

---

# Колебательный контур. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс.



# Колебательный контур

Колебательный контур – это система, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкости  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и проводника с сопротивлением  $R$  (рис.1.)

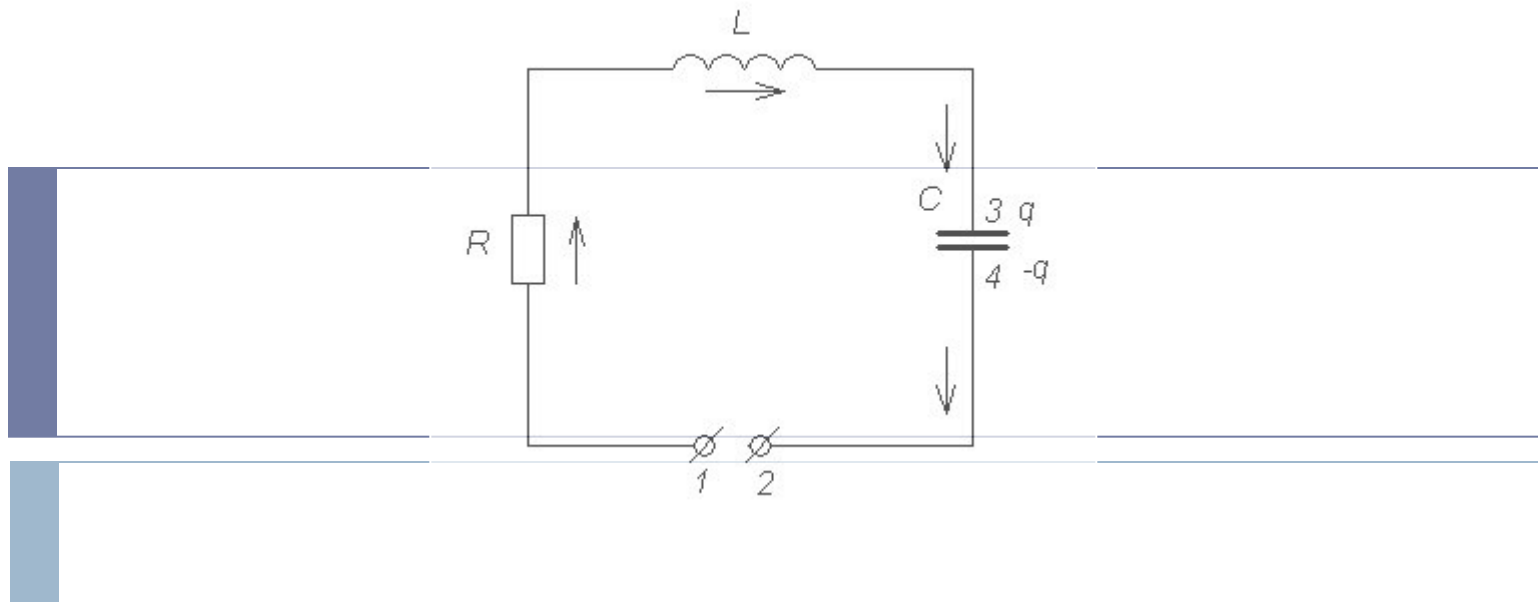


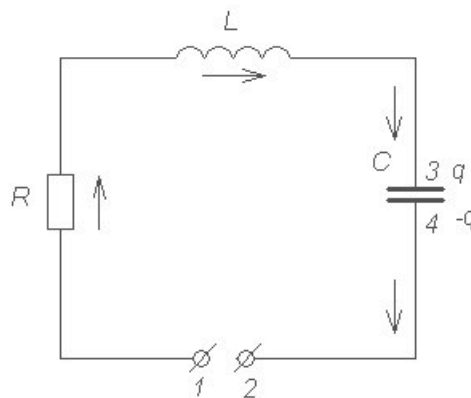
Рис.1.

# Уравнение колебательного контура

$$U_R = RI$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

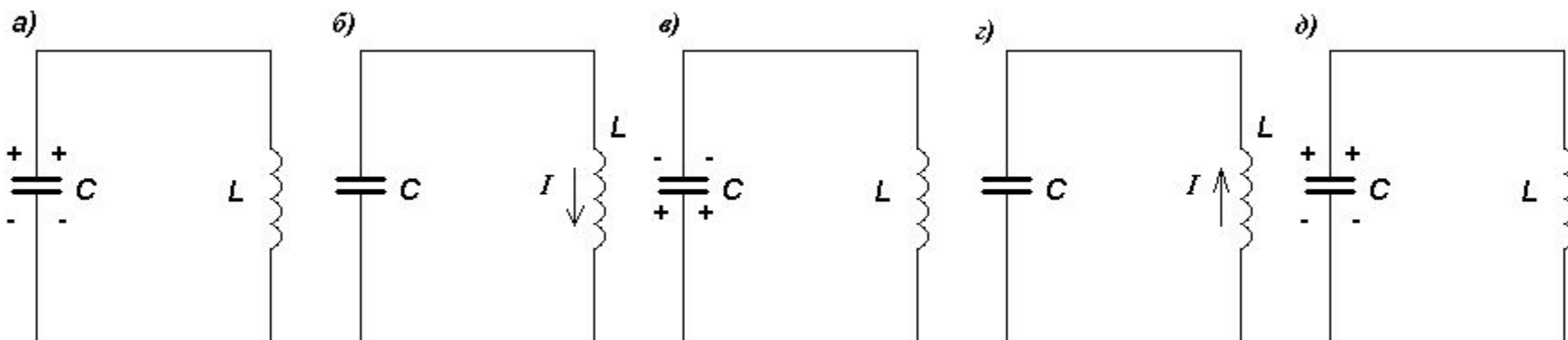
$$U_C = \frac{q}{C}$$



$$\varepsilon = U_R + U_L + U_C$$

# Незатухающие колебания

Если нет сопротивления, то электрические колебания в колебательном контуре будут незатухающими



$$a) W_p = \frac{q_m^2}{2C}$$

$$б) W_m = \frac{LI_m^2}{2}$$

$$в) W_p = \frac{q_m^2}{2C}$$

$$г) W_m = \frac{LI_m^2}{2}$$

$$д) W_p = \frac{q_m^2}{2C}$$

# Полная электромагнитная энергия колебательного контура

Максимальная энергия электрического поля

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

Максимальная энергия магнитного поля

$$\frac{LI^2}{2}$$

## Полная энергия

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}$$

Где  $i$  и  $q$  – сила тока и электрический заряд в любой момент времени

# Свободные электромагнитные колебания

**Свободные электромагнитные колебания – это периодически повторяющиеся изменения электромагнитных величин ( $q$  – электрический заряд,  $I$  – сила тока,  $U$  – разность потенциалов), происходящие без потребления энергии от внешних источников.**

# Свободные незатухающие колебания

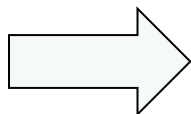
Уравнение колебательного контура

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = X$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\gamma = \frac{R}{L}$$

$$X = \frac{\varepsilon}{C}$$



$$q + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = X$$

где  $\omega_0$  – собственная частота колебаний системы

$\gamma$  – коэффициент затухания

**Если сопротивление R равно нулю:**

□  
свободные незатухающие колебания

Решение этого уравнения:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

# Формула Томпсона

Если какая-либо величина меняется по времени по закону  $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$  то она совершает гармонические колебания.

Промежуток времени, через который значения колеблющихся величин периодически повторяются, называется периодом колебания:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебаний:

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$q_0$  – амплитуда колебания

$\omega_0$  – частота колебания

$\delta$  – начальная фаза колебания

Для электрических колебаний собственная

частота:  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$



$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$$

- Формула Томпсона



# Затухающие электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания в реальном колебательном контуре, представляющем собой последовательное соединение катушки индуктивности  $L$ , конденсатора емкости  $C$  и электрического сопротивления  $R$  – называются затухающими электромагнитными колебаниями

Уравнение изменения заряда  $q$  на обкладках конденсатора во времени:

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

Решение уравнения:  $q = q_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_3 t + \delta)$

$q_0$  – амплитудное значение заряда в момент времени  $t = 0$

$\gamma = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания

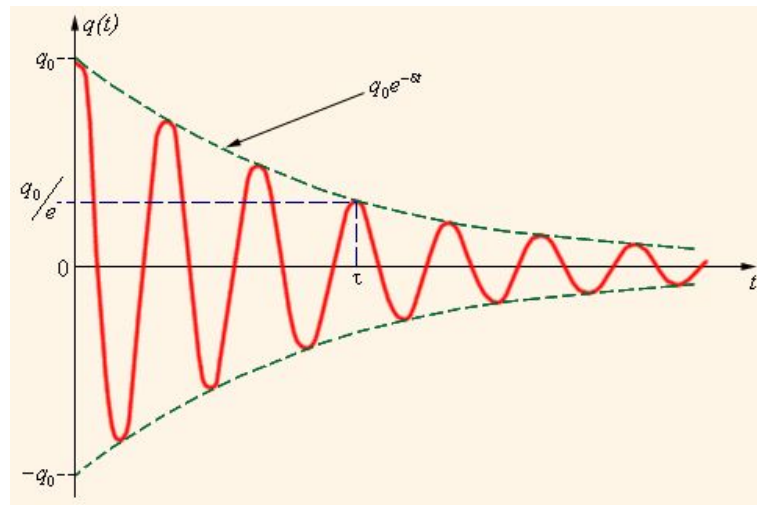
Зависимость заряда от времени при затухающем колебании

Циклическая частота свободных электромагнитных колебаний в контуре:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$



# Вынужденные электромагнитные колебания

Незатухающие колебания ЭДС в цепи под действием внешней, периодически изменяющейся ЭДС – называются вынужденными электромагнитными колебаниями

$$e = E_m \sin \omega t$$

*мгновенное значение ЭДС индукции в данный момент времени)*

*Амплитудное значение ЭДС*

*$\omega$  – циклическая частота переменной ЭДС*

*Магнитный поток  $\Phi$  сквозь плоскость рамки:*

$$\Phi = BS \cos \alpha$$

*$\alpha$  – угол между нормалью  $\vec{n}$  к плоскости рамки и направлением*

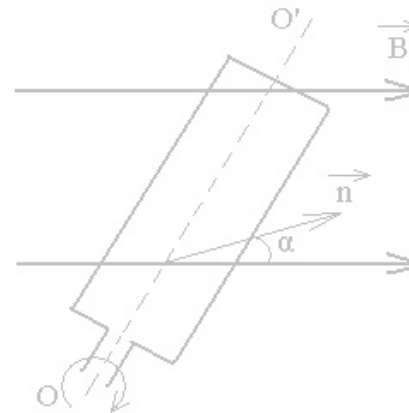
*вектора магнитной индукции  $\vec{B}$*

*По закону электромагнитной индукции:*

$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

*$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$  – скорость изменения магнитной индукции*

$$e = BS \omega \sin \omega t = E_m \sin \omega t$$

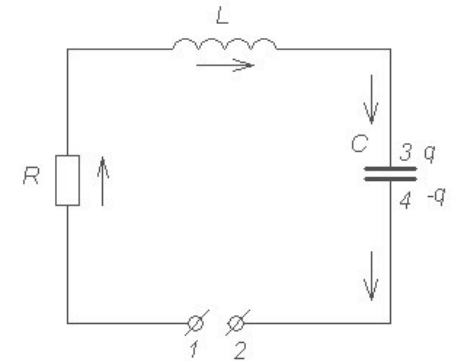


# Полное сопротивление колебательного контура

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

где  $X = X_L - X_C$  – реактивное сопротивление колебательного контура

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



**Из закона Ома для участка цепи переменного тока:**

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

**Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения (отношение реактивного сопротивления к активному):**

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

# Резонанс

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний тока в колебательном контуре, которое происходит при совпадении частоты вынужденных колебаний с собственной частотой колебательного контура – называется резонансом.

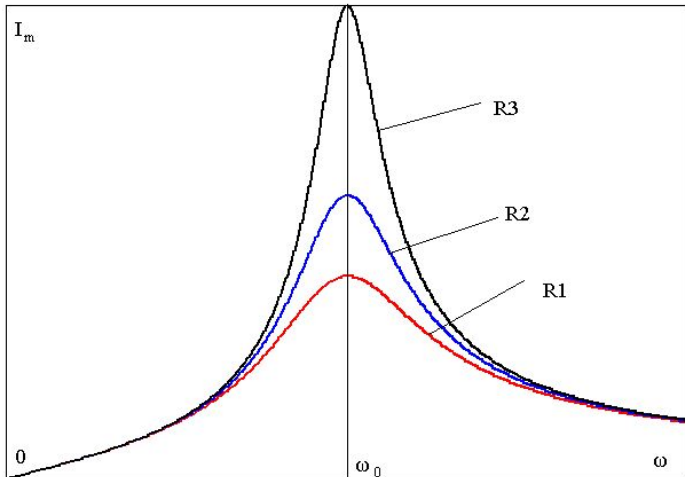
Если  $U_m = const$ , то амплитуда вынужденных колебаний силы тока зависит от  $\omega$ :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Ре зависит от  $\omega \Rightarrow L\omega = \frac{1}{\omega C}$  справедливо если  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

$\omega_0$  – собственная частота колебаний

$\omega$  – резонансная частота (частота переменного тока, при которой сила тока максимальна)



резонансное значение  $I_m$  при  $\omega = \omega_0$

$$I_m = \frac{U_m}{|X|} = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = |I_{mC} - I_{mL}|$$

$I_{mC}$   $I_{mL}$  – амплитудные значения силы токов

$U$  – амплитудное значение приложенного  $U$

Если  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow I_{mC} = I_{mL}, I_m = 0, R \rightarrow \infty$

**Условие резонанса токов:**

$$\omega \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$