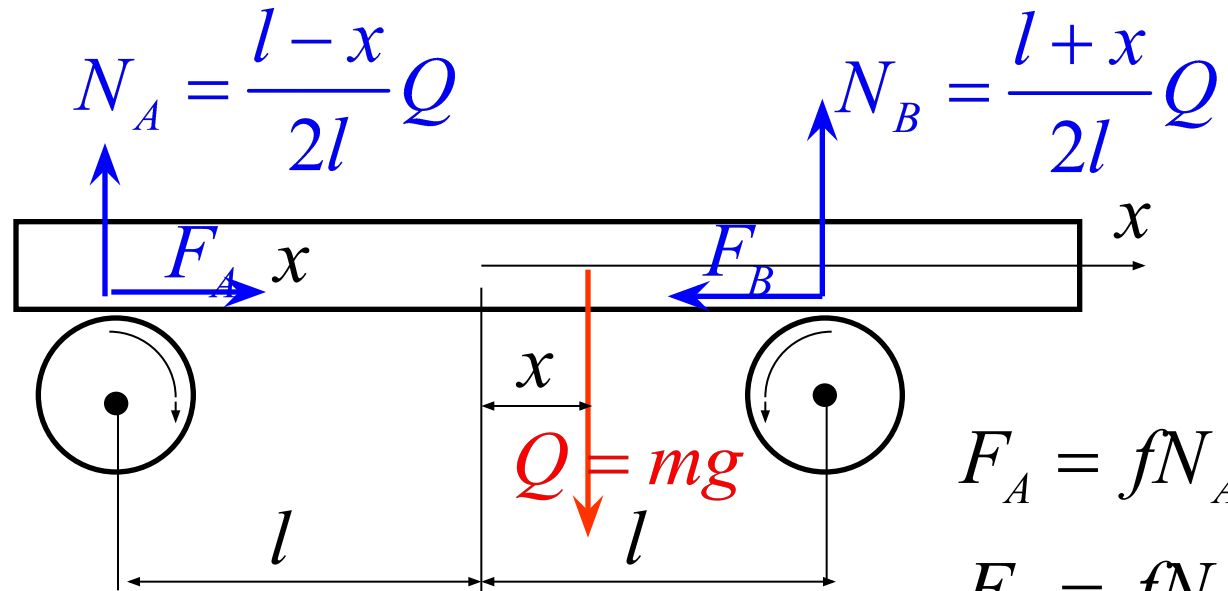
$$F = mg \sin \alpha \approx mg \frac{x}{R}$$

$$\ddot{m}x = -F = -\frac{mg}{R}x$$

$$\ddot{m}x + cx = 0$$

$$c = mg / R$$

3. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ



$$N_A + N_B = 0$$

$$lN_A - lN_B = -Qx$$

$$F_A = fN_A$$

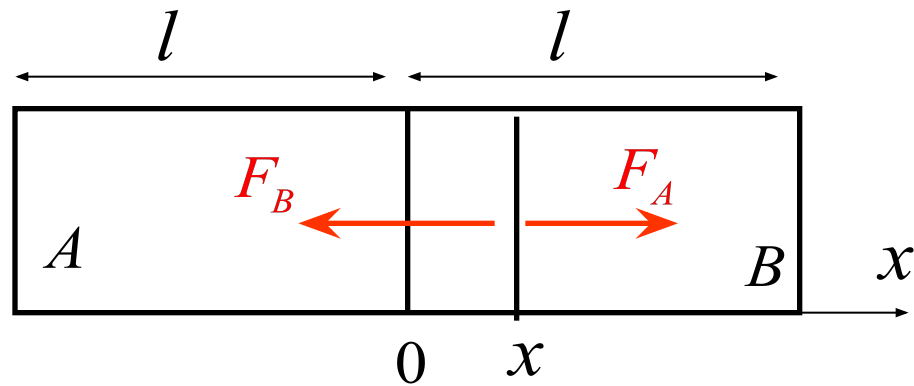
$$F_B = fN_B$$

$$\ddot{m}x = F_A - F_B = -\frac{fmg}{l}x$$

$$\ddot{m}x + cx = 0$$

$$c = \frac{fmg}{l}$$

4. ПРИМЕРЫ КОЛЕБАНИЙ



$$F_B = Sp_B = S \frac{p_0 V_0}{V_B} = \frac{Sp_0 l}{l - x} \quad F_A = \frac{Sp_0 l}{l + x}$$

$$\ddot{m}x = F_A - F_B = -\frac{2Sp_0 l}{l^2 - x^2} x \approx -\frac{2Sp_0}{l} x$$

$$\ddot{m}x + cx = 0$$

$$c = \frac{2Sp_0}{l}$$

5. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Действующие силы	Дифференциальное уравнение	Наименование вида колебаний
Восстанавливающая сила $F(x)$ $F(x) = -cx$	$\ddot{m}x + cx = 0$	Свободные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ + сила сопротивления $R(\dot{x})$ $F(x) = -cx \quad R(\dot{x}) = -b\dot{x}$	$\ddot{m}x + b\dot{x} + cx = 0$	Свободные колебания с вязким трением
Восстанавливающая сила $F(x)$ + возмущающая сила $Q(t)$ $F(x) = -cx \quad Q = Q(t)$	$\ddot{m}x + cx = Q(t)$	Вынужденные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ + сила сопротивления $R(\dot{x})$ + возмущающая сила $Q(t)$ $F(x) = -cx \quad R(\dot{x}) = -b\dot{x} \quad Q = Q(t)$	$\ddot{m}x + b\dot{x} + cx = Q(t)$	Вынужденные колебания с вязким трением

6. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$k^2 = c/m$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

$$x = e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = \pm ik \Rightarrow x = e^{\pm ikt} = \cos t + i \sin t$$

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

$$C_1 = a \sin \varepsilon$$

$$C_2 = a \cos \varepsilon$$

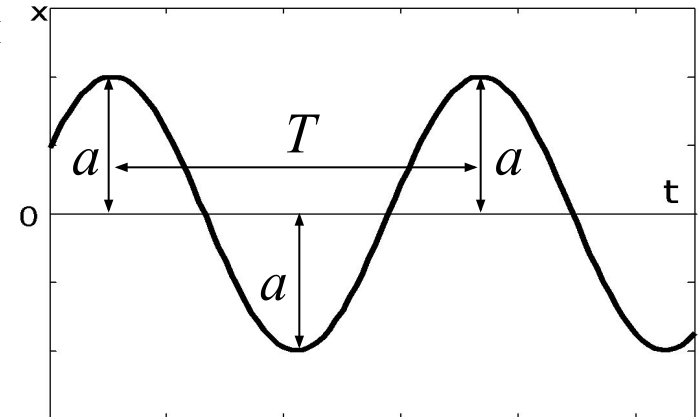
$$x = a \sin(kt + \varepsilon)$$

фаза
амплитуда частота начальная фаза

Частота колебаний определяет число колебаний, совершаемых точкой за 2π секунд. Частота колебаний k не зависит от начальных условий и определяется только параметрами системы (величинами c и m). По этому признаку частоту свободных колебаний называют также **собственной частотой**.

Наименьший промежуток времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется, называется **периодом колебаний (T)**.

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$



7. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

$$\ddot{m}x + \dot{b}x + cx = 0$$

$$k^2 = c/m, \quad 2h = b/m \quad \dot{x} + 2\dot{h}x + k^2x = 0$$

$$\alpha^2 + 2h\alpha + k^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

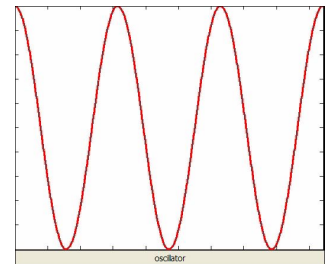
$$x = C_+ e^{\alpha_+ t} + C_- e^{\alpha_- t}$$

Малое сопротивление $h < k$

α_{\pm} - комплексно сопряженные

Большое сопротивление $h > k$

α_{\pm} - вещественные



8. МАЛОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

$$h < k$$

$$k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$$

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t)$$

$$C_1 = a \sin \varepsilon$$
$$C_2 = a \cos \varepsilon$$

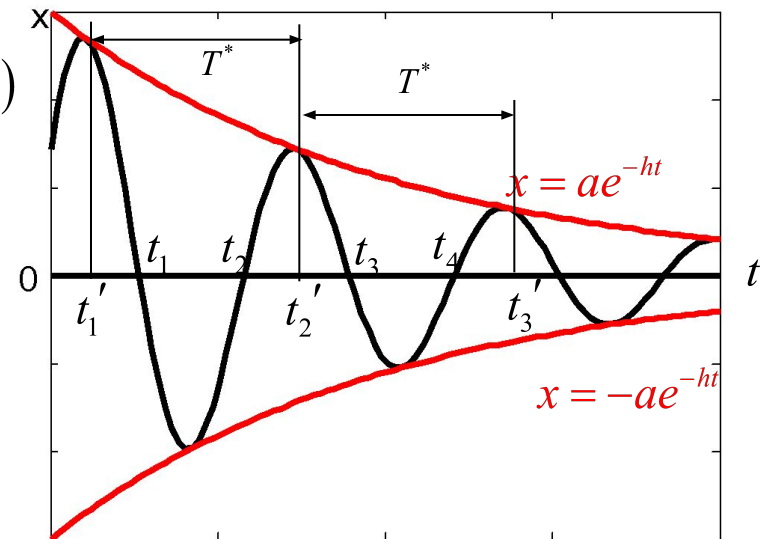
$$x = ae^{-ht} \sin(k^* t + \varepsilon)$$

1) Движение является затухающим $x \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$

2) Носит колебательный х-р: приближаясь к состоянию равновесия, система проходит через это состояние бесконечное число раз в моменты $t_n = (n\pi - \varepsilon) / k^*$

3) Движение неперiodично, но максимальные отклонения точки от точки равновесия хотя и уменьшаются со временем, но разнесены друг от друга на один и тот же промежуток времени $T^* = 2\pi / k^*$ период затухающих колебаний

4) Период затухающих колебаний больше чем у незатухающих



$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} > \frac{2\pi}{k}$$

9. МАЛОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

$$\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow -hae^{-ht} \sin(k^*t + \varepsilon) + ak^*e^{-ht} \cos(k^*t + \varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(k^*t + \varepsilon) = k^* / h$$

$$a_k = ae^{-ht'_k} \sin(k^*t'_k + \varepsilon) = ae^{-ht'_k} \sin(k^*t'_1 + \varepsilon)$$

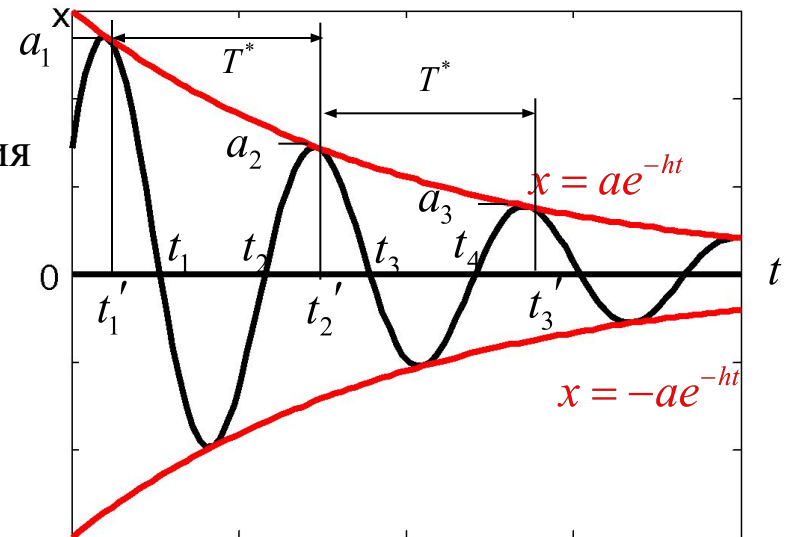
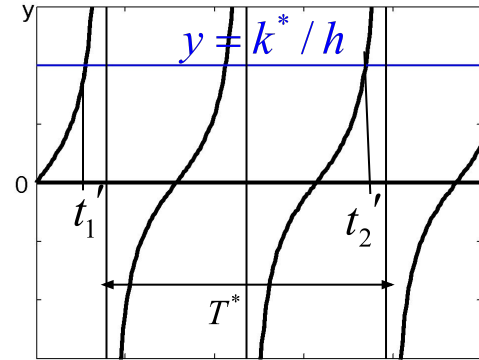
Амплитуды затухающих к-й

$$\eta = \frac{a_k}{a_{k-1}} = e^{-hT^*} \quad \text{Геометрическая прогрессия}$$

Декремент колебаний

$$|\ln \eta| = hT^*$$

Логарифмический декремент колебаний



10. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ СИТУАЦИЯ

$$k = h \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\pm} = -h \quad \Rightarrow \quad x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-ht} (x_0 + (x_0 + hx_0)t)$$

Движение является затухающим и апериодичным

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -h(x_0 + (x_0 + hx_0)t) + \dot{x}_0 + hx_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{\dot{x}_0}{h(x_0 + hx_0)}$$

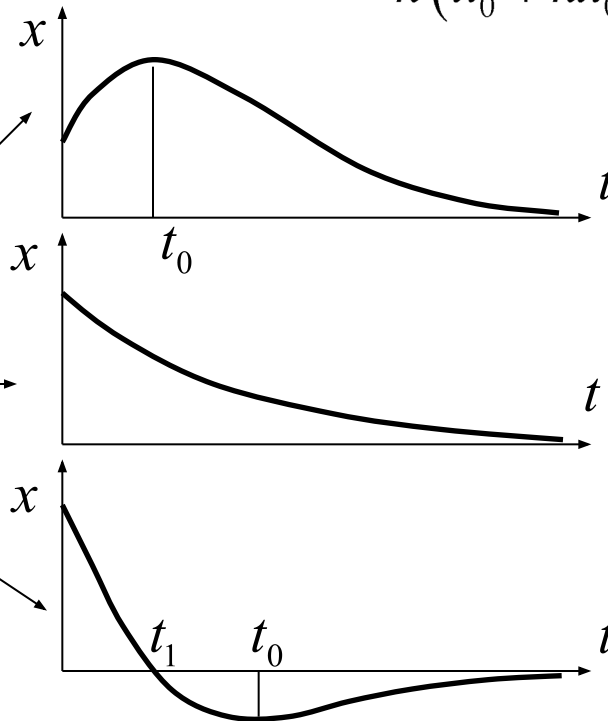
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}$$

$$x_0 > 0$$

$$\dot{x}_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 > 0, t_1 < 0 \quad \text{(A)}$$

$$-hx_0 < \dot{x}_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 < 0, t_1 < 0 \quad \text{(B)}$$

$$\dot{x}_0 < -hx_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 > 0, t_1 > 0 \quad \text{(C)}$$



11. БОЛЬШОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

$$h > k \Rightarrow \alpha_{\pm} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2} \Rightarrow x = C_+ e^{-\alpha_+ t} + C_- e^{-\alpha_- t}$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow x = \frac{\alpha_- x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_- - \alpha_+} e^{\alpha_+ t} + \frac{\alpha_+ x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_+ - \alpha_-} e^{\alpha_- t}$$

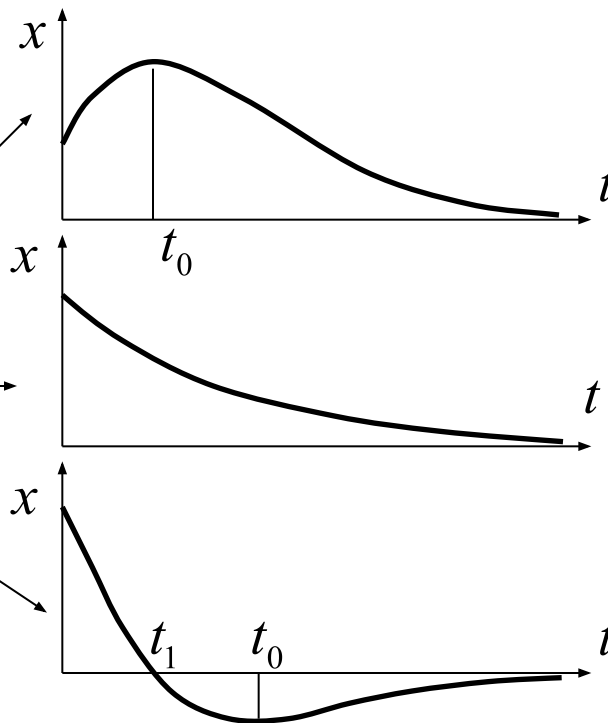
Движение является затухающим и аperiodическим

$$x_0 > 0$$

$$\dot{x}_0 > 0 \Rightarrow t_0 > 0, t_1 < 0 \quad (\text{A})$$

$$\alpha_- x_0 < \dot{x}_0 < 0 \Rightarrow t_0 < 0, t_1 < 0 \quad (\text{B})$$

$$\dot{x}_0 < \alpha_- x_0 \Rightarrow t_0 > 0, t_1 > 0 \quad (\text{C})$$



12. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$\ddot{x} + k^2 x = H \sin(pt + \delta)$$

← Гармоническая
вынуждающая сила

Общее решение = общее решение + частное решение
однородного у-я неоднородного у-я

$$x_1 = a \sin(kt + \varepsilon) \quad x_2 = A_0 \sin(pt + \delta)$$

$$A_0 p^2 \sin(pt + \delta) + A_0 k^2 \sin(pt + \delta) = H \sin(pt + \delta) \Rightarrow A_0 = \frac{H}{k^2 - p^2}$$

$$x = a \sin(kt + \varepsilon) + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

Движение = свободные колебания + вынужденные колебания

13. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

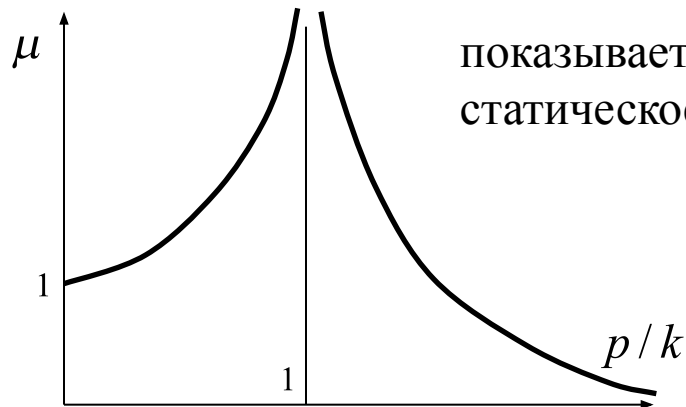
$$x = a \sin(kt + \varepsilon) + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

$$A = \frac{H}{|k^2 - p^2|} \quad \text{Амплитуда вынужденных колебаний}$$

$x_{\text{ст}}$ Величина статического отклонения точки от положения равновесия при действии, равной максимальному значению возмущающей силы

$$\dot{x} + k^2 x = H \Rightarrow x_{\text{ст}} = Hk^{-2}$$

Коэффициент динамичности $\mu = \frac{A}{x_{\text{ст}}} = \frac{A}{H/k^2} = \frac{1}{|1 - p^2/k^2|}$



показывает во сколько раз амплитуда колебаний превосходит статическое отклонение

14. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad x(0) = C_1 + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin \delta$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{Hp}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta) \quad \dot{x}(0) = C_2 k + \frac{Hp}{k^2 - p^2} \cos \delta$$

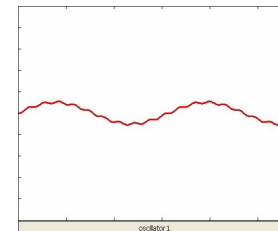
$$C_1 = x_0 - \frac{H}{k^2 - p^2} \sin \delta \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \frac{H}{k^2 - p^2} \cos \delta$$

$$x = \underbrace{x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt}_{\text{свободные колебания, вызванные начальными условиями}} - \underbrace{\frac{H}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right)}_{\text{свободные колебания, вызванные вынуждающей силой}} + \underbrace{\frac{H}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)}_{\text{чисто вынужденные колебания}}$$

свободные колебания,
вызванные начальными
условиями

свободные колебания,
вызванные вынуждающей
силой

чисто
вынужденные
колебания



15. БИЕНИЯ

$$x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

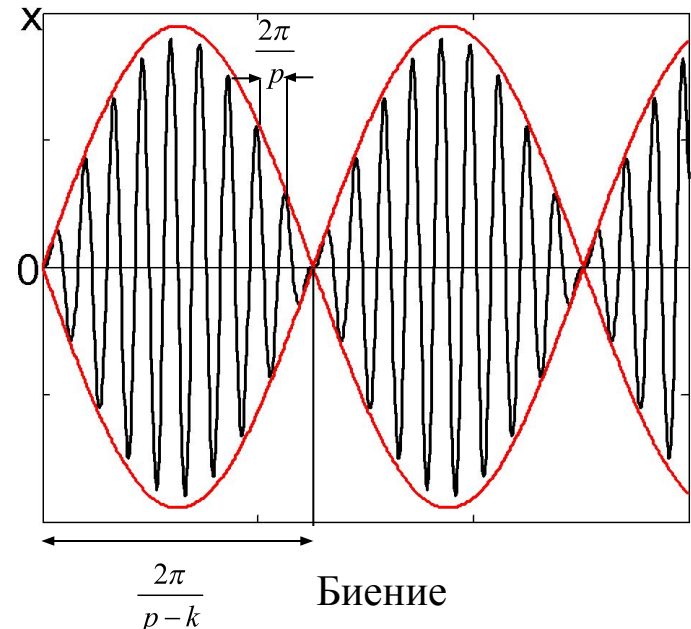
$$x = -\frac{H}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{H}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

$$p \approx k \Rightarrow x \approx \frac{H}{k^2 - p^2} (\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta))$$

$$x \approx \frac{2H}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2}t\right) \cos(pt + \delta)$$

$$p \rightarrow k \quad x \rightarrow \frac{H}{2k} t \cos(kt + \delta)$$

При $p=k$ амплитуда неограниченно растет со временем. Это явление называется **резонансом**



16. РЕЗОНАНС

$$\ddot{x} + k^2 x = H \sin(kt + \delta)$$

Общее решение = общее решение + частное решение
однородного у-я неоднородного у-я

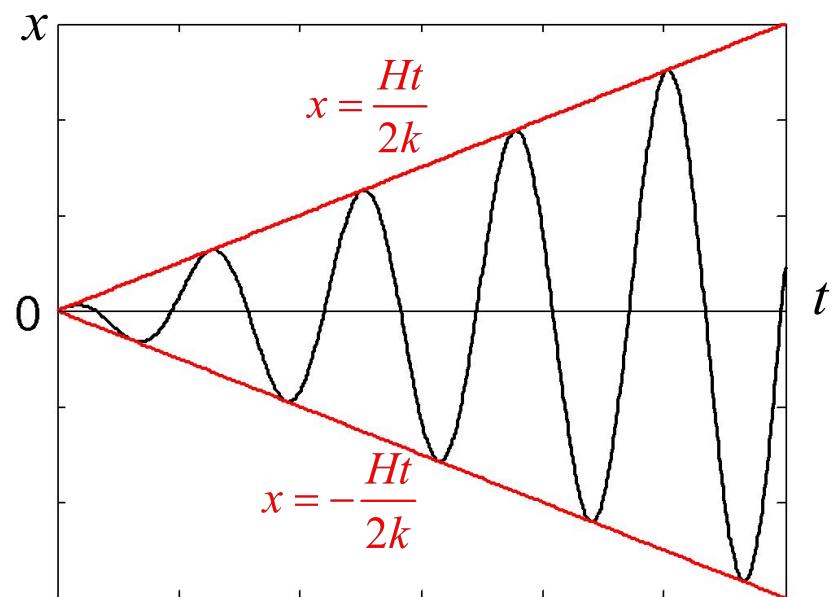
$$x_1 = a \sin(kt + \varepsilon) \quad x_2 = At \sin(kt + \gamma)$$

$$\dot{x}_2 = A \sin(kt + \gamma) + Akt \cos(kt + \gamma) \quad \dot{x}_2 = 2Ak \cos(kt + \gamma) - Ak^2 t \sin(kt + \gamma)$$

$$2Ak \cos(kt + \gamma) = H \sin(kt + \delta)$$

$$A = \frac{H}{2k}, \quad \gamma = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \sin(kt + \varepsilon) - \frac{Ht}{2k} \cos(kt + \delta)$$



Резонанс

17. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

$$\ddot{x} + 2\dot{h}x + k^2x = H \sin(pt + \delta)$$

Общее решение = общее решение + частное решение

$$k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$$

однородного у-я

неоднородного у-я

$$x_1 = ae^{-ht} \sin(k^*t + \varepsilon) \quad x_2 = A \sin(pt + \gamma)$$

$$\dot{x}_2 = Ap \cos(pt + \gamma) \quad \dot{x}_2 = -Ap^2 \sin(pt + \gamma)$$

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt + \gamma) + 2hpA \cos(pt + \gamma) = H \sin(pt + \delta) = \\ = H \sin(pt + \gamma) \cos(\delta - \gamma) + H \cos(pt + \gamma) \sin(\delta - \gamma)$$

$$\begin{cases} A(k^2 - p^2) = H \cos(\delta - \gamma) \\ 2phA = H \sin(\delta - \gamma) \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(\delta - \gamma) = \frac{2hp}{k^2 - p^2}$$

$$A = \frac{H}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}}$$

$$x = x_1 + A \sin(pt + \gamma)$$

Быстро
затухает

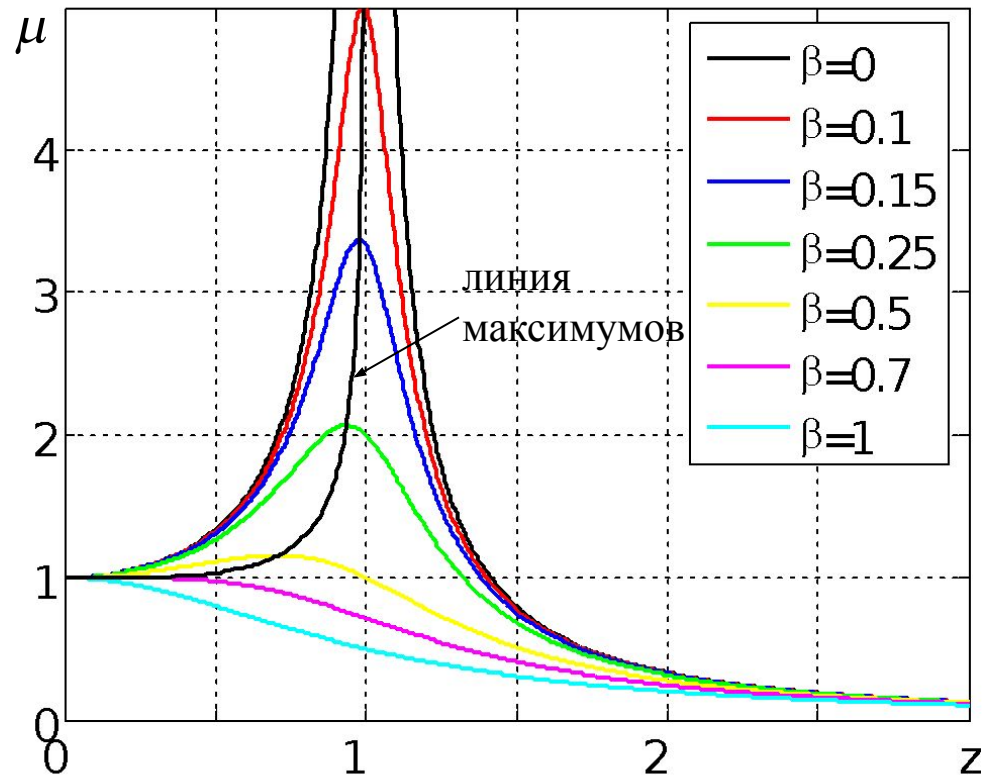
Главный
интерес

Основное
колебание

$$\mu = \frac{A}{A_{\text{ст}}} = \frac{A}{H/k^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}} \quad z = \frac{p}{k} \quad \beta = \frac{h}{k}$$

18. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

- 1) Амплитуда вынужденных колебаний при z , достаточно большом и достаточно малом по сравнению с $z=1$, мало зависит от сопротивления среды.
- 2) При z , близких к $z=1$, влияние сопротивления на амплитуду вынужденных колебаний весьма существенно.
- 3) При $z \rightarrow \infty$ амплитуда вынужденных колебаний асимптотически стремится к нулю. Это значит, что при большой частоте возмущающей силы по сравнению с собственной частотой амплитуда вынужденных колебаний мала.
- 4) При большом сопротивлении ($\beta < 0.7$) амплитуда вынужденных колебаний убывает с ростом z и не превосходит величины статического отклонения



Имеется максимум при $\beta < \sqrt{2}/2$

$$z_{\max} = \sqrt{1 - 2\beta^2} \quad \mu_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1 - \beta^2}}$$