Тема. Колебания линейных распределенных систем

Семинар 11. Изгибные колебания стержня

В технической теории изгибные колебания стержня описывают уравнением при $p = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho F\,\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0 \quad (10.1)$$

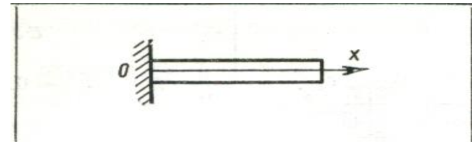
Если стержень имеет постоянные по длине характеристики $EJ = const$, $pF = const$, то уравнение для исследования собственных колебаний будет следующим:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\rho F}{EJ}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \quad (10.2)$$

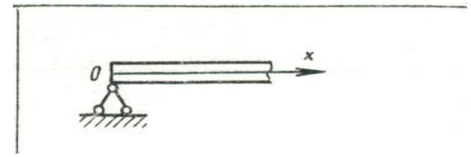
Функция $w(x, t)$ на концах стержня должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим характеру закрепления концов стержня.

Основные типы краевых условий для изгибных колебаний стержней

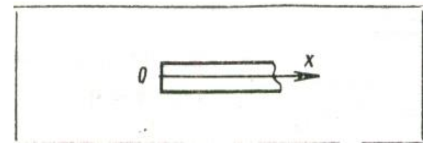
$$1.\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$



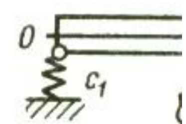
$$2.\ w = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



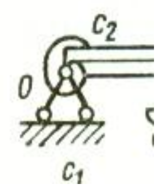
$$3.\ \frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



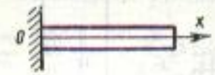
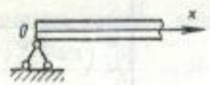
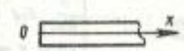
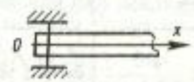
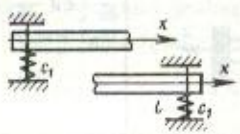
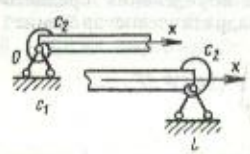
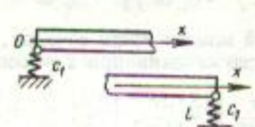
$$4.\ \frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1 w = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

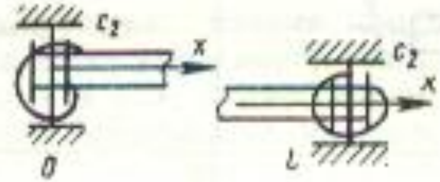
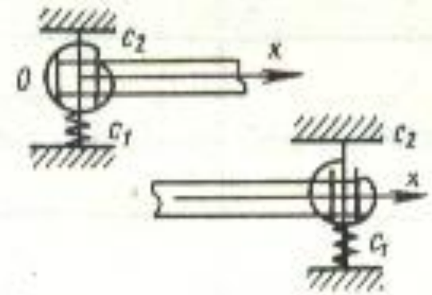
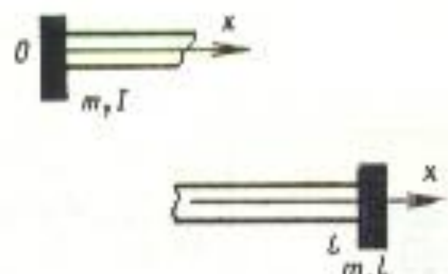


$$5.\ w = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

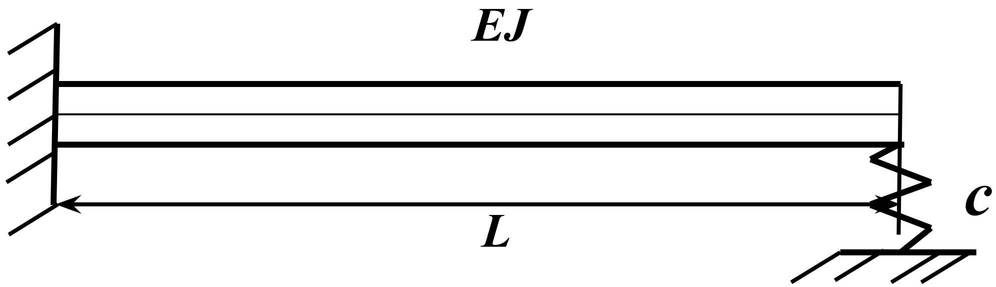


6. Основные типы краевых условий для изгибных колебаний стержней

Вид закрепления	Схема	Условия при $x = 0$
Заделка		$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$
Свободное опирание		$w = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
Свободный конец		$\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
Плавающая заделка		$\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$
		$\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1 w = 0,$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c_1 w = 0,$ (при $x = l$) $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$
Упругое закрепление		$w = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$ $EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ (при $x = l$)
		$\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1 w = 0,$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c_1 w = 0,$ (при $x = l$) $EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

Вид закрепления	Схема	Условия при $x = 0$
Упругое закрепление		$EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2\,\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0,$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0,$ $EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2\,\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$ (при $x = l$)
		$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - c_1 w = 0,$ $EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2\,\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c_1 w = 0,$ (при $x = l$) $EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2\,\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$ (при $x = l$)
Сосредоточенный инерционный элемент на конце		$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = m\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ $EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I\,\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -m\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ (при $x = l$) $EJ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I\,\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$ (при $x = l$)

Пример 1. Определить собственную частоты и формы изгибных колебаний стержня



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\rho F}{EJ}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \quad (10.2)$$

Начальные условия для определения собственных частот всегда нулевые

Решение уравнения имеет вид

$$w(x,t)=W(x)\sin\omega t \quad (10.3)$$

Подстановка (10.3) в (10.2) приводит к уравнению

$$W^{IV}-\beta^4 W=0 \quad (10.3)$$

Граничные условия при ***x =0 и x = L*** для ***W(x)***

$$W(0)=0;\quad W'(0)=0;\quad W''(L)=0;\quad W'''(L)=-\frac{c}{EJ}W(L);\quad (10.13)$$

$$W(0)=0;\quad W'(0)=0;\quad W''(L)=0;\quad W'''(L)=-\frac{c}{EJ}W(L)\quad (10.13)$$

Общее решение в виде

$$W(x)=W(0)S_1(\beta x)+\frac{W'(0)}{\beta}S_2(\beta x)+\frac{W''(0)}{\beta^2}S_3(\beta x)+\frac{W'''(0)}{\beta^3}S_4(\beta x)\quad (10.10)$$

Два первых условия (10.13) дают

$$W(x)=C_3S_3(\beta x)+C_4S_4(\beta x)\quad (10.14)$$

Производные

$$W''(x)=C_3\beta^2S_1(\beta x)+C_4\beta^2S_2(\beta x);$$

$$W'''(x)=C_3\beta^3\,S_4(\beta x)+C_4\beta^3S_1(\beta x)$$

Подстановка (10.14) в последние два условия (10.13)

$$C_3S_1(\beta L)+C_4S_2(\beta L)=0\quad (10.15)$$

$$C_3[\beta^3\,S_4(\beta L)+\frac{c}{EJ}S_3(\beta L)]+C_4[\beta^3S_1(\beta L)+\frac{c}{EJ}S_4(\beta L)]=0$$

$$C_3 S_1(\beta L) + C_4{}^2 S_2(\beta L) = 0 \quad (10.15)$$

$$C_3[\beta^3\, S_4(\beta L) + \frac{c}{EJ} S_3(\beta L)] + C_4[\beta^3 S_1(\beta x) + \frac{c}{EJ} S_4(\beta L)] = 0$$

Условием ненулевого решения является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} S_1(\beta L) & S_2(\beta L) \\ S_4(\beta L) + \dfrac{c}{EJ\beta^3} S_3(\beta L) & S_1(\beta L) + \dfrac{c}{EJ\beta^3} S_4(\beta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (10.16)$$

или

$$S_1^2(\beta L) - S_2(\beta L)\, S_4(\beta L) + \frac{c}{EJ\beta^3}[S_1(\beta L) S_4(\beta L) - S_2(\beta L) S_3(\beta L)] = 0 \quad (10.17)$$

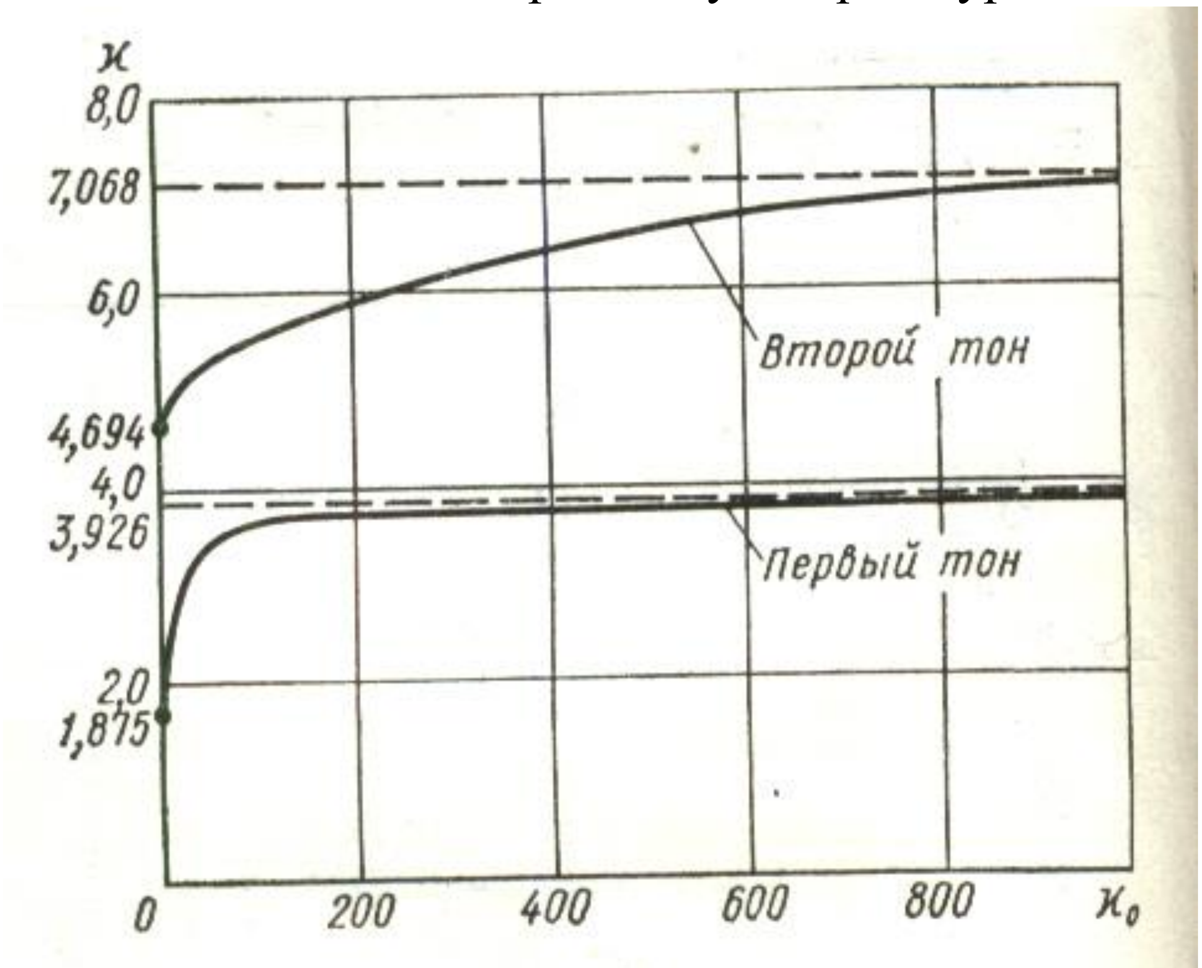
$$S_1^2(\chi) - S_2(\chi)\, S_4(\chi) + \frac{\chi_0^3}{\chi^3}[S_1(\chi) S_4(\chi) - S_2(\chi) S_3(\chi)] = 0 \quad (10.17a)$$

$$где \quad \chi = \beta L; \quad \chi_0^3 = \frac{cL^3}{EJ} \quad (10.18)$$

Используя выражения для функций Крылова (10.9), получим следующее уравнение частот:

$$1 - ch\chi \cos\chi + \frac{\chi_0^3}{\chi^3}[sh\chi \cos\chi - ch\chi \sin\chi] = 0 \quad (10.19)$$

На рис. 2. показана зависимость первых двух корней уравнения (10.19) от χ_0



$$1 - ch\chi \cos\chi + \frac{\chi_0^3}{\chi^3}(sh\chi \cos\chi - ch\chi \sin\chi) = 0 \quad (10.19)$$

Если $\chi = \chi_k \; k = 1, 2, 3...$ - корень уравнения (10.19), то собственная частота

$$\omega_k = \frac{\chi_k^2}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad (10.20)$$

Форма колебаний определяется функцией

$$W_k(x) = S_3(\chi_k \frac{x}{L}) - \frac{S_1(\chi_k)}{S_2(\chi_k)} S_4(\chi_k \frac{x}{L}) \quad (10.21)$$

Балочные функции. Собственные формы изгибных колебаний стержней с постоянными по длине характеристиками для различных краевых условий называют балочными функциями.

Так, формула 10.21) определяет балочную функцию для стержня с одним заделанным и другим опертым на линейную пружину концом.