
Колебательный контур. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс.



Колебательный контур

Колебательный контур – это система, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкости C , катушки индуктивности L и проводника с сопротивлением R (рис.1.)

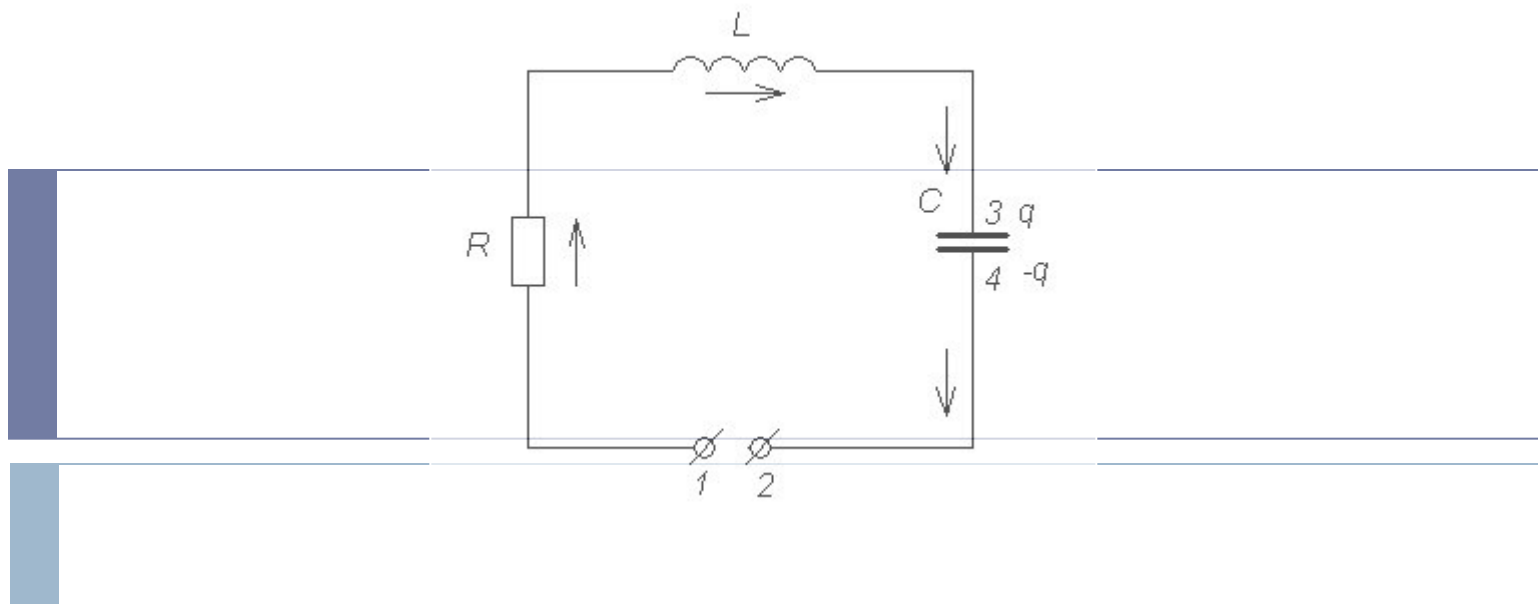


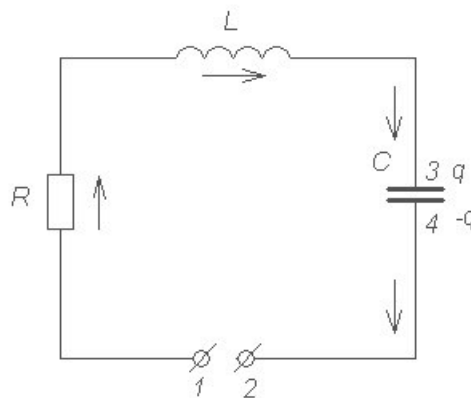
Рис.1.

Уравнение колебательного контура

$$U_R = RI$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

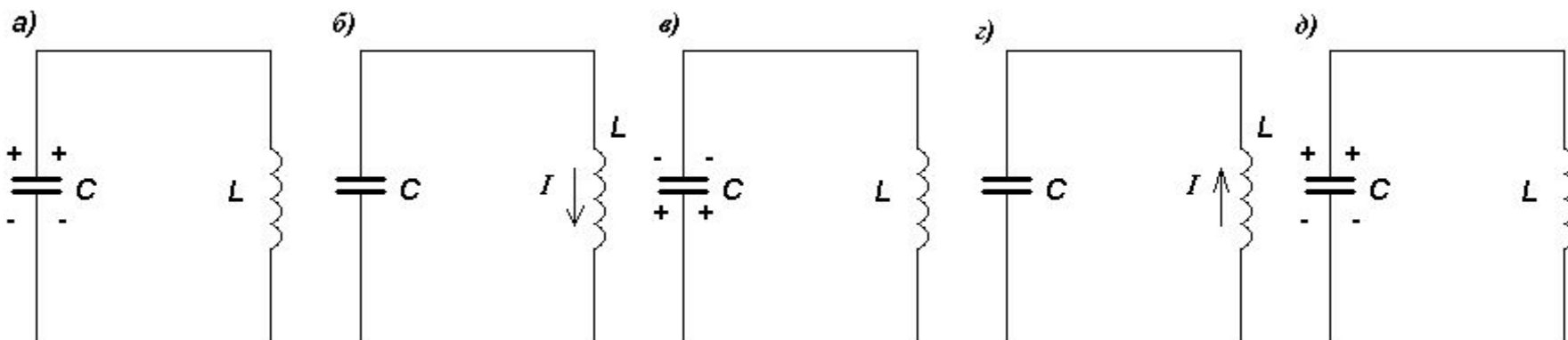
$$U_C = \frac{q}{C}$$



$$\varepsilon = U_R + U_L + U_C$$

Незатухающие колебания

Если нет сопротивления, то электрические колебания в колебательном контуре будут незатухающими



$$a) W_p = \frac{q_m^2}{2C}$$

$$б) W_m = \frac{LI_m^2}{2}$$

$$в) W_p = \frac{q_m^2}{2C}$$

$$г) W_m = \frac{LI_m^2}{2}$$

$$д) W_p = \frac{q_m^2}{2C}$$

Полная электромагнитная энергия колебательного контура

Максимальная энергия электрического поля $\frac{q_m^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$

Максимальная энергия магнитного поля $\frac{LI^2}{2}$

Полная энергия

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}$$

Где i и q – сила тока и электрический заряд в любой момент времени

Свободные электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания – это периодически повторяющиеся изменения электромагнитных величин (q – электрический заряд, I – сила тока, U – разность потенциалов), происходящие без потребления энергии от внешних источников.

Свободные незатухающие колебания

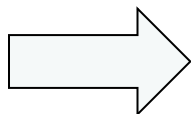
Уравнение колебательного контура

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = X$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\gamma = \frac{R}{L}$$

$$X = \frac{\varepsilon}{C}$$



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = X$$

где ω_0 – собственная частота колебаний системы

γ – коэффициент затухания

Если сопротивление R равно нулю:

□
свободные незатухающие колебания

Решение этого уравнения:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

Формула Томпсона

Если какая-либо величина меняется по времени по закону $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$ то она совершает гармонические колебания.

Промежуток времени, через который значения колеблющихся величин периодически повторяются, называется периодом колебания:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебаний:

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

q_0 – амплитуда колебания

ω_0 – частота колебания

δ – начальная фаза колебания

Для электрических колебаний собственная

частота: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$



$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$$

- Формула Томпсона

Затухающие электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания в реальном колебательном контуре, представляющем собой последовательное соединение катушки индуктивности L , конденсатора емкости C и электрического сопротивления R – называются затухающими электромагнитными колебаниями

Уравнение изменения заряда q на обкладках конденсатора во времени:

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

Решение уравнения: $q = q_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_3 t + \delta)$

q_0 – амплитудное значение заряда в момент времени $t = 0$

$\gamma = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания

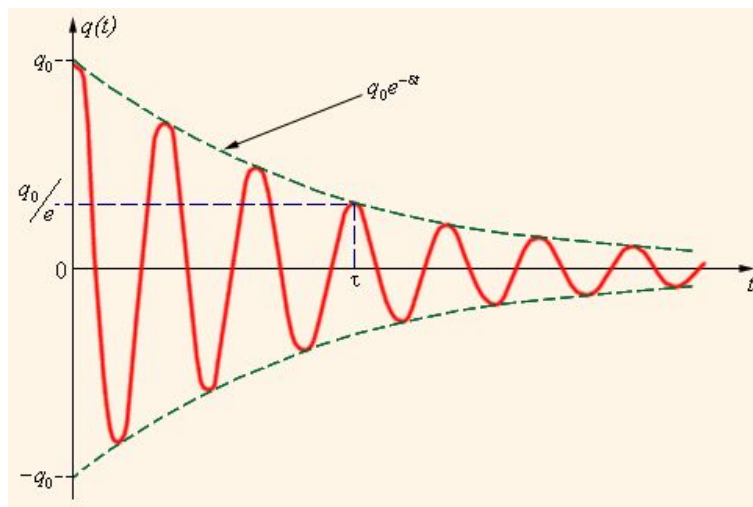
Зависимость заряда от времени при затухающем колебании

Циклическая частота свободных электромагнитных колебаний в контуре:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$



Вынужденные электромагнитные колебания

Незатухающие колебания ЭДС в цепи под действием внешней, периодически изменяющейся ЭДС – называются вынужденными электромагнитными колебаниями

$$e = E_m \sin \omega t$$

мгновенное значение ЭДС индукции в данный момент времени)

Амплитудное значение ЭДС

ω – циклическая частота переменной ЭДС

Магнитный поток Φ сквозь плоскость рамки:

$$\Phi = BS \cos \alpha$$

α – угол между нормалью \vec{n} к плоскости рамки и направлением

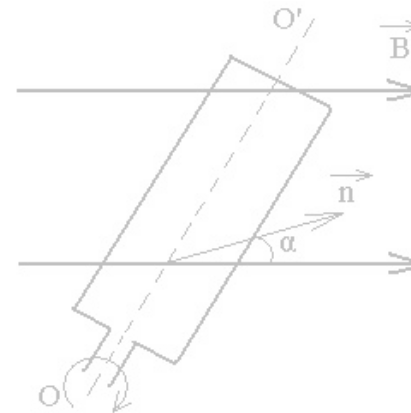
вектора магнитной индукции \vec{B}

По закону электромагнитной индукции:

$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ – скорость изменения магнитной индукции

$$e = BS \omega \sin \omega t = E_m \sin \omega t$$

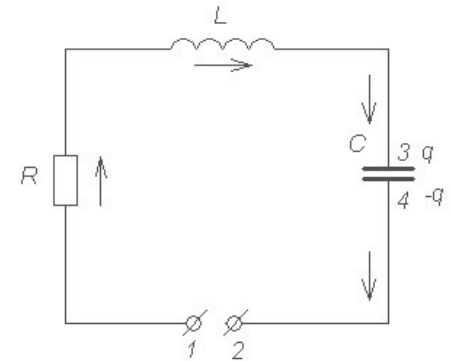


Полное сопротивление колебательного контура

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

где $X = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление колебательного контура

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



Из закона Ома для участка цепи переменного тока:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения (отношение реактивного сопротивления к активному):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Резонанс

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний тока в колебательном контуре, которое происходит при совпадении частоты вынужденных колебаний с собственной частотой колебательного контура – называется резонансом.

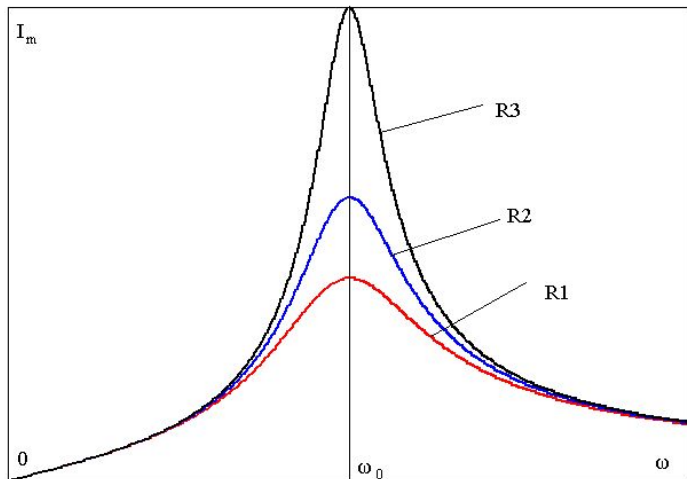
Если $U_m = const$, то амплитуда вынужденных колебаний силы тока зависит от ω :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Ре зависит от $\omega \Rightarrow I_m = \frac{1}{\omega C}$ справедливо если $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

ω_0 – собственная частота колебаний

ω – резонансная частота (частота переменного тока, при которой сила тока максимальна)



резонансное значение I_m при $\omega = \omega_0$

$$I_m = \frac{U_m}{|X|} = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = |I_{mC} - I_{mL}|$$

I_{mC} и I_{mL} – амплитудные значения силы токов

U – амплитудное значение приложенного U

Если $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow I_{mC} = I_{mL}, I_m = 0, R \rightarrow \infty$

Условие резонанса токов:

$$\omega \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$