



\*  
Колебания и волны.  
Геометрическая и волновая оптика

Кузнецов Сергей Иванович  
доцент кафедры  
ОФ ЕНМФ ТПУ

Сегодня: \*

## **Тема 2 СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

**2.1 Способы представления гармонических колебаний**

**2.2 Сложение гармонических колебаний. Биения**

**2.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний**

**2.4 Фигуры Лиссажу (частные случаи)**

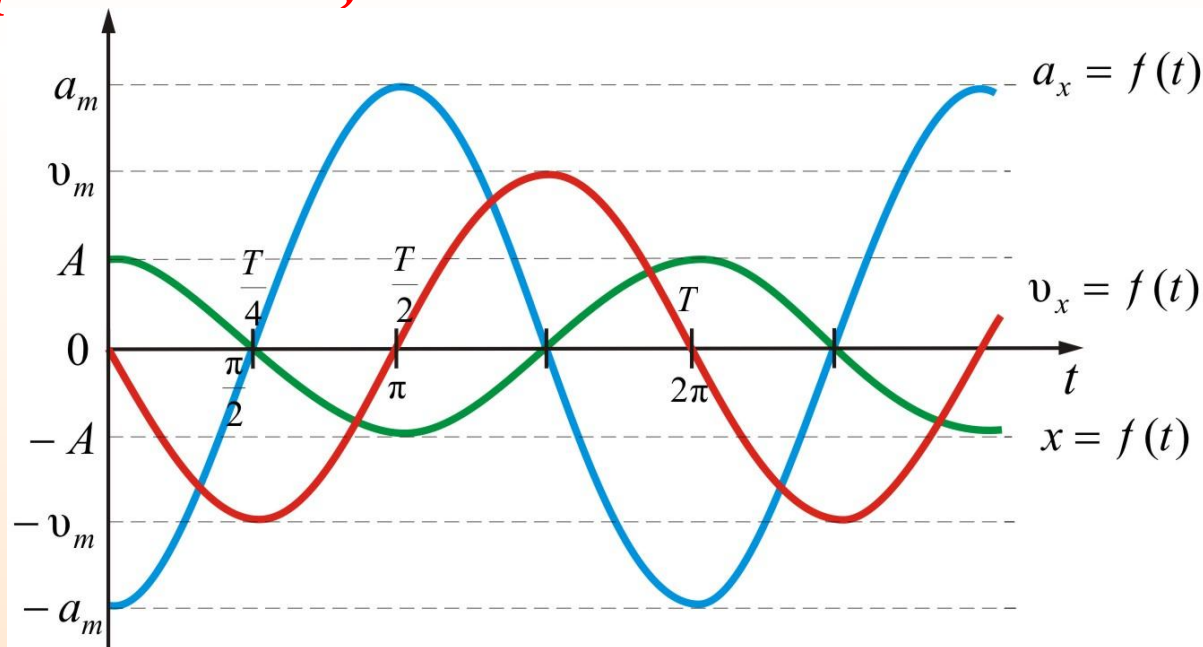
## 2.1 Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

**•аналитический:**  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

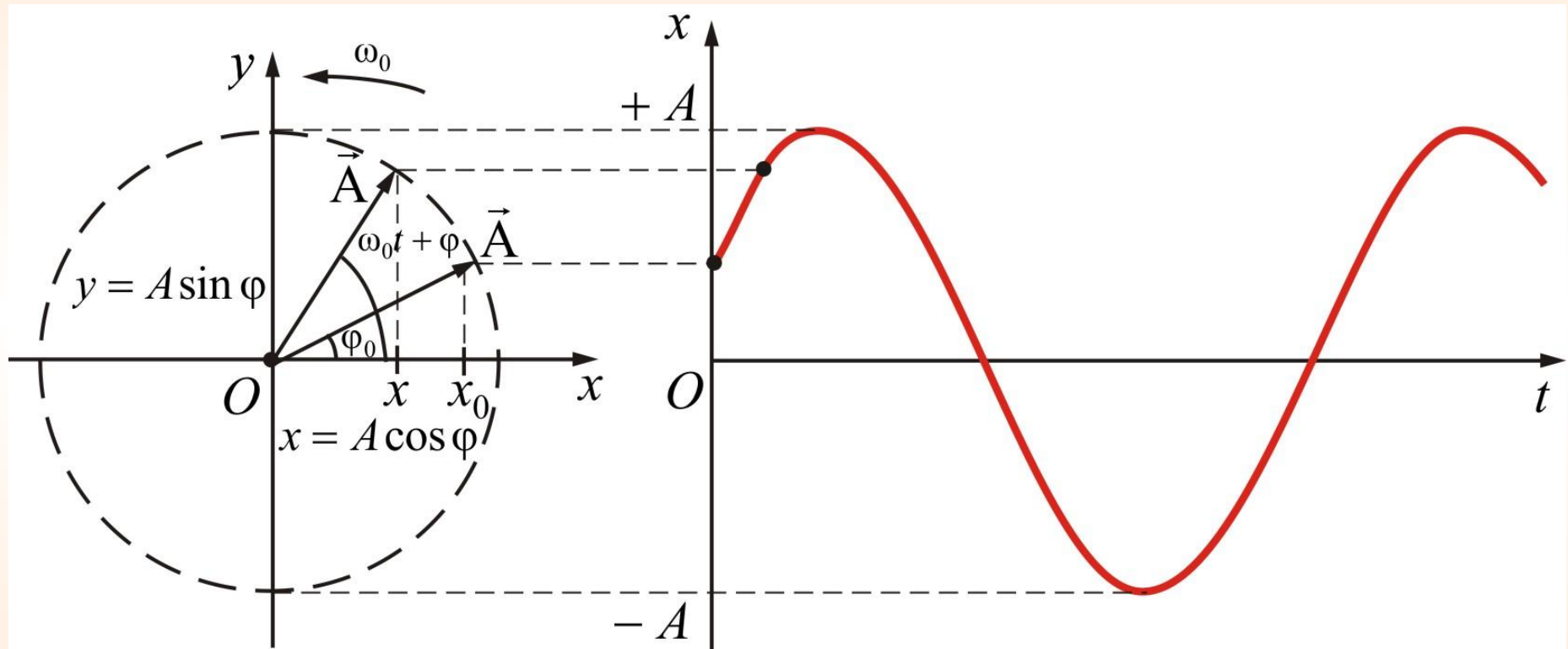
$$v_x = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad a_x = -a_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

**•графический;**



**•геометрический,** с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм).

Рассмотрим подробнее **геометрический** способ, с помощью вектора амплитуды (**метод векторных диаграмм**).



$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

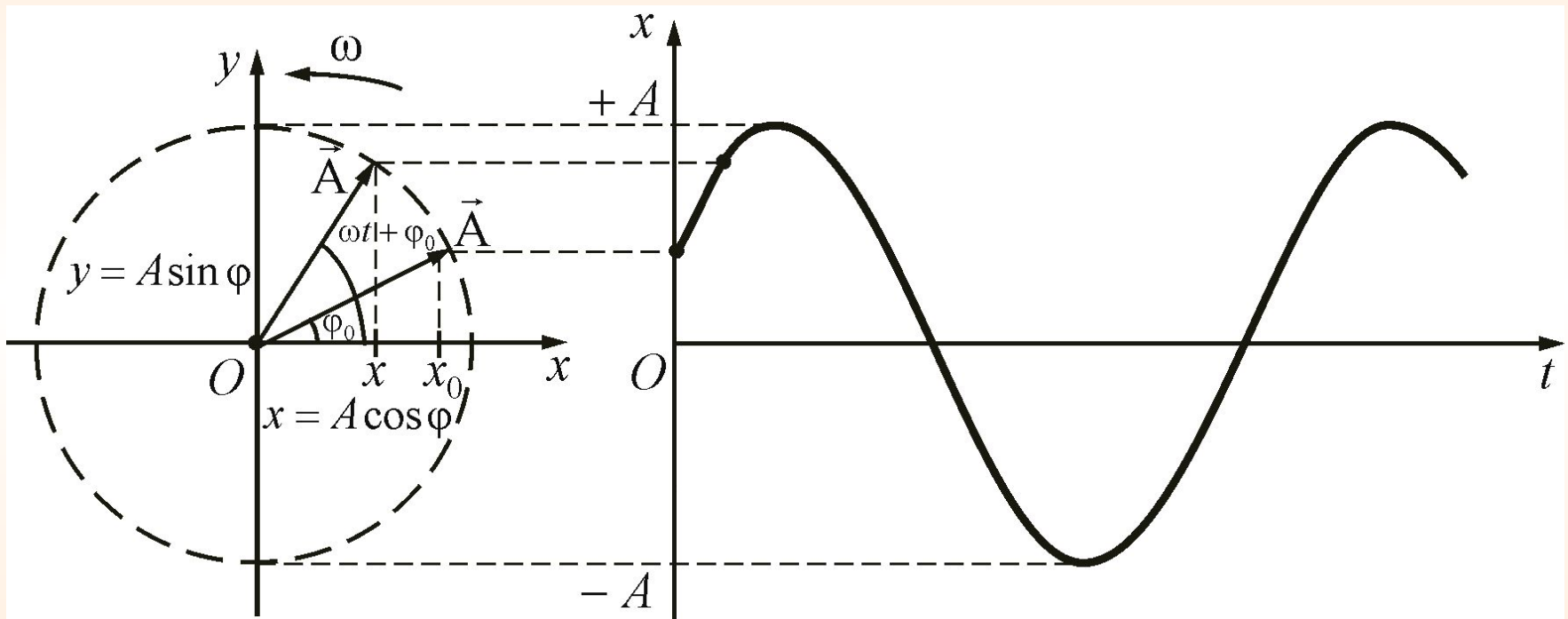
$$x_0 = A \cos \varphi_0$$

**$Ox$  – опорная прямая**

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_0 = A \cos \varphi_0$$

Вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.



Проекция кругового движения на ось  $y$ , также совершает гармоническое колебание

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

## 2.2 Сложение гармонических колебаний. Биения



Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая гармонически колеблющимся шариком.

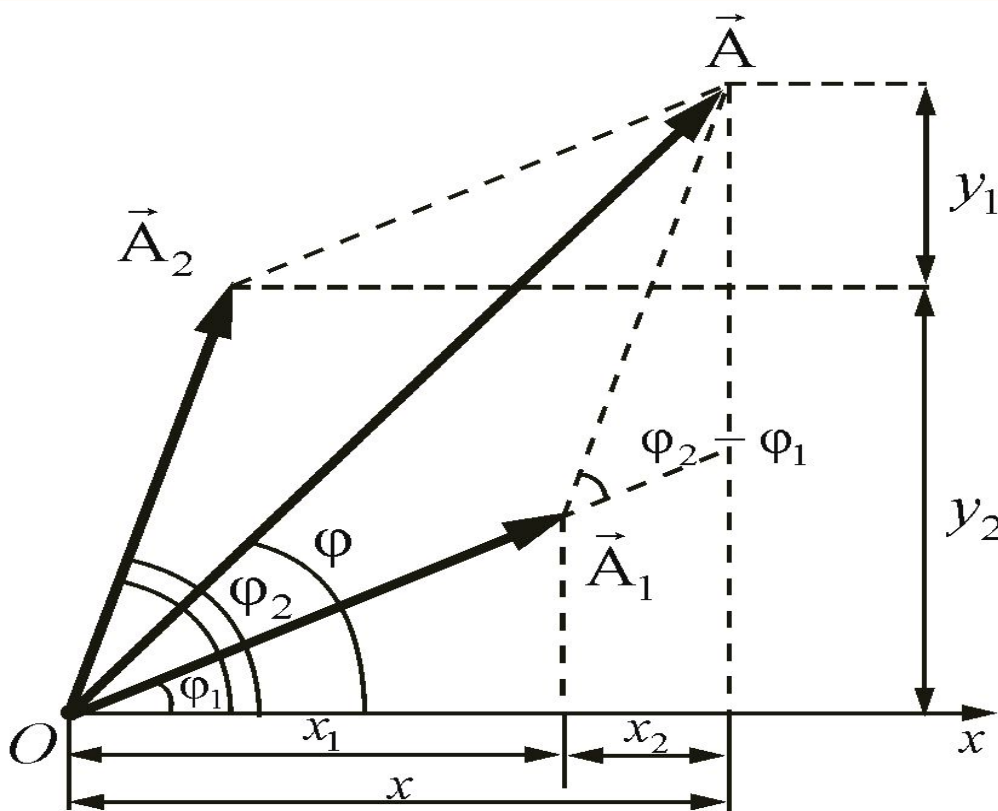


Интерференция между двумя круговыми волнами от точечных источников, колеблющихся в фазе друг с другом. На поверхности жидкости образуются узловые линии, в которых колебание тах. или отсутствует.

Пусть *точка* одновременно участвует *в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.*

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (2.2.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

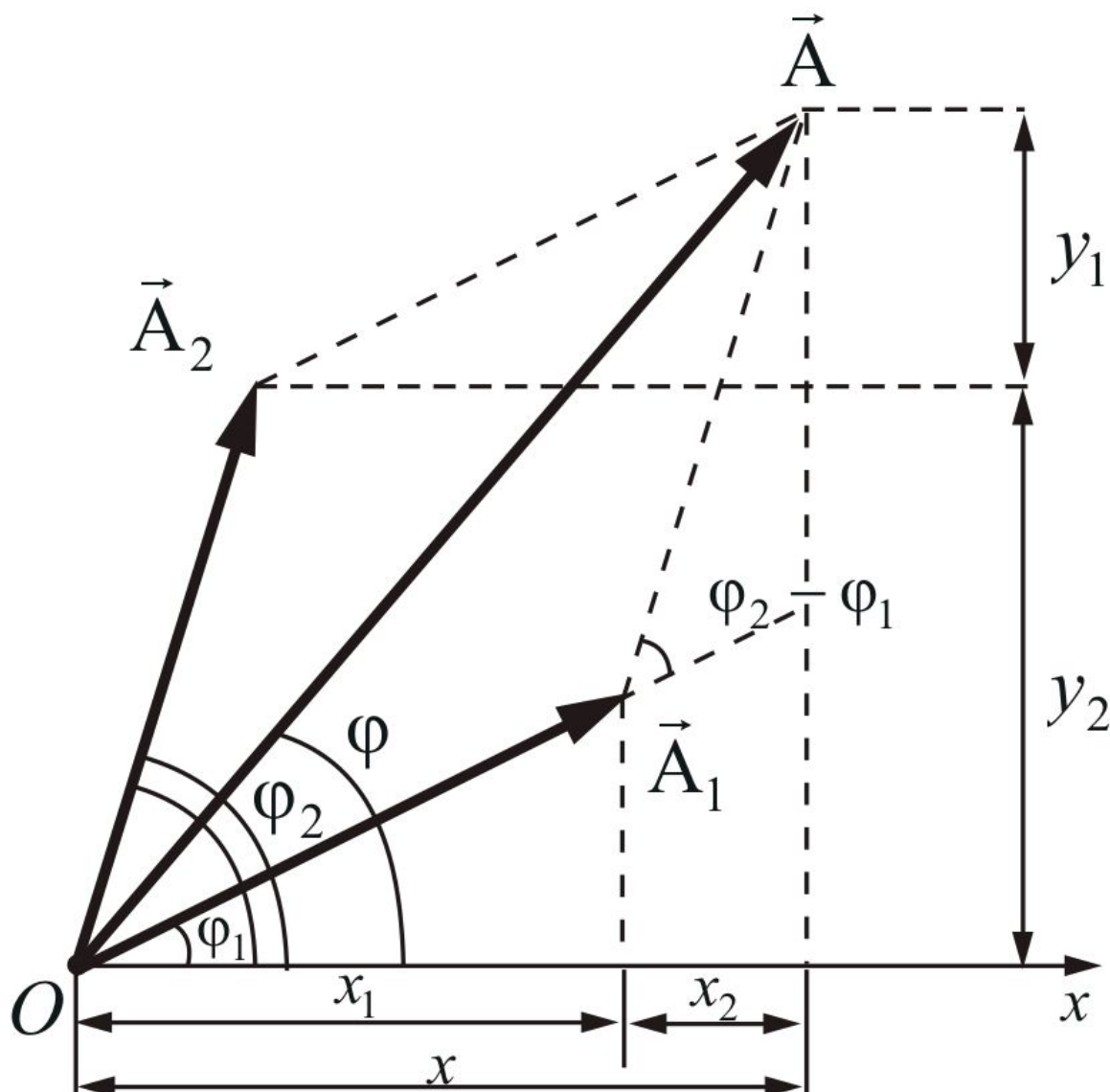


*Такие два колебания называются когерентными, их разность фаз не зависит от времени:*

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



***Ox*** – опорная прямая

$A_1$  – амплитуда 1-го колебания

$\varphi_1$  – фаза 1-го колебания.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

***- результирующее колебание,*** тоже

гармоническое, с

частотой  $\omega$ :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$



По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду, результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.2.2)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (2.2.3)$$

Амплитуда  $A$  результирующего колебания зависит от разности начальных фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$

*Рассмотрим несколько простых случаев.*

*1. Разность фаз равна нулю или четному числу  $\pi$ ,*

то есть  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$  и

$$A = A_1 + A_2 \quad (2.2.4)$$

*колебания синфазны*

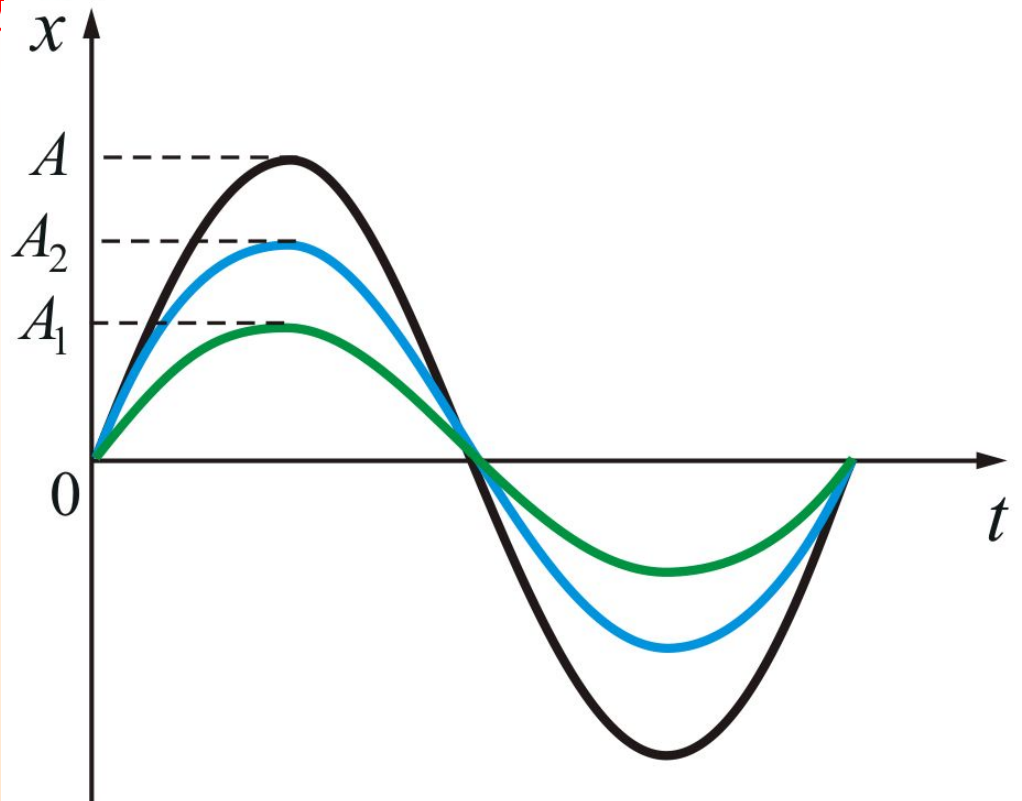


Рисунок 3

**2. Разность фаз равна нечетному числу  $\pi$** , то есть  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n + 1)$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ . Отсюда

$$A = |A_2 - A_1| \quad (2.2.5)$$

колебания **в противофазе**

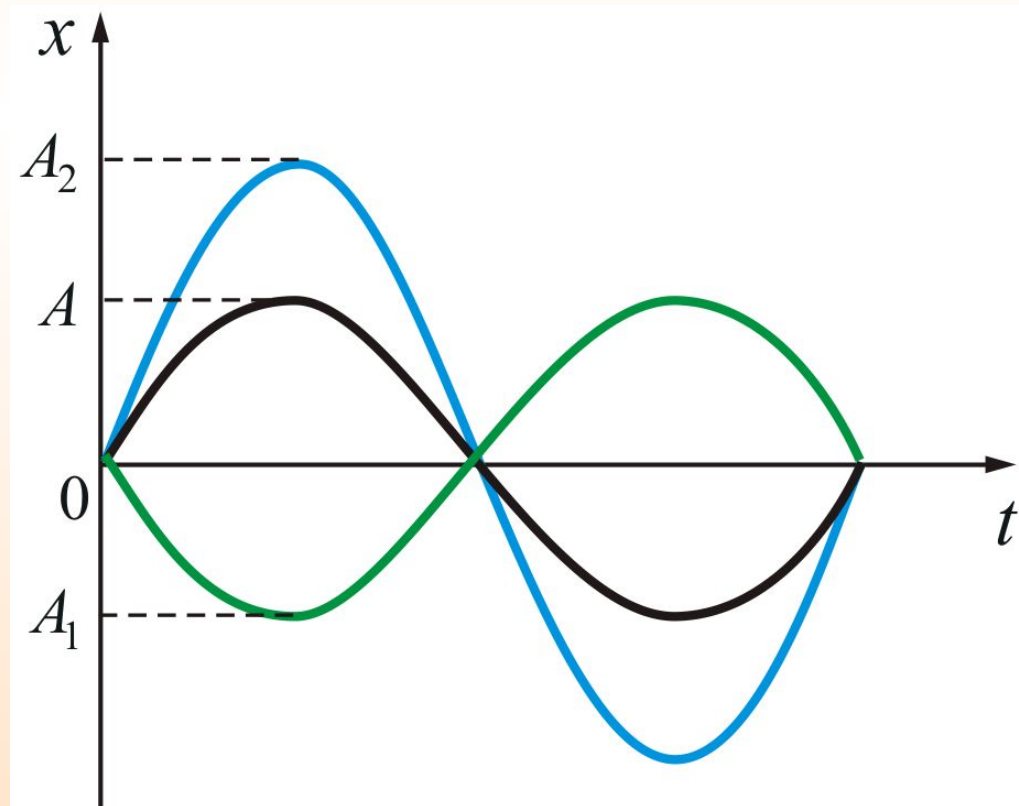


Рисунок 4

3. Разность фаз изменяется во времени произвольным образом

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)] \\ x_2 = A_2 \cos[\omega_2 t + \varphi_2(t)] \end{cases} \quad (2.2.6)$$

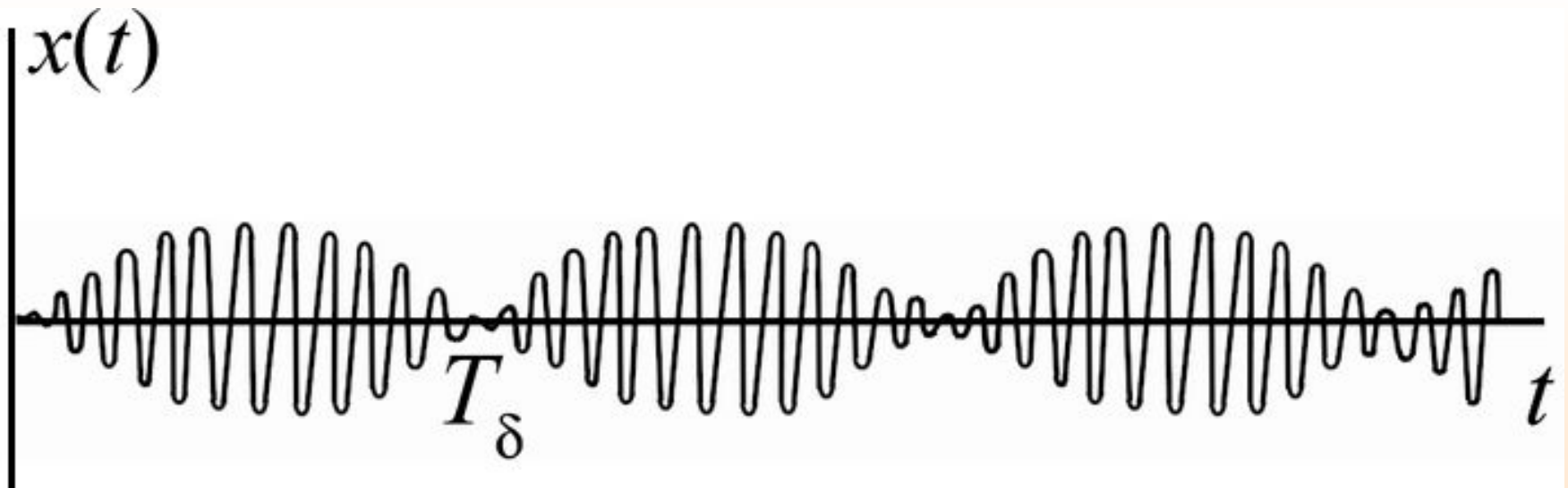
Это **некогерентные** колебания

Здесь интересен случай, называемый **биениями**, когда частоты близки

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

*Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами  $\omega_1 \approx \omega_2$  называются биениями.*

$$x = A_{\zeta} \cos \omega_0 t$$



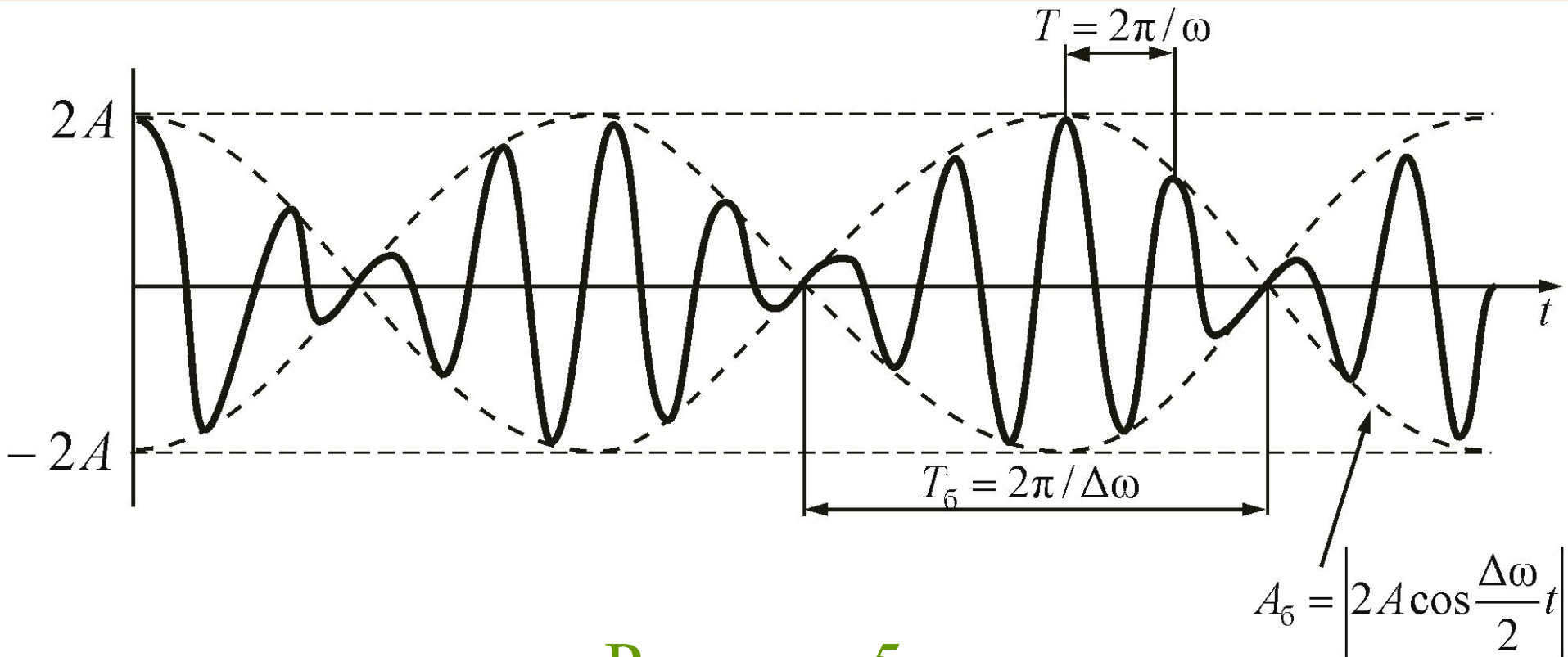


Рисунок 5

Колебания вида  
называются

$$x = A(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]$$

***модулированными.***

**Метод *биений*** используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.



*Любые сложные периодические колебания* можно представить в виде *суперпозиции* одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами кратными циклической частоте  $\omega$ :

$$S(t) = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \\ + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(m\omega t + \varphi_n)$$

Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ , называются *первой (или основной), второй, третьей* и т.д. *гармониками* сложного периодического колебания.



## 2.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

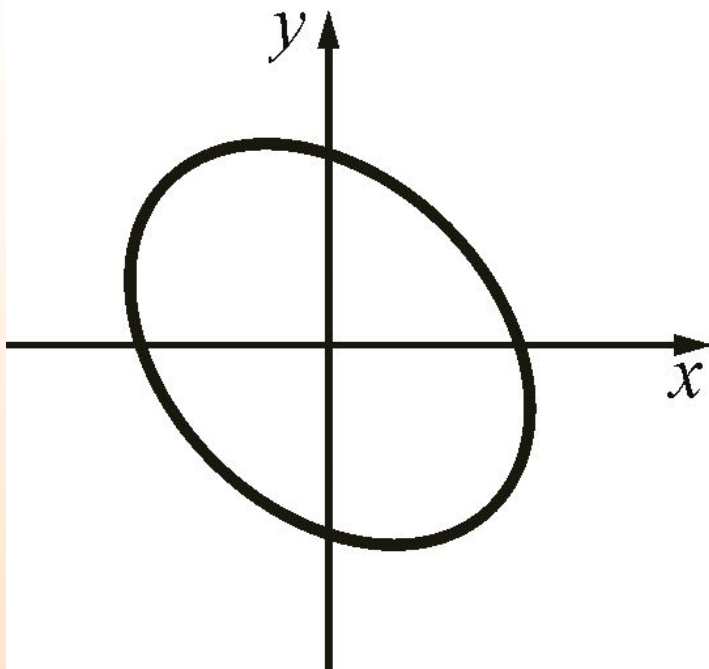
$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1);$$

$$y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.3.1)$$



В результате  
получили  
уравнение **эллипса**  
с произвольно  
расположенными  
осями

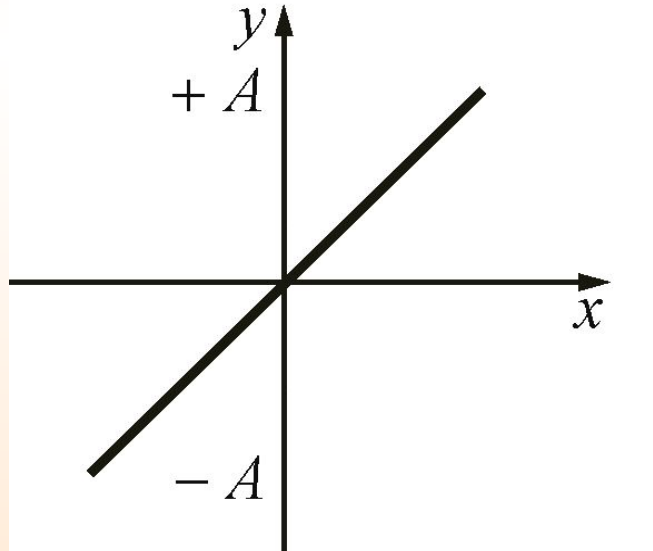
Рисунок 6

## 2.4 Фигуры Лиссажу (частные случаи)

1. Начальные фазы колебаний одинаковы  $\varphi_1 = \varphi_2$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \quad (2.4.1)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат

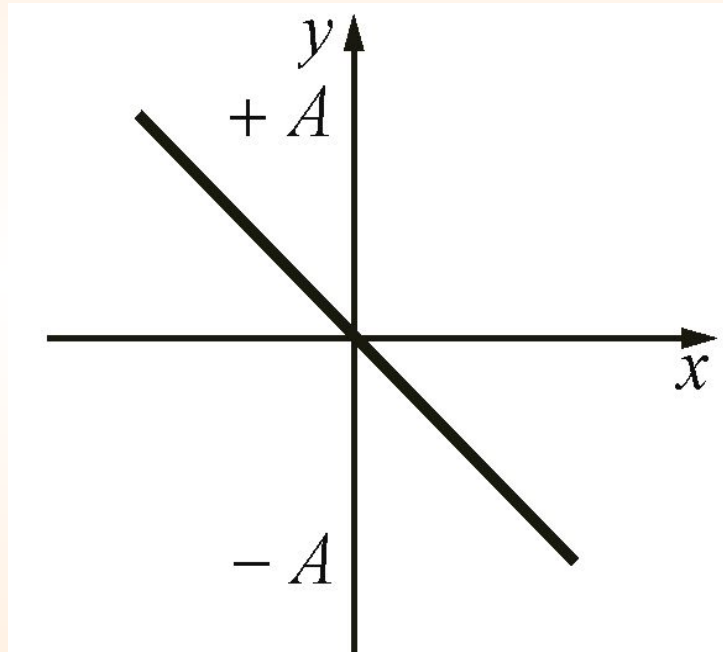


$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Такие колебания называются **линейно поляризованными.**

2. Начальная разность фаз равна  $\pi$ .  $\cos \pi = -1$

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x \quad (2.4.2)$$



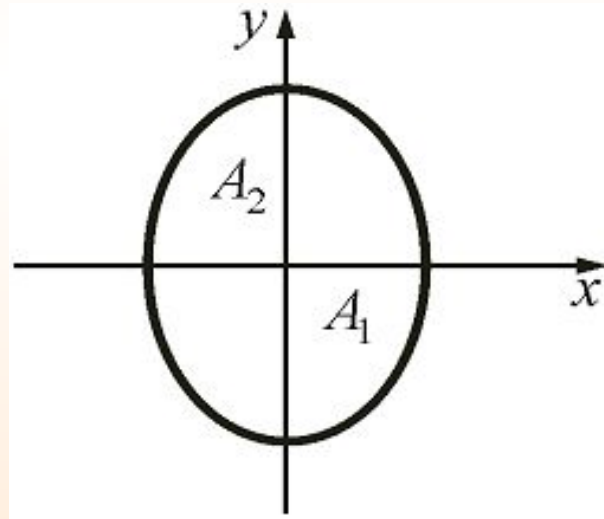
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

(2.4.3)

3. Начальная разность фаз равна  $\pi/2$ .  $\cos \pi/2 = 0$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (2.4.4)$$

– это уравнение эллипса с полуосями  $A_1$  и  $A_2$   
(*Эллиптически поляризованные колебания*)



При  $A_1 = A_2$  – получим уравнение окружности  
(*циркулярно-поляризованные колебания*).

*4. Все остальные разности фаз дают эллипсы с различным углом наклона относительно осей координат.*

*Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются фигурами Лиссажу.*

Здесь рассматривались простейшие случаи, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Если  $\omega_1 \neq \omega_2$  тогда в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу (рисунок 8)

# Фигуры Лиссажу при $\omega_1 \neq \omega_2$

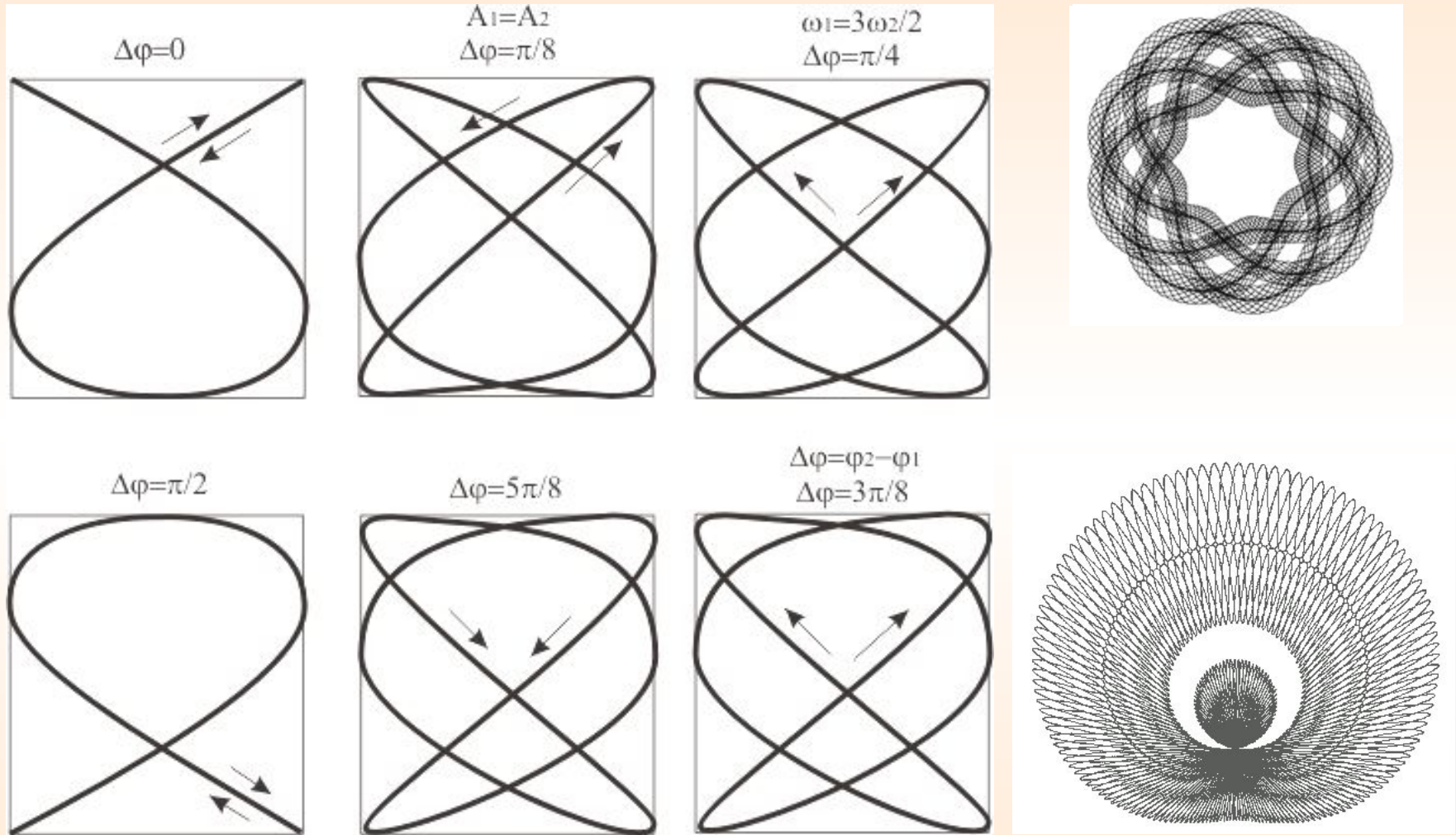


Рисунок 8

ЛЕКЦИЯ ОКОНЧЕНА!

